

Redovi - teorijska pitanja i zadatci

1. Definirajte red i sumu reda.
2. Kako glasi nužni uvjet konvergencije reda? Što o konvergenciji reda možemo zaključiti ako je nužan uvjet ispunjen, a što ako nije ispunjen?
3. Kako glasi kriterij uspoređivanja redova?
4. Navedite D'Alembertov kriterij konvergencije redova.
5. Navedite Cauchyjev kriterij konvergencije redova.
6. Navedite Leibnizov kriterij konvergencije redova.
7. Objasnite pojam uvjetne i apsolutne konvergencije reda.
8. Koji red nazivamo geometrijskim i kada on konvergira?
9. Odredite sume sljedećih geometrijskih redova

(a) $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \dots$,

(b) $1 + \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \dots$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Rj. (a) 1, (b) $1/(1 - \sin \alpha)$

10. Ispitajte konvergenciju redova pomoću D'Alembertovog kriterija:

(a) $\sum \frac{n^3}{n^2+3^{n+1}}$ (b) $\sum \frac{n}{2^n}$ (c) $\sum \frac{n^2}{(n+2)!}$ (d) $\sum \frac{2^n+3^n}{4^3+5^n}$ (e) $\sum \frac{2}{(2n-1)2^{2n}}$.

Rj. (a) div., $\lim a_n \neq 0$, (b) konv., $\lim a_{n+1}/a_n = 1/2$, (c) konv., $\lim a_{n+1}/a_n = 0$, (d) konv., $\lim a_{n+1}/a_n = 3/5$, (e) konv., $\lim a_{n+1}/a_n = 1/4$

11. Kriterijem uspoređivanja ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\sum \frac{n^3}{\sqrt{n^7+3n+1}}$ (b) $\sum \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ (c) $\sum \frac{n^2}{(n+2)!}$ (d) $\sum \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

Rj. (a) div., $\sum \frac{1}{n^p}$, $p = 1/2$, (b) konv., $\sum \frac{1}{n^p}$, $p = 3/2$, (c) konv., $\sum \frac{1}{n!}$, (d) konv., $a_n < \frac{1}{2}((\frac{1}{2})^n + (\frac{3}{4})^n) < (\frac{3}{4})^n$.

12. Ispitajte konvergenciju redova pomoću Cauchyjevog kriterija

(a) $\sum \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ (b) $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (c) $\sum 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
 (d) $\sum 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (e) $\sum \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$ (f) $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Rj. (a) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$, (b) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ (c) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1/2$, (d) div., $\lim \sqrt[n]{a_n} = e/2$, (e) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 9/16$, (f) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 2/5$.

13. Ispitajte konvergenciju redova pomoću Leibnizovog kriterija

(a) $\sum \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+1}$ (b) $\sum \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)}{2^n}$ (c) $\sum (-1)^n \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

Rj. Svi su konv.

14. Ispitajte konvergenciju redova

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum \left(\frac{2n^2+3n}{2n^2-7n+1} \right)^n & \text{(b)} \sum \left(\frac{2n^2+3n}{3n^2-7n+1} \right)^n & \text{(c)} \sum (-1)^n \ln(n-1) \\
 \text{(d)} \sum (-1)^n \frac{5n+6}{5n^2-3n+1} & \text{(e)} \sum \frac{4n-7}{9^n} & \text{(f)} \sum \frac{5^n+3^n-n^2}{n^{2004}+5^n} \\
 \text{(g)} \sum \frac{2^{n+1}}{n^n} & \text{(h)} \sum \frac{(n+1)\operatorname{arctg} n}{2n+1} & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2}.
 \end{array}$$

Rj. (a) div., $\lim \sqrt[n]{a_n} = e^5$, (b) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 2/3$, (c) div., (a_n) je div. niz, (d) konv., prema Leibnizovom krit., (e) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1/9$, (f) div., $\lim a_n \neq 0$, (g) konv., $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$, (h) div., (a_n) je div. niz, (i) konv., prema Leibnizovom krit.

Preporučeni linkovi:

http://web.math.hr/nastava/analiza/files/ch3_2.pdf

<http://lavica.fesb.hr/mat1/predavanja/node133.html>

<http://lavica.fesb.hr/mat1/vjezbe/node139.html>