Limes funkcije u točki

$f : D \to \mathbb{R}$

Broj L je limes ili granična vrijednost funkcije f u točki c ako

$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)$

$$\forall\ x \in D\ \&\ 0 < |x - c| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Kažemo, da funkcija $f(x)$ teži k L $(f(x) \to L)$ kad x teži k c $(x \to c)$.

Limes funkcije u beskonačnosti

Broj L je limes funkcije f u beskonačnosti (∞) ako

$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ M > 0)$

$$\forall\ x > M\ \&\ x \in D\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Broj L je limes funkcije f u minus beskonačnosti ($-\infty$) ako

$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ m < 0)$

$$\forall\ x < m\ \&\ x \in D\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

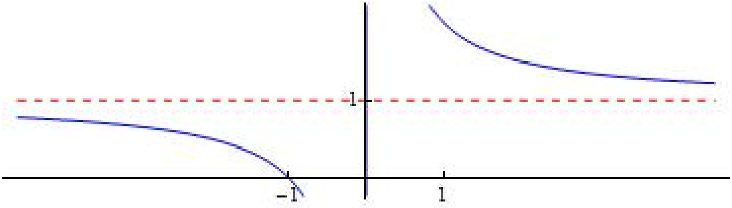


Figure: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

Beskonačan limes

Funkcija f u točki c teži u beskonačnosti (∞) ako

$(\forall\ M > 0)\ (\exists\ \delta > 0)$

$$\forall\ x \in D\ \&\ 0 < |x - c| < \delta\ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

Pišemo

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty.$$

Funkcija f u točki c teži u minus beskonačnosti (-∞) ako

$(\forall\ m < 0)\ (\exists\ \delta > 0)$

$$\forall\ x \in D\ \&\ 0 < |x - c| < \delta\ \Rightarrow\ f(x) < m$$

onda

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty.$$

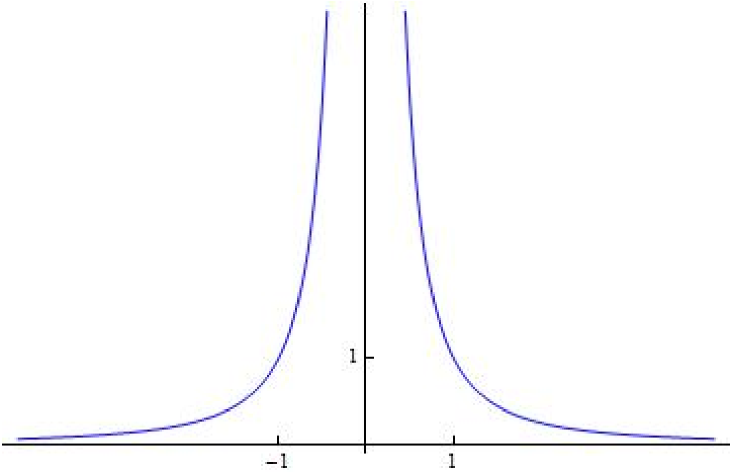


Figure: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Beskonačni limes u beskonačnosti

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

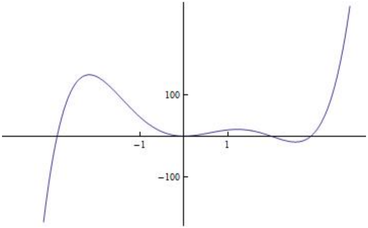


Figure: $p(x) = 34x^2 - 17x^3 - 4x^4 + 2x^5$

Jednostrani limesi

Broj L je limes s desna (zdesna, desni limes) funkcije f u točki c ako

$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)$

$$\forall\ x \in D\ \&\ 0 < x - c < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L.$$

Broj L je limes s lijeva (slijeva, lijevi limes) funkcije f u točki c ako

$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)$

$$\forall\ x \in D\ \&\ 0 < c - x < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Veza limesa i jednostranih limesa

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to c^+} f(x) = L \;\&\; \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

Ako

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L^+ \neq \lim_{x\to c^-} f(x) = L^-,$$

onda limes funkcije f u točki c NE POSTOJI!

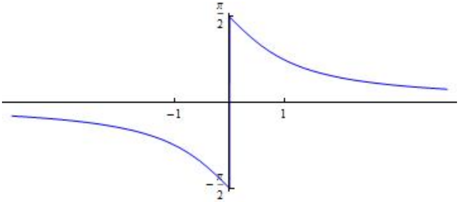


Figure: $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\pi/2$, $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \pi/2$

Teoremi o limesu

Teorem o zbroju, razlici, umnošku,... limesa

Neka je $\lim_{x \to c} f(x) = F$ i $\lim_{x \to c} g(x) = G$. Vrijedi

- $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$,
- $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$,
- $G \neq 0$, $\lim_{x \to c} (f(x)/g(x)) = F/G$,
- $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = F^G$,

Teorem o 'sandwichu'

Neka je $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = L$, te na nekoj okolini točke c vrijedi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Tada

$$\lim_{x \to c} h(x) = L.$$

Važni limesi

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Definicija neprekidnosti

$f : D \to R$

Funkcija f je neprekidna u $c \in D$ ako

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

to jest ako $(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)$

$$\forall\ x \in D\ \&\ |x - c| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $A \subseteq D$ ako

je neprekidna u svakoj točki skupa A.

Svojstva neprekidnih funkcija

Neprekidnost zbroja, razlike, umnoška, kvocijenta funkcija

Ako su f i g neprekidne u c, onda su i $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g (uz pretpostavku da je $g(x)\neq 0$ oko c) neprekidne u c.

Neprekidnost kompozicije

Ako je f neprekidna u c, a g neprekidna u $f(c)$, onda je $g\circ f$ neprekidna u c. Pišemo

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)).$$

Bolzano-Weierstrassov teorem

Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna. Tada je $f([a,b])=[c,d]$.// ("Slika segmenta je segment.")

Posljedice: Neprekidna funkcija na segmentu poprima svoj minimum i maksimum te poprima svaku vrijednost segmenta.

Vrste prekida

Uklonjiv prekid

Ako f nije definirana u c i vrijedi da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, tada stavljamo

$$f(c) := L.$$

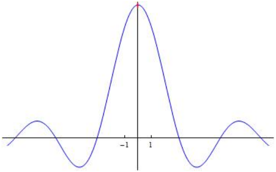
Prekid prve vrste

Ako vrijedi da je $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L^-$ i $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L^+$ i $L^- \neq L^+$

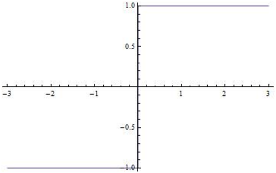
Prekid druge vrste

Ako vrijedi da je $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty$ (ili $-\infty$) i $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$ ((ili $-\infty$)), odnosno ako limes u c ne postoji.

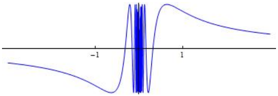
Vrste prekida



(a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima uklonjiv prekid u $c = 0$



(b) $f(x) =$sign x ima prekid prve vrste u $c = 0$



(c) $f(x) = \sin(1/x)$ ima prekid druge vrste u $c = 0$

Figure: Primjeri funkcija s prekidom

Vertikalna asimptota

Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota s lijeva funkcije f ako je

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \text{ ili } -\infty.$$

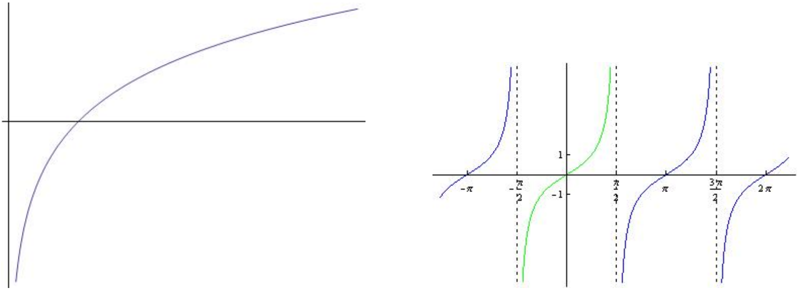
Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota s desna funkcije f ako je

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \text{ ili } -\infty.$$

Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota funkcije f ako je

vertikalna asimptota s lijeva i desna.

Vertikalna asimptota



(a) $x = 0$ je vert. asimptota s desna od $f(x) = \ln x$

(b) $x = \pi/2 + k\pi$ su vert. asimptote od $f(x) =$tg$x$

Figure: Vertikalne asimptote

Horizontalna asimptota

Pravac $y = d$ je horizontalna asimptota na desnoj strani funkcije f ako je

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = d.$$

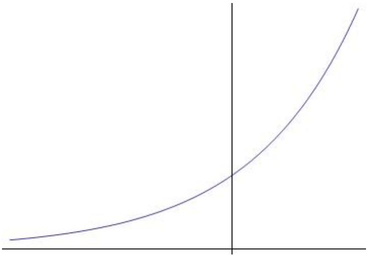
Pravac $y = d$ je horizontalna asimptota na lijevoj strani funkcije f ako je

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = d.$$

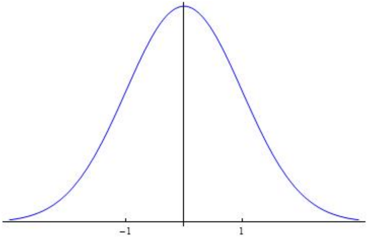
Pravac $y = d$ je horizontalna asimptota funkcije f ako je

horizontalna asimptota na lijevoj i desnoj strani.

Horizontalna asimptota



(a) $y = 0$ je hor. asimptota na lijevoj str. od $f(x) = e^x$



(b) $y = 0$ je hor. asimptota od $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ (Gaussovo zvono)

Figure: Horizontalne asimptote

Kosa asimptota

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota na desnoj strani funkcije f ako je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = l,$$

pri čemi je $k, l \in \mathbb{R}$ i $k \neq 0$.

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota na lijevoj strani funkcije f ako je

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = l,$$

pri čemi je $k, l \in \mathbb{R}$ i $k \neq 0$.

Napomena: Za $k = 0$, dobivamo horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota

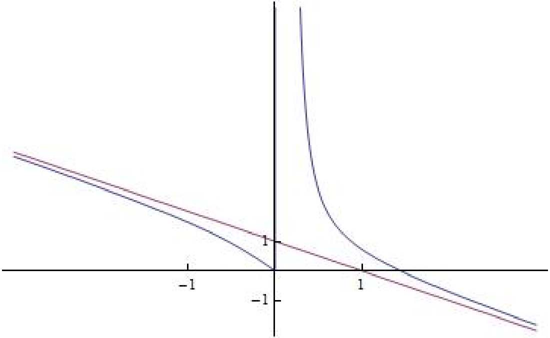


Figure: $y = -x + 1$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = x(e^{1/x} - 2)$