

PRIJENOS TVARI I ENERGIJE

(Dr.sc. Antuna Glasnovića, red. prof.)

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb

Literatura

1. W.J. Beek, K.M.K. Muttzall, *Transport Phenomena*, J. Wiley and Sons LTT, London, 1975.
2. R. Byron Bird and all, *Transport Phenomena*, J. Wiley and Sons LTT, New York, 1971.
3. J.R. Welty, C.E. Wicks, R.E. Wilson, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, J. Wiley, 1976.
4. M. Pečornik, *Tehnička mehanika fluida*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Poštovani studenti,
ukoliko uočite neke pogreške u tekstu, molim vas da obavijestite mene ili suradnike u Zavodu.

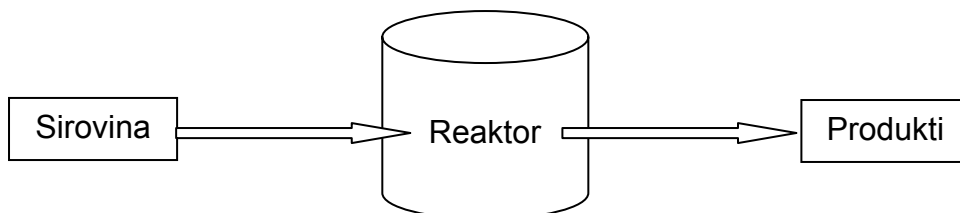
Dr.sc. Antun Glasnović

1. UVOD

Prijenos tvari i energije osnova je svih kemijsko inženjerskih disciplina. Kemijsko inženjerstvo je područje znanosti koje znanstveno opisuje (proučava) pojedine jedinične operacije i same kemijske procese.

Na bazi tih proučavanja omogućuje se razvoj, projektiranje, dimenzioniranje, vođenje procesa te izbor uređaja i procesne opreme u kojem će se proces industrijski voditi na ekonomičan način. Kemijsko inženjerske studije omogućuju da se na osnovi kvalitativnog razumijevanja kvantitativno matematički opisuje proces.

Promatrajmo neki tehnološki proces u kojem se odvijaju fizikalne i kemijske pretvorbe od polazne sirovine do konačnog proizvoda.



Prije reaktora sirovinu je potrebno npr. usitniti, homogenizirati, predgrijavati, transportirati. *U reaktoru* se provodi kemijska reakcija uz miješanje, hlađenje ili zagrijavanje. *Iza reaktora* potrebno je pak produkte odijeliti npr. filtracijom, destilacijom, ekstrakcijom, sušenjem, homogeniziranjem. Svi postupci kod kojih dolazi do fizičkih promjena poznati su pod nazivom **tehnološke** ili **jedinične operacije**.

Prijenos tvari i energije usko je povezan s jediničnim operacijama koje su s obzirom na fizikalne promjene podijeljene u tri osnovne skupine:

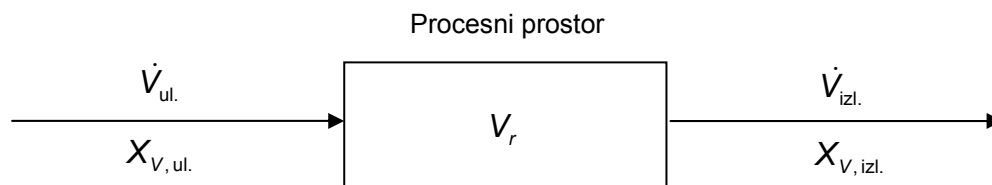
- mehaničke – koje se temelje na pojavama prijenosa količine gibanja
- toplinske – koje se temelje na pojavama prijenosa topline
- difuzijske – koje se temelje na pojavama prijenosa tvari.

Ovakva podjela omogućava uočavanje sličnosti ovih operacija. Uočena je određena analogija između osnovnih fenomena u navedene tri skupine operacija tako da je danas razvijen zajednički pristup poznat kao **prijenos tvari i energije** ili **fenomeni transporta**. Na taj način omogućava se bolje razumijevanje i povezivanje zakonitosti u jediničnim operacijama

2. OPĆI ZAKON OČUVANJA

Kod svih promjena koje se pojavljuju u prirodi *mora* biti zadovoljen osnovni uvjet očuvanja količine gibanja, energije i mase.

Promatrajmo određeni sustav *procesnog prostora* V . Procesni prostor je omeđeni dio prostora kroz koji tokom vremena protječe neka količina *gibanja*, *tvari* ili *energije*. U procesnom se prostoru zbiva barem jedan od mnogobrojnih procesa koji su po pripadnosti dio sadržaja kemijskog inženjerstva, a može biti npr. šaržni reaktor, destilacijska kolona, zrno katalizatora, filtarski uređaj, izmjenjivač topline itd. Temeljne su značajke procesnog prostora *geometrijski oblik*, *ovisnost procesnih varijabli o vremenu i prostornim koordinatama*, *vrsta procesa unutar prostora*, *prolaz i prijenos količine gibanja, topline i tvari kroz procesni prostor i u njemu*.



\dot{V} - protok, $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$

X_V - količina gibanja, tvari ili energije izražena po jedinici volumena tako da imamo:

- kod prijenosa količine gibanja: $\frac{m \cdot v}{V} = v \cdot \rho$, N s m^{-3}
- kod prijenosa toplinske energije: $\frac{Q}{V}$, J m^{-3}
- kod prijenosa tvari: $\frac{m}{V}$, kg m^{-3}

V_r - generiranje količine X u kontrolnom volumenu (nestajanje ili nastajanje količine X)

Kod promatranja procesnog prostora moguće je postaviti *mikroskopsku bilancu* koja promatra infinitenzimalno male veličine i *makroskopsku bilancu* koja promatra prosječne veličine. U Prijenosu tvari i energije opći zakon očuvanja promatra se sa makroskopskog stajališta, a može se pisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} V \cdot \frac{dX_V}{dt} &= \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V, ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V, izl.} + V_r \\ \text{AKUMULACIJA} &= \text{ULAZ} - \text{IZLAZ} + \text{GENERACIJA} \end{aligned} \quad (1)$$

Akumulacija količine X u nekom procesnom prostoru jednaka je volumnom protoku količine X koja je ušla u sustav, umanjena za volumni protok količine X koja je izašla iz sustava i uvećana (umanjena) za generiranu količinu X u sustavu.

Smisao produkta $\dot{V} \cdot X_V$:

$$\dot{V} \cdot X_V = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot \frac{X}{\text{m}^3} = \frac{X}{\text{s}} \right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right], \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right], \left[\frac{\text{kg m s}^{-1}}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

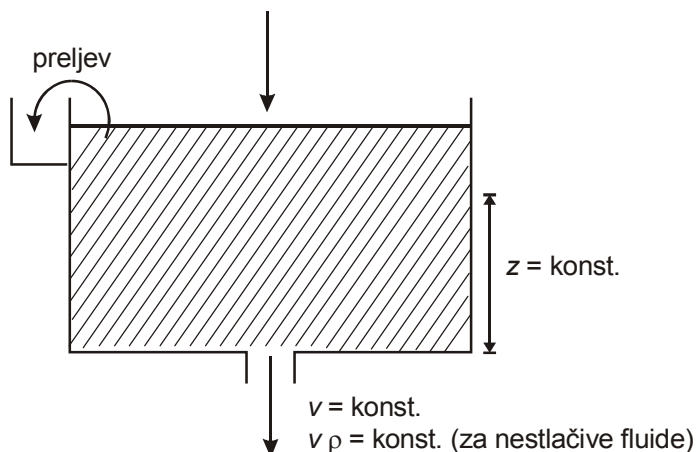
Vidi se da produkt $\dot{V} \cdot X_v$ predstavlja brzinu procesa odnosno brzinu prijenosa i naziva se tok (npr. toplinski tok, maseni tok ili protok itd.).

Potrebno je naglasiti da u ovisnosti o promjeni količine X s vremenom postoje dva karakteristična procesa:

1. kada se brzina prijenosa ne mijenja u vremenu, odnosno $\frac{dX_v}{dt} = 0$, govorimo o **stacionarnom procesu**,
2. kada se brzina prijenosa mijenja u vremenu, odnosno $\frac{dX_v}{dt} \neq 0$, govorimo o **nestacionarnom procesu**.

Za pojašnjenje funkcionalne ovisnosti ili neovisnosti brzine prijenosa o vremenu može ilustrativno poslužiti sljedeći primjer (istjecanje vode iz spremnika)

1. Stacionaran proces



Dovodimo kapljevinu, a višak odvodimo preko preljeva. Razina kapljevine u spremniku je konstantna.

Prema Torricellijevom zakonu brzina istjecanja jednaka je brzini slobodnog pada s visine koja odgovara visini stupca kapljevine u spremniku:

$$v = \sqrt{2gz}$$

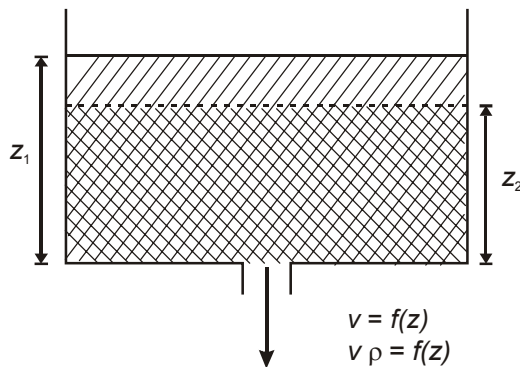
Budući da je razina kapljevine u spremniku konstantna ($z = \text{konst.}$) slijedi da je i brzina istjecanja konstantna ($v = \text{konst.}$), odnosno i količina gibanja vode konstantna ($v\rho = \text{konst.}$).

Diferenciranjem po vremenu slijedi da je:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \frac{d(v\rho)}{dt} = 0$$

što znači da je proces stacionaran.

2. Nestacionaran proces



Nema dovođenja kapljevine pa se razina kapljevine u spremniku stalno smanjuje (hidrostatski tlak je sve manji).

U početku istjecanja, razina kapljevine u spremniku jednaka je z_1 tako da je i brzina istjecanja jednaka

$$v_1 = \sqrt{2gz_1}.$$

Nakon određenog vremena t , razina kapljevine u spremniku se smanjila na z_2 pa je i brzina istjecanja manja:

$$v_2 = \sqrt{2gz_2}$$

Dakle, brzina istjecanja ovisi o razini kapljevine koja opet ovisi o vremenu, tako da je konačno:

$$v = f(t) \quad v\rho = f(t)$$

odnosno

$$\frac{dv}{dt} \neq 0 \quad \frac{d(v\rho)}{dt} \neq 0$$

što znači da je proces nestacionaran.

Fluks (gustoća toka)

U tehnološkim procesima uvijek dolazi do neke vrste prijenosa: tvari, toplinske energije ili količine gibanja. Do prijenosa može doći jedino ako postoji neka **pokretačka sila**.

Na primjer:

- Da bi voda protjecala kroz cijev mora postojati **razlika tlakova**.
- Toplina (energija) prelazi s toplijeg na hladnije tijelo jer postoji **razlika temperatura**.
- Prijenosa tvari ostvaruje se ako postoji **razlika koncentracija**.

Prijenos količine gibanja, topline (energije) ili tvari odvija se sve dok se ne postigne **ravnotežno stanje**. U tom trenutku više ne postoji pokretačka sila. U industrijskoj praksi, odnosno za sam proces, od najvećeg je značaja brzina procesa koja se u kemijskom inženjerstvu izražava po jedinici površine i naziva se **fluks** (gustoća toka), Φ .

Razlikujemo:

- fluks količine gibanja (gustoća toka količine gibanja)
- fluks količine topline (gustoća toka topline)
- fluks količine tvari (gustoća toka tvari)

Opća definicija gustoće toka je:

$$\Phi = \frac{X}{A \cdot t} \quad (3)$$

odnosno:

$$\Phi = \frac{\text{količina gibanja, topline ili tvari}}{\text{m}^2 \text{ s}}.$$

Ako produkt $\dot{V} \cdot X_v$ koji je sastavni dio zakona očuvanja, izrazimo po jedinici površine, dobiva se **fluks**.

$$\frac{\dot{V} \cdot X_v}{A} = \frac{\frac{V}{t} \cdot \frac{X}{V}}{A} = \frac{X}{A \cdot t}.$$

Analitički izrazi za procjenu gustoće toka temelje se na *Ohmovom zakonu* za jakost struje, međutim pri proučavanjima je potrebno uzeti u obzir i mehanizme prijenosa količine gibanja, topline i tvari.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\text{napon (pokretačka sila)}}{\text{električni otpor}}$$

U tehnološkim (jediničnim) operacijama ova se modelna jednadžba zbog neidealnosti fizičkih pojava ispravlja uvođenjem koeficijenata proporcionalnosti pa je oblik jednadžbe za gustoću toka:

$$\Phi = \kappa \frac{\Delta}{y} \quad (4)$$

gdje je:

- Δ - pokretačka sila (razlika temperatura, koncentracija ili tlakova)
- y - otpor koji se definira kao udaljenost točaka u prostoru između kojih se odvija prijenos
- κ - koeficijent prijenosa (koeficijent proporcionalnosti)
koji predstavlja fizička svojstva tvari, a bitno ovisi o *mehanizmu prijenosa*. Često se određuje eksperimentalno.

3. MEHANIZMI PRIJENOSA

Pri proučavanju fenomena prijenosa promatramo fluid u gibanju (rjeđe u mirovanju), a brzina prijenosa energije, tvari ili količine gibanja kod fluida u gibanju ovisi o prirodi gibanja fluida (slojevito ili vrtložno gibanje).

1. Molekularni mehanizam prijenosa.

Odvija se kod slojevitog gibanja fluida kada nema miješanja između slojeva, a gibanje se odvija kod malih brzina. Ovakav prijenos često se naziva statistički prijenos budući da je uzrokovan slučajnim *Brownovim* gibanjem molekula.

2. Vrtložni mehanizam prijenosa.

Ovakav mehanizam prijenosa količine gibanja, tvari i energije češći je, a odvija se kod većih brzina kretanjem grupa molekula što je prouzrokovano nekom vanjskom silom (npr. miješanje; velika razlika tlakova koja uzrokuje pokretanje fluida velikim brzinama pa dolazi do vrtloženja). Kod vrtložnog je mehanizma vrijednost fluksa mnogo veća jer su ili pokretačka sila ili koeficijent prijenosa ili obje vrijednosti mnogo veće.

Osnovni je konceptijski pristup u Prijenosu tvari i energije temeljen na analognim pojavama koje se matematički opisuju u principu uvijek u obliku jednadžbe:

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$$

uz određene modifikacije ovisno o hidrodinamičkim uvjetima i geometrijskim karakteristikama sustava.

U ovom dijelu teksta bit će predloženo kako se ta temeljna jednadžba izražava kod molekularnog i vrtložnog mehanizma prijenosa količine gibanja, prijenosa toplinske energije i prijenosa tvari. Međutim, naravno da to studentima s postojećom razinom znanja neće biti jasno sve dok ne prouče i nauče cijelo gradivo kolegija Prijenos tvari i energije. Uvidjet će da se na kraju uvijek dobiva slična (u principu ista) zakonitost, a što će biti prikazano i u zadnjem poglavlju u kojem se govori o analogiji prijenosa količine gibanja, prijenosa toplinske energije i prijenosa tvari.

3.1. Molekularni mehanizam prijenosa

Vrijednosti fluksa kod molekularnog mehanizma prijenosa mogu se općenito izraziti pomoću jednadžbe (3), odnosno na sljedeći način:

$$\text{Fluks} = \text{Transportni koeficijent} \cdot \frac{\text{Pokretačka sila}}{\text{Otpor}}$$

Transportni koeficijenti:

- kinematička difuzivnost (ν),
- temperaturna difuzivnost (α), (λ),
- masena difuzivnost (D).

Transportni koeficijenti nazivaju se još i *prijenosni koeficijenti* ili *koeficijenti prijenosa*, a ovise o prirodi tvari.

Pokretačka sila:

- razlika količine gibanja $v \cdot \rho = \frac{m \cdot v}{V} = X_v \quad [\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}]$
- razlika sadržaja topline $\rho \cdot c_p \cdot T = \frac{m \cdot c_p \cdot T}{V} = X_v \quad [\text{J m}^{-3}]$
- razlika masene koncentracije $\gamma = \frac{m}{V} = X_v \quad [\text{kg m}^{-3}]$

Otpor: udaljenos točaka između kojih se odvija prijenos.

Fluks količine gibanja

Newton:
$$\tau = -v \cdot \frac{d(v\rho)}{dy} \quad (5)$$

τ - smično naprezanje, odnosno sila po jedinici površine, N m^{-2}

v - kinematička viskoznost, $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$

y - udaljenost, m

$v\rho = \frac{m \cdot v}{V}$ - količina gibanja po jedinici volumena, $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

Fluks količine energije (topline)

Fourier:
$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dy} \quad (6)$$

Budući da se koeficijent toplinske vodljivosti može izraziti na sljedeći način:

$$\lambda = a \cdot \rho \cdot c_p \quad (7)$$

jednadžba (6) poprima oblik:

$$q = -a \cdot \frac{d(\rho c_p T)}{dy} \quad (8)$$

q - gustoća toplinskog toka, W m^{-2}

a - koeficijent temperaturne vodljivosti, $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$

c_p - specifični toplinski kapacitet, $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

$\rho c_p T$ - količina topline po jedinici volumena, $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

Fluks količine tvari

Fick:
$$n = -D \cdot \frac{d\gamma}{dy} \quad (9)$$

n - gustoća toka tvari, $\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

D - koeficijent difuzije, $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$

γ - masena koncentracija, kg m^{-3}

U jednadžbama (5), (6), (8) i (9) predznak (-) znači da se prijenos odvija u smjeru smanjenja količine gibanja, temperature ili koncentracije.

3.2. Vrtložni mehanizam prijenosa

Fluks se kod vrtložnog mehanizma prijenosa tvari može izraziti korištenjem jednadžbe (3) kao i kod molekularnog mehanizma prijenosa, međutim transportni koeficijenti ovise ne samo o prirodi tvari već dolazi do izražaja i utjecaj okoline, geometrija sustava i brzina strujanja. Kao posljedica utjecaja navedenih parametara javlja se *otpor* te se transportni koeficijent može izraziti u sljedećem obliku:

$$\text{Transportni koeficijent} = \frac{\text{Transportni koeficijent kao materijalna konstanta}}{\text{Otpor}} = \kappa'$$

$$\text{odnosno } \Phi = \kappa' \cdot \Delta \quad \text{gdje je } \kappa' = \frac{\kappa}{y}.$$

Transportni koeficijenti mogu se odrediti samo empirijski. U nekim slučajevima kada se ne mogu egzaktno odrediti određene zakonitosti u kojima se pojavljuju teško definirani koeficijenti, primjenjuje se tzv. **dimenzijska analiza**.

Fluks količine gibanja

$$\tau = f \cdot \frac{v^2 \rho - v_s^2 \rho}{2} = f \cdot \frac{v^2 \rho}{2} \quad [\text{Pa s}] \quad (10)$$

$\frac{v^2 \rho}{2}$	- dinamički tlak (kinetička energija fluida izražena po jedinici volumena)
f	- koeficijent proporcionalnosti (trenja)
v	- brzina gibanja, m s^{-1}
v_s	- brzina gibanja stijenke ($=0$), m s^{-1}

Fluks količine topline

$$q = \alpha \cdot (T - T_s) \quad [\text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (11)$$

α	- koeficijent prijelaza topline, $\text{W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$
T	- temperatura, K
T_s	- temperatura stijenke, K

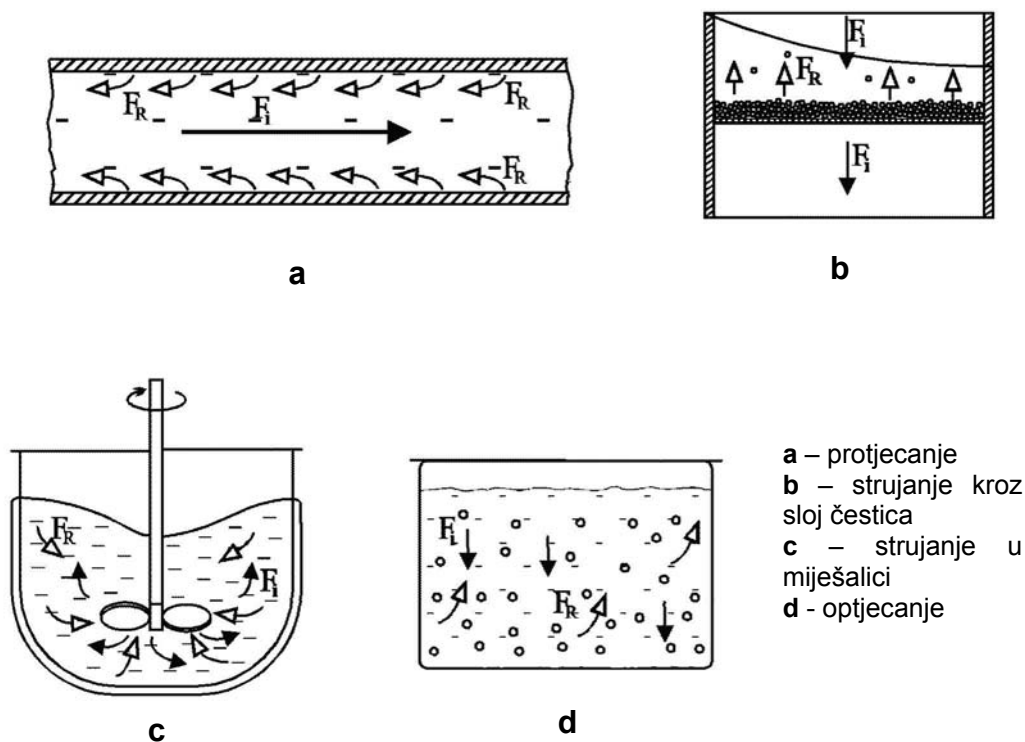
Fluks količine tvari

$$\dot{m}_A = k \cdot (\gamma - \gamma_s) \quad [\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (12)$$

- k - koeficijent prijenosa tvari, m s^{-1}
 γ - masena koncentracija, kg m^{-3}
 γ_s - masena koncentracija uz stijenku, kg m^{-3}

4. PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA

U dijelu kolegija u kojem se govori o prijenosu količine gibanja uobičajeno je razmatrati četiri karakteristična slučaja koji su prikazani na slici 4.3. Osobitost svakog procesa je da se pokretačkoj sili (F_i) suprotstavlja sila otpora (F_D ili F_R).



Slika 4.1 Karakteristični slučajevi pri proučavanju prijenosa količine gibanja

Veliki fizičar Isaac NEWTON (1642.–1727.) ukazao je na činjenicu da se silama akcije (djelovanja, poželjnoga gibanja) opiru sile reakcije (sile otpora). U mehaničkim tehnološkim operacijama to izgleda ovako:

- Fluid protječe kroz cijev ili uređaj pod djelovanjem razlika tlakova. Međutim, u tom se kretanju fluid tare o stijenke cijevi (uređaja), a trenje postoji i unutar samoga fluida (o čemu će biti govora kasnije). To je trenje uzročnik otpora protjecanju.
- Pri strujanju kroz sloj čestica npr. filtraciji, čista se tekućina probija kroz porozno platno (filar) i sloj taloga na filtru. Filtar i talog stvaraju otpor kretanju.
- Pri miješanju potrebno je miješalo okretati u nekoj tekućini (suspenziji, emulziji) određenom snagom da bi se tvar po želji izmiješala. Sama tvar pruža otpor koji je veći što je fluidna masa u posudi gušća i što je miješanje brže. Da bi se uspješno miješalo, potrebno je svladati taj otpor.
- Optjecanje ili taloženje čestica u suspenziji djelovanjem sile teže događa se to brže što je otpor taloženju manji. Međutim, ako je sredina u kojoj se događa taloženje gušća i viskozija tekućina, ono je polaganije. Opet vidimo da se otpor (ovaj put predstavljen osobitostima tekućine u kojoj se događa taloženje) suprotstavlja silama koje uzrokuju taloženje čestica.

Fizikalne osnove

U kolegiju se uglavnom razmatraju ponašanja fluida u gibanju.

Fluid je tvar koja se pod djelovanjem smičnog naprezanja, ma kako malenoga, *neprekidno deformira*.

Smično naprezanje je tangencijalna komponenta površinske sile podijeljena s mjernim brojem površine.

Neprekidna deformacija o kojoj se govori u definiciji fluida, ireverzibilna je pojava i naziva se *strujanje fluida*.

Za razliku od fluida *čvrsto (elastično) tijelo* se nakon deformiranja pod djelovanjem smičnog naprezanja (do određene granice), nakon prestanka djelovanja smičnog naprezanja vraća u prvobitni oblik.

Djelovanjem smičnog naprezanja fluid u stanju mirovanja ponaša se kao i čvrsto tijelo i svakoj promjeni tlaka odgovara promjena volumena fluida. Razlika je u kvantitativnom odnosu tih promjena, a prema veličini tih promjena fluidi se mogu svrstati u dvije grupe:

- kapljeviti fluidi ili kapljevine
- plinoviti fluidi ili plinovi

Osnovne karakteristike kapljevina: promjenom tlaka neznatno mijenjaju volumen pa se smatraju nestlačivima. Smještene u posudu koju djelomično ispunjavaju, oblikuju slobodnu površinu na granici s okolišnom atmosferom.

Osnovne karakteristike plinova: stlačivi su. Povećanjem tlaka smanjuje im se volumen. Smanjenjem tlaka šire se neograničeno te u zatvorenim posudama ispunjavaju čitav njihov volumen.

Pri proučavanju prijenosa količine gibanja, topline i tvari promatra se vanjsko ponašanje fluida, ne ulazeći u fizikalnu strukturu materije. S tog stanovišta fluid se promatra kao *neprekidna sredina* ili *kontinuum*, koji zadržava neprekidnost fizikalnih svojstava prelazeći u infinitenzimalne volumene.

Kriterij za definiranje da li se neka sredina ponaša kao kontinuum je *Knudsenov broj*:

$$Kn = \frac{\bar{l}}{L} \quad (13)$$

gdje je:

\bar{l} - srednji slobodni put gibanja molekula

L - karakteristična geometrijska dimenzija sustava koji se promatra.

Ako je $Kn \leq 0,01$ plin se ponaša kao neprekidna sredina, odnosno kontinuum. Kapljevine se uvijek smatraju neprekidnom sredinom jer ih je nemoguće toliko razrijediti da hipoteza kontinuumu nije primjenjiva.

Fizikalna svojstva fluida

GUSTOĆA se općenito definira:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Budući da je kod nestlačivih fluida gustoća konstantna vrijedi:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

U praksi se koristi i relativna gustoća koja predstavlja omjer između gustoće nekog fluida i gustoće standardnog fluida:

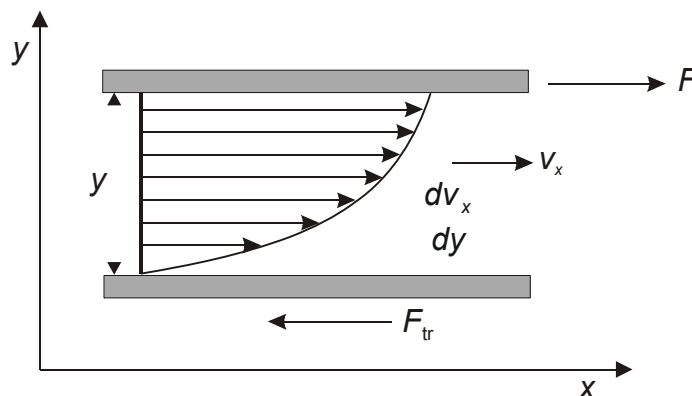
$$d = \frac{\rho}{\rho_o}$$

Kod kapljevina se kao referentna gustoća uzima gustoća vode kod 4 °C i atmosferskog tlaka $p_a = 1,013\ 25$ bara te iznosi $\rho_o(\text{H}_2\text{O}) = 999,972\ \text{kg m}^{-3}$ ($\approx 1\ 000\ \text{kg m}^{-3}$).

Kod plinova se kao gustoća standardnog fluida uzima gustoća zraka: $\rho_o(\text{zrak}) = 1,292\ \text{kg m}^{-3}$ (kod 0 °C i 1,013 25 bar) ili $\rho_o(\text{zrak}) = 1,204\ \text{kg m}^{-3}$ (kod 20 °C i 1,013 25 bar).

VISKOZNOST. Svojstvo otpornosti fluida prema smičnoj deformaciji naziva se *viskoznost*. Recipročno svojstvo fluida naziva se *fluidnost*.

Za objašnjenje svojstva viskoznosti promatrajmo gibanje kapljevine između dvije paralelne čvrste ploče. Ploče su ravne i dovoljno velike da se učinci rubova mogu zanemariti. Pretpostavimo da donja ploča miruje dok se gornja ploča, pod djelovanjem sile inercije F giba brzinom v . Zbog svojstva viskoznosti dolazi do trenja između čestica fluida i čvrste površine te ta čvrsta površina povlači za sobom prvi zamišljeni sloj, taj sloj povlači za sobom drugi itd. Donja ploča miruje, a zbog djelovanja sile trenja ($F_{tr.}$) u suprotnom smjeru nastoji zadržati fluid u stanju mirovanja. Zbog toga između te dvije ploče postoji kontinuirani niz zamišljenih slojeva čije se brzine kreću u intervalu između vrijednosti brzine gornje i donje ploče.



Slika 4.2 Newtonov zakon viskoznosti; vektorski prikaz raspodjela brzina pri gibanju fluida između dvije ravne ploče

Sila inercije potrebna da se gornja ploča giba brzinom v_x :

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy} \quad (14)$$

dok je sila trenja:

$$F_{\text{tr.}} = -\eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy} \quad (15)$$

pri čemu je S površina ploče koja je u dodiru s fluidom.

Newtonov zakon: Sila F je proporcionalna površini koja je u dodiru s fluidom, gradijentu brzine i koeficijentu proporcionalnosti.

Pri malim brzinama i vrlo malim udaljenostima ploča, umjesto $\frac{dv}{dy}$ u jednadžbi (14)

možemo pisati $\frac{v}{y}$ pa jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{v}{y} \quad (16)$$

gdje je η dinamička viskoznost, a brzina se linearno mijenja sa promjenom udaljenosti ploča. Dinamička viskoznost ima jedinicu (Pa s), međutim često se još koriste tablice u kojima su jedinice za viskoznost *Poise* (P) ili *Stokes* (St):

$$1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa s}$$

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Viskoznost fluida se izražava i kinematičkom viskoznošću.

Veza između dinamičke i kinematičke viskoznosti:

$$\eta = \nu \cdot \rho \quad (17)$$

Povišenjem temperature bitno se smanjuje viskoznost kapljevina, dok kod plinova ona raste.

Iz Newtonovog zakona viskoznosti (jednadžba 15) moguće je dobiti smično naprezanje kao omjer sile trenja i površine:

$$\tau = \frac{F_{\text{tr.}}}{S} = -\eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (18)$$

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (19)$$

Predznak (+) ili (-) ovisi o tome da li se promatra sila koja uzrokuje gibanje ili sila trenja.

Uvrštavanjem izraza za dinamičku viskoznost (jednadžba 17) u jednadžbu (19) dobijemo:

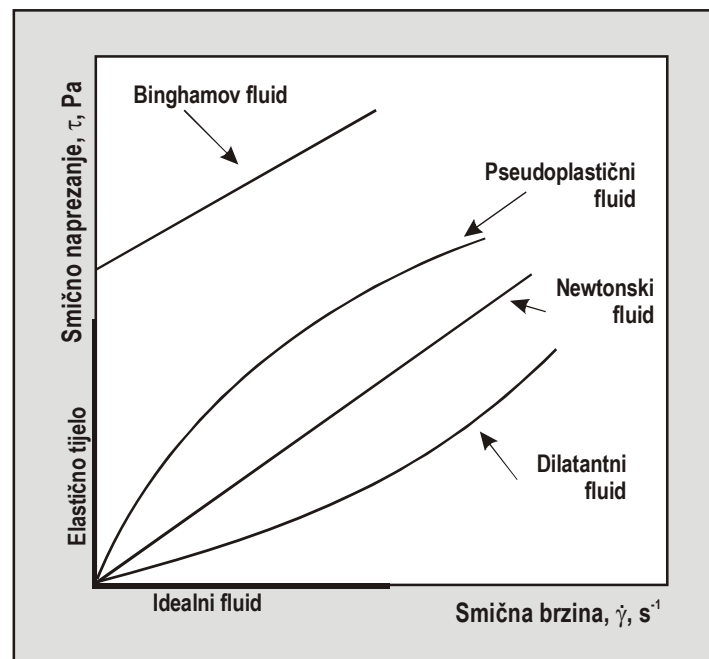
$$\tau = -\nu \cdot \frac{d(\nu\rho)}{dy} \quad (20)$$

Produkt $(v \cdot \rho)$ predstavlja količinu gibanja izraženu po jedinici volumena $\left(\frac{m}{V} \cdot v\right)$, tako da izraz (20) predstavlja fluks količine gibanja. Navedeni izraz u potpunosti odgovara općem izrazu (jednadžba 4):

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$$

gdje - kinematička viskoznost predstavlja transportni koeficijent (κ)
 - pokretačka sila je $d(v \rho)$, (Δ)
 - udaljenost između ploča, dy je otpor y

Fluidi kod kojih smično naprezanje linearno ovisi o gradijentu brzine nazivaju se **newtonski fluidi** (voda, zrak, ulje itd.). Ovisnost smičnog naprezanja o smičnoj brzini obično se za različite tipove fluida prikazuje tzv. **reološkim dijagramom**.



Slika 4.3 Reološki dijagram

1. *Elastična krutina* napregnuta je proporcionalno veličini deformacije (proporcionalna sili) i ne ovisi o brzini deformacije.
2. *Idealni fluid* je neviskozni fluid kod kojeg ne dolazi do promjene smičnog naprezanja povećanjem smične brzine.
3. *Newtonski fluidi* ponašaju se u skladu s Newtonovim zakonom viskoznosti:

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

4. *Nenewtonski fluidi* ne ponašaju se u skladu s Newtonovim zakonom viskoznosti.

- Binghamovi fluidi ne ispunjavaju uvjet fluida jer je potrebno određeno početno naprezanje prije nego tangencijalno (smično) naprezanje postane funkcija brzine deformacije (smične brzine). Dakle, to su plastične tvari koje se počinju ponašati kao fluidi tek nakon što je premašena određena vrijednost tangencijalnog naprezanja. To su npr. masti za podmazivanje, mulj otpadnih voda, glinene suspenzije itd. Ponašanje ovakvih fluida može se opisati sljedećim modelom:

$$\tau = \tau_0 + \eta_p \cdot \frac{dv}{dy} \quad (21)$$

gdje je τ_0 granica tečenja (popuštanja), a η_p plastična viskoznost.

- Ostwald de Waelle fluidi mogu se opisati potencijalnim modelom:

$$\tau = K \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)^n \quad (22)$$

gdje je K indeks konzistencije, a n indeks ponašanja toka.

Kod ovih se fluida viskoznost mijenja promjenom smične brzine pa se stoga definira prividna viskoznost

$$\eta_a = K \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)^{n-1} \quad (23)$$

Ovisno o indeksu ponašanja toka, n razlikujemo:

<u>Pseudoplastične fluide</u>	$n < 1$ i
<u>Dilatantne fluide</u>	$n > 1$.

Pseudoplastični fluidi (emulzije, smole) imaju promjenjivi tok tangencijalnog naprezanja ovisno o brzini deformacije. Tek se pri većim brzinama deformacija tok stabilizira.

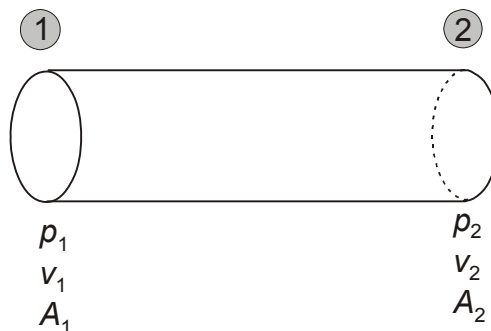
Najčešći primjer dilatantnih fluida su uljene boje i tiskarsko crnilo.

4.1. Zakoni očuvanja pri gibanju fluida

Proučavanja pojava pri prijenosu količine gibanja temelje se na zakonima očuvanja mase, količine gibanja i mehaničke energije, koji proizlaze iz općeg zakona očuvanja (Poglavlje 2.).

4.1.1. Zakon očuvanja mase

Promatrajmo neki sustav npr. određeni dio cijevi definiranog volumena koji predstavlja procesni prostor.



Opći zakon očuvanja:

$$V \cdot \frac{dX_V}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V, ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V, izl.} + V_r$$

AKUMULACIJA = ULAZ - IZLAZ + GENERACIJA

Količina X_V izražava masu jediničnog volumena (gustoća):

$$X_V = \frac{m}{V} = \rho \quad (24)$$

Uvrštenjem jednadžbe (24) u opći zakon očuvanja dobiva se:

$$V \cdot \frac{d\rho}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot \rho_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot \rho_{izl.} + V_r \quad (25)$$

Kod stacionarnih procesa vrijedi $\frac{d\rho}{dt} = 0$; nema nastajanja i nestajanja mase, dakle nema generacije ($V_r = 0$) pa iz jednadžbe (25) slijedi:

$$\dot{V}_{ul.} \cdot \rho_{ul.} = \dot{V}_{izl.} \cdot \rho_{izl.} \quad (26)$$

$$\dot{m}_{ul.} = \dot{m}_{izl.} \quad (27)$$

Jednadžba (27) vrijedi za sve fluide (kapljevine i plinove).

Promatramo li kapljevinu pri izotermnom strujanju ($T_1 = T_2$) njena je gustoća konstantna ($\rho_{ul.} = \rho_{izl.}$) te iz jednadžbe (26) proizlazi da je i volumni protok konstantan ($\dot{V}_{ul.} = \dot{V}_{izl.}$).

Volumni protok izražava se kao umnožak brzine i poprečnog presjeka cijevi:

$$\dot{V} = v_1 \cdot A_1$$

Za izotermno strujanje nekompresibilnih fluida vrijedi:

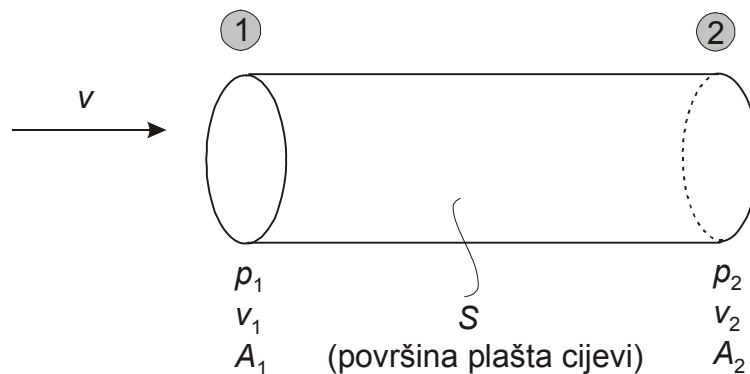
$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \dots = v_i \cdot A_i$$

iz čega je vidljivo da su brzine protjecanja obrnuto proporcionalne površinama poprečnog presjeka cijevi.

4.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja

U kemijskom se inženjerstvu promatra količina gibanja izražena po volumenu procesnog prostora:

$$X_v = \frac{\text{količina gibanja}}{\text{volumen}} = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v \quad (28)$$



Opći zakon očuvanja sada pišemo u sljedećem obliku:

$$V \cdot \frac{d(v\rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.} + V_r \quad (29)$$

Budući da kod stacionarnih procesa nema promjene količine gibanja s vremenom $\left(\frac{d(v\rho)}{dt} = 0\right)$ i uz uvjet da nema generacije ($V_r = 0$) iz jednadžbe (29) slijedi:

$$\dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} = \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.} = 0 \quad (30)$$

Može se pokazati da produkt $\dot{V} \cdot (v\rho)$ predstavlja silu:

$$\dot{V} \cdot (v\rho) = \frac{V}{t} \cdot \frac{v \cdot m}{V} = \frac{v \cdot m}{t} = F$$

iz čega slijedi da se zakon očuvanja količine gibanja može izraziti na sljedeći način:

$$\sum_{i=0}^N F_i = 0 \quad (31)$$

Karakteristične sile koje se javljaju pri gibanju fluida su sila tlaka koja uzrokuje gibanje i sila trenja:

$$F_{p_1} = F_{p_2} + F_{tr.}$$

$$p_1 \cdot A_1 = p_2 \cdot A_2 + \tau \cdot S$$

Ako se član $p_2 \cdot A_2$ prebaci na lijevu stranu gornje jednadžbe dobiva se:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S \quad (32)$$

gdje je $(\Delta p \cdot A)$ sila tlaka potrebna za gibanje fluida brzinom v , a $(\tau \cdot S)$ je sila trenja koja je uzrokovala gubitak energije koji je izražen padom tlaka (Δp) .

Dakle, zbog viskoznosti dolazi do prenošenja količine gibanja na nepokretnu površinu i zbog toga dolazi do pada tlačne sile u smjeru gibanja fluida.

4.1.3. Zakon očuvanja energije

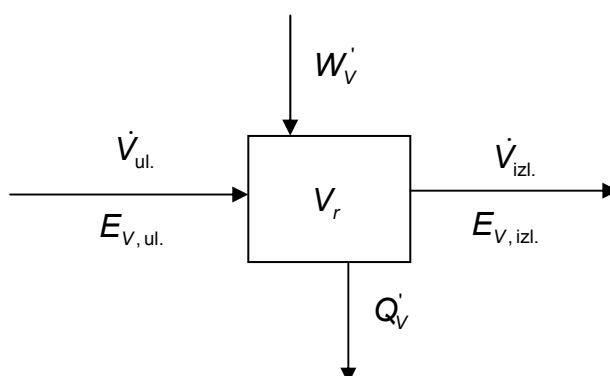
Fluid u gibanju posjeduje određenu količinu (sadržaj) energije koja se u skladu sa zakonom očuvanja izražava po jedinici volumena:

$$X_V = E_V = p + \rho \cdot c_p \cdot T + \sum \Delta H_V + \frac{1}{2} v^2 \cdot \rho + \rho \cdot g \cdot z \quad (33)$$

gdje je:

- p - tlak, energija koja je ovisna o tlaku fluida, $\text{Pa} = \text{J m}^{-3}$
- $\rho \cdot c_p \cdot T$ - toplinska energija fluida, J m^{-3}
- $\sum \Delta H_V$ - promjena entalpije vezana uz promjenu agregatnog stanja, J m^{-3}
- $\frac{1}{2} v^2 \cdot \rho$ - kinetička energija fluida, J m^{-3}
- $\rho \cdot g \cdot z$ - potencijalna energija, ovisna o mjestu u prostoru, J m^{-3}

Primjenom općeg zakona očuvanja ($X_V = E_V$)



$$V \cdot \frac{dE_V}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot E_{V, ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot E_{V, izl.} + W'_V - Q'_V \quad (34)$$

W'_V - dio dovedenog mehaničkog rada koji se pretvara u toplinu, J m^{-3}

Q'_V - odvedena toplina, J m^{-3}

U hidrodinamskom sustavu se pretpostavlja da je $W'_V = Q'_V$.

Pretpostavke:

Stacionaran proces $\frac{dE_V}{dt} = 0$

Zakon očuvanja mase $\dot{V}_{ul.} = \dot{V}_{izl.}$

Nadalje, kod izotermnog strujanja je $T_{ul.} = T_{izl.}$ iz čega slijedi da je $\rho_{ul.} = \rho_{izl.}$, odnosno $(\rho \cdot c_p \cdot T)_{ul.} = (\rho \cdot c_p \cdot T)_{izl.}$

Nema promjene agregatnog stanja: $\sum \Delta H_V = 0$

pa jednačba (33) poprima oblik:

$$E_v = \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} + \rho \cdot c_p \cdot T \quad (35)$$

Primjenom zakona očuvanja (jednadžba 34) za **neviskozni (idealni) fluid** vrijedi:

$$E_{v_{ul}} = E_{v_{izl}}$$

$$\left(\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \right)_{ul} = \left(\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \right)_{izl}$$

odnosno:

$$\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = \text{const.} \quad (36)$$

Jednadžba (36) predstavlja jednadžbu očuvanja energije, odnosno **Bernoullijevu jednadžbu** koja vrijedi za neviskozni (idealni) fluid, a koja se može iskazati riječima: *U zatvorenom (izoliranom) hidrauličkom sustavu, zbroj svih vrsta mehaničkih energija je stalan.*

Pri gibanju **realnog fluida** dolazi do nepovratnog gubitka energije zbog svojstva viskoznosti, a taj gubitak energije je u zakonu očuvanja ugrađen u generacijski član V_r .

Jednadžba (36) se za strujanje realnih (viskoznih) fluida nadopunjava s generacijskim članom:

$$\rho_1 \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \frac{v_1^2 \cdot \rho}{2} = \rho_2 \cdot g \cdot z_2 + p_2 + \frac{v_2^2 \cdot \rho}{2} + V_r \quad (37)$$

gdje je: $V_r = E_{gub} = \rho \cdot g \cdot h_w$, a h_w predstavlja gubitak energije izražen visinom stupca kapljevine.

Podijelimo li jednadžbu (37) sa gustoćom dobijemo bilancu za 1 kg mase fluida u gibanju:

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + h_w \cdot g \quad (38)$$

Nadalje, jednadžba (38) podijeljena sa g daje hidraulički smisao Bernoullijeve jednadžbe:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_w \quad (39)$$

Ovaj oblik jednadžbe praktično je koristiti kod kapljevina u kojima su energije pojedinih članova iskazane u obliku visina stupca fluida, odnosno vezane su za težinu (masu) fluida.

U jednadžbi (39):

z - *geometrijska visina* (geodetska); mjera za potencijalnu energiju položaja, m

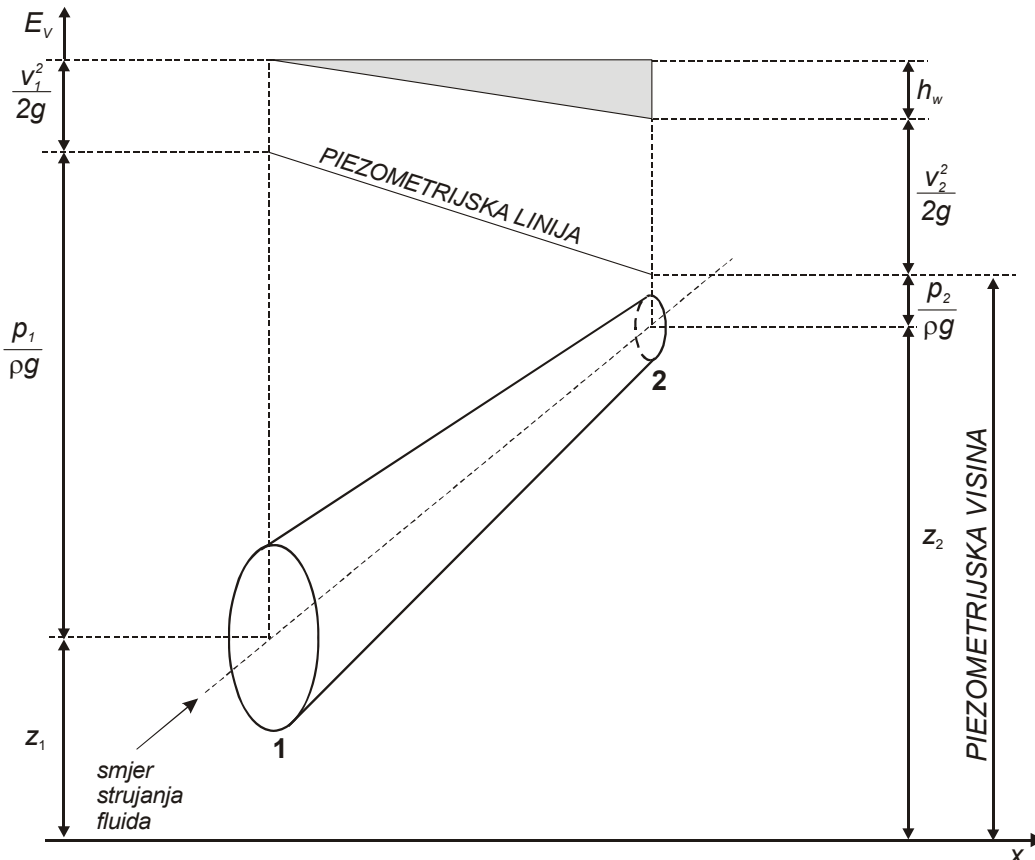
$\frac{p}{\rho \cdot g}$ - *tlačna visina*; mjera za energiju statičkog tlaka, m

$\frac{v^2}{2 \cdot g}$ - *brzinska visina*; mjera za kinetičku energiju, m

h_w - gubitak energije trenjem; mjera za gubitak energije uslijed otpora, a izražen je

$$\text{padom tlaka pri gibanju } h_w = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g}, \text{ m.}$$

Bernoullijev zakon očuvanja energije, gdje su energetske članovi izraženi odgovarajućim visinama, može se ilustrativno prikazati slikom:



Promatra se strujanje fluida od presjeka **1** do presjeka **2**. Iz slike je vidljivo da je presjek **2** na većoj visini tako da je potencijalna energija (izražena geodetskom visinom) u položaju **2** veća ($z_2 > z_1$).

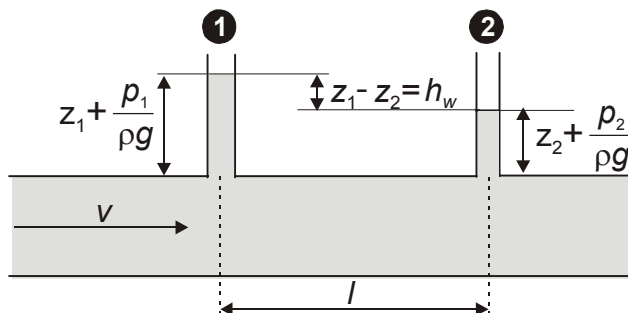
Površina poprečnog presjeka cijevi na položaju **1** je manja nego na položaju **2** te iz jednadžbe kontinuiteta slijedi da je brzina u presjeku **2** veća, tako da je i kinetička energija veća $\left(\frac{v_2^2}{2g} > \frac{v_1^2}{2g} \right)$.

Zbog svojstva viskoznosti gubi se tlačna energija u smjeru strujanja te je $p_1 > p_2$,

odnosno $\frac{p_1}{\rho \cdot g} > \frac{p_2}{\rho \cdot g}$. Ta razlika tlakova izražava gubitak energije koji je izražen gubitkom visine h_w .

Mjerenje energetskih članova Bernoullijeve jednadžbe

Suma *geodetske visine i tlačne visine* naziva se **piezometrijska visina** (zbroy potencijalne i tlačne energije izražen visinom). Piezometrijska visina mjeri se pomoću **piezometrijske cijevi**.



Slika 4.4 Mjerenje gubitka energije (pada tlaka) pomoću piezometrijskih cijevi

$\Delta h = h_w$ - izražava gubitak energije

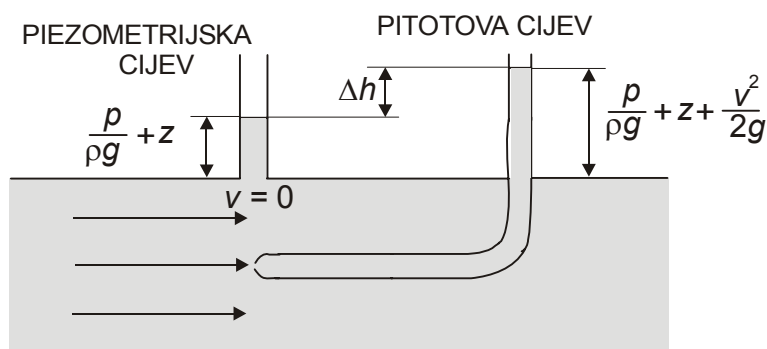
Uz pretpostavku da nema dovođenja rada između presjeka 1 i 2; presjeci su isti, $v_1 = v_2$, $A_1 = A_2$, tada je i $z_1 = z_2$ i pišemo:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_w$$

odnosno

$$h_w = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \quad (40)$$

Pitotova cijev služi za mjerenje kinetičke energije fluida.



Slika 4.5 Mjerenje brzine strujanja fluida pomoću Pitotove cijevi

$\Delta h \neq h_w$, Δh izražava kinetički tlak $\left(\frac{v^2}{2g} \right)$.

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \Delta h = z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (41)$$

Budući da se energetske članovi mjere na istom presjeku $z + \frac{p}{\rho g} = \text{konst.}$, odnosno $h_w = 0$, razlika razina manometarske kapljevine (Δh) izražava kinetičku energiju fluida:

$$\Delta h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (42)$$

te konačno:

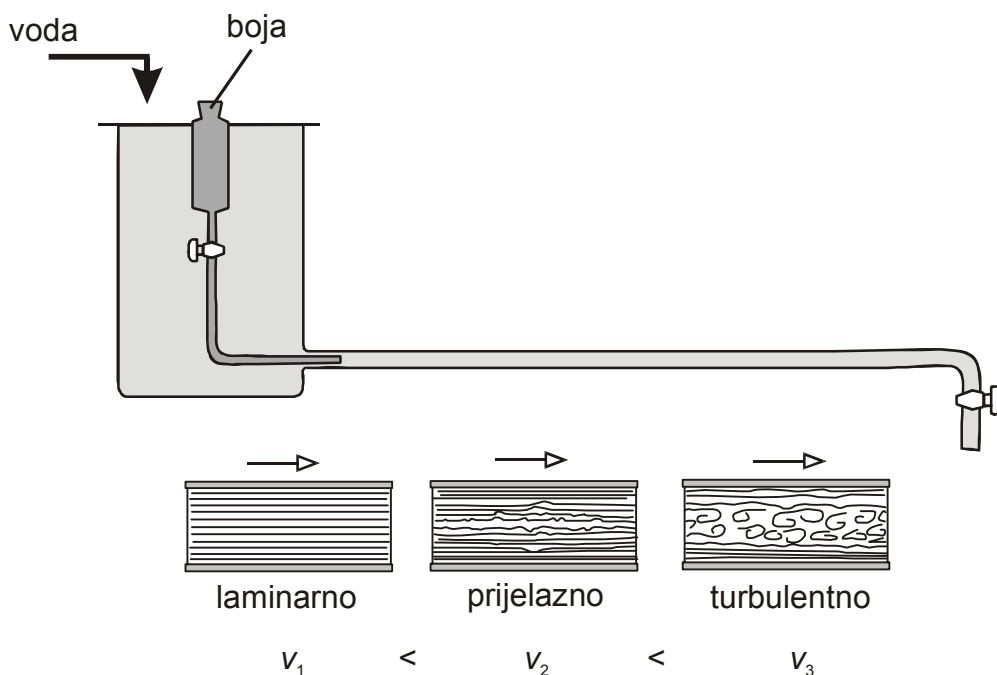
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \quad (43)$$

4.2. Protjecanje

Protjecanje je strujanje fluida kroz cijev, kanal, i općenito strujanje fluida između čvrstih površina različitih geometrijskih karakteristika.

4.2.1. Vrste strujanja

Osborne Reynolds još je koncem prošlog stoljeća istraživao pojave pri strujanju pomoću jednostavnog i praktičnog uređaja. Iz spremnika u kojem se održava konstantna razina kapljevine, istječe voda u ravnu cijev. Na ulazu u cijev ugrađena je u sredini tanka kapilara kroz koju se pušta tanku mlaz obojene kapljevine.



Slika 4.6 Reynoldsov pokus; prikaz promjene slike strujnica s povećanjem brzine strujanja kapljevine

Kod vrlo malih brzina uočeno je da se obojena kapljevina ne miješa između slojeva, već da struji u sredini toka u obliku niti pa se zaključuje da se čestice fluida gibaju pravocrtno i da nema miješanja između slojeva. To je tzv. **slojevito** ili **laminarno strujanje**.

Povećanjem brzine strujanja dolazi do djelomičnog remećenja slojevitog strujanja te obojena tekućina struji u obliku krivudave linije. Takvo stanje strujanja naziva se **prijelazno područje**.

Kod još većih brzina strujanja, poprečni presjek cijevi je jednolično obojen što znači da je došlo do potpunog miješanja slojeva, došlo je do pojave vrtloženja i to se gibanje naziva **vrtložno** ili **turbulentno strujanje**.

Reynolds je na temelju svojih eksperimenata zaključio da brzina gibanja nije jedini faktor koji utječe na vrstu strujanja već da je potrebno uzeti u obzir još i fizikalna svojstva tekućine, gustoću i viskoznost te promjer cijevi. Kriterij koji uzima u obzir ove veličine, a na temelju kojeg se definira vrsta strujanja je **Reynoldsova značajka** ili **Reynoldsov broj** koji se definira na sljedeći način:

$$Re = \frac{vd \rho}{\eta} \quad (44)$$

ili

$$Re = \frac{vd}{\nu} \quad (45)$$

Eksperimentalno je utvrđeno da kritična vrijednost **Reynoldsovog broja** koja predstavlja granicu između laminarnog i prijelaznog područja pri strujanju kroz glatku cijev iznosi $Re_{kr} = 2320$. Postoje ekstremni slučajevi, npr. tanka glatka kapilara $Re \approx 50\,000$, a strujanje je još uvijek laminarno ili npr. izrazito hrapava površina cijevi gdje je i kod $Re < 2320$ strujanje turbulentno.

4.2.2. Laminarno strujanje

Proučavat će se strujanje u horizontalnoj cijevi.

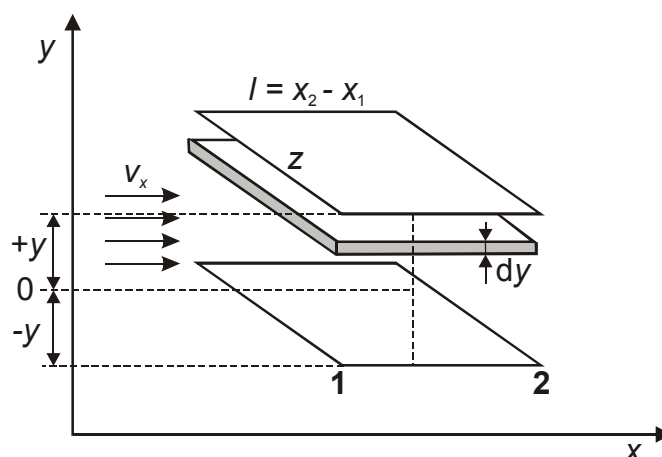
Laminarno strujanje je, kako je navedeno ranije, *slojevito* strujanje, strujnice ne mijenjaju smjer te nema miješanja između slojeva.

Prijenos količine gibanja uzrokovan je isključivo površinskim trenjem. Količina gibanja se prenosi s fluida na nepokretnu površinu molekularnim mehanizmom što ima za posljedicu *gubitak energije* koji se izražava *padom tlaka*.

Kod analize laminarnog gibanja važno je utvrditi koja se količina gibanja prenosi na nepokretnu površinu, odnosno utvrditi *fluks* i utvrditi kakva je raspodjela brzina. Raspodjela brzina neće biti ista ako fluid struji između dvije paralelne ploče, između dvije koncentrične cijevi ili kroz okruglu cijev.

4.2.2.1. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju između dvije paralelne ploče

Promatrajmo strujanje fluida između dvije ravne ploče definiranih dimenzija koje su udaljene za $2y$.



Prema zakonu očuvanja količine gibanja slijedi da je suma sila koje djeluju u sustavu jednaka nuli:

$$V \cdot \frac{d(\rho v)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (\rho v_x)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (\rho v_x)_{izl.} + \sum F_x \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

Karakteristične sile koje djeluju u sustavu su sila tlaka koja uzrokuje gibanje i sila trenja koja se opire tome.

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

Površina A predstavlja površinu poprečnog presjeka između dvije ploče ($A = 2y \cdot z$), a površina S predstavlja površinu koja je u dodiru s fluidom ($S = 2z \cdot l$).

$$\Delta p \cdot 2 \cdot y \cdot z = \tau \cdot 2 \cdot z \cdot l \quad (47)$$

Podijelimo li jednadžbu (47) sa $(2 \cdot z)$ dobijemo:

$$\tau = \frac{\Delta p}{l} \cdot y \quad (48)$$

Ako je $y = 0$ iz jednadžbe (48) slijedi da je $\tau = 0$ što znači da je najmanji otpor strujanju u osi tako da je tu brzina najveća ($v_{max.}$). Ako je pak $y = \frac{d}{2}$ tada je smično naprezanje maksimalno ($\tau_{max.}$) te je brzina strujanja prvog zamišljenog sloja uz ploču jednaka nuli (pretpostavlja se da nema pojave klizanja).

Odnos između maksimalne i srednje brzine strujanja

Uvrstimo li izraz (19) koji predstavlja Newtonov zakon viskoznosti, u jednadžbu (48) dobijemo:

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot y \quad (49)$$

iz čega integriranjem slijedi raspodjela brzina:

$$\int_0^{v_x} dv_x = -\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^y y \cdot dy$$

$$v_x = -\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{d^2}{8} \right)$$

$$v_x = \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{1}{2\eta} \cdot \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

Pad tlaka po dužini, izražava se gradijentom tlaka koji ima negativan predznak budući da tlak opada s dužinom:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} = \frac{p_1 - p_2}{-(x_2 - x_1)} = \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

te slijedi:

$$v_x = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{1}{2\eta} \cdot \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \quad (50)$$

U osi strujanja $y = 0$ te iz jednadžbe (50) slijedi da je maksimalna brzina:

$$v_x = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{1}{8\eta} \cdot d^2 \quad (51)$$

Kako je po definiciji protoka:

$$\dot{V} = v_{sr.} \cdot A = v_{sr.} \cdot d \cdot z \quad (52)$$

a diferencijalni protok $v_x \cdot z \cdot dy$, integriranjem diferencijalnog protoka po cijelom poprečnom presjeku dobiva se:

$$v_{sr.} \cdot d \cdot z = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} v_x \cdot z \cdot dy$$

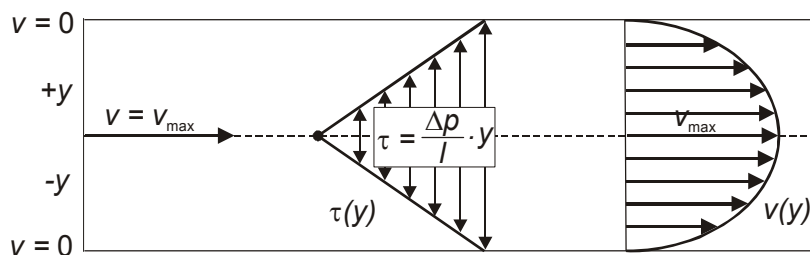
$$v_{sr.} \cdot d = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{1}{2\eta} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \cdot dy$$

odnosno izraz za srednju brzinu strujanja:

$$v_{sr.} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{1}{12\eta} \cdot d^2 \quad (53)$$

te slijedi da je odnos između maksimalne i srednje brzine strujanja:

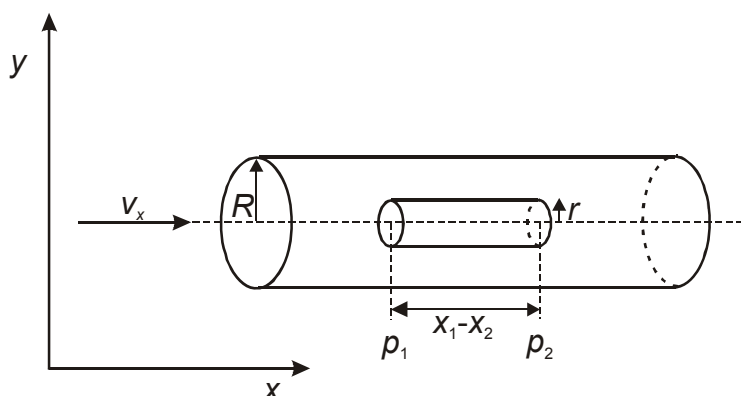
$$\boxed{\frac{v_{max.}}{v_{sr.}} = \frac{3}{2}}$$



Slika 4.7 Vektorski prikaz raspodjele smičnog naprezanja i brzine strujanja u ovisnosti o udaljenosti od površine ploče

4.2.2.2. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju u horizontalnoj cijevi

Promatra se laminarno strujanje fluida kroz ravnu cijev promjera R u stacionarnim uvjetima.



Za analizu gibanja laminarnog stacionarnog toka polazna je osnova zakon očuvanja količine gibanja.

$$V \cdot \frac{d(v\rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (\rho v_x)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (\rho v_x)_{izl.} + \sum F_x$$

Stacionarno strujanje podrazumijeva $\frac{d(v\rho)}{dt} = 0$ tako da se član na lijevoj strani jednadžbe gubi.

Budući da nema generiranja količine gibanja u sustavu ($V_r = 0$), iz zakona očuvanja slijedi da su sve sile koje djeluju u sustavu u ravnoteži, odnosno: $\sum F_x = 0$.

Postavljanjem bilance karakterističnih sila u sustavu dobiva se:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

sila koja uzrokuje gibanje (pokretačka sila) = sila trenja (sila otpora)

$$r^2 \cdot \pi \cdot p_1 - r^2 \cdot \pi \cdot p_2 = \tau \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (54)$$

Granični uvjeti:

os cijevi $(r = 0), \tau = 0, v_x = v_{\max.}$

stijenka cijevi $(r = R), \tau = \tau_{\max.}, v_x = 0$

Izjednačavanjem Newtonovog zakona viskoznosti $\left(\tau = -\eta \cdot \frac{dv}{dr} \right)$ s jednažbom (54)

dobijemo:

$$-\eta \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (55)$$

Integriranjem jednažbe (55):

$$\int_0^{v_x(r)} dv = -\frac{1}{2\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \int_{-R}^r r \cdot dr$$

dobijemo:

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot (R^2 - r^2) \quad (56)$$

ili

$$v_x(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (57)$$

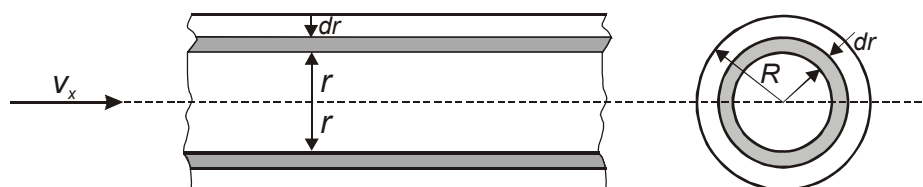
Za $r = 0$ iz jednažbe (57) slijedi da je u sredini cijevi maksimalna brzina strujanja:

$$v_{\max.} = \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \quad (58)$$

Budući da je za proračune važna srednja brzina strujanja fluida, potrebno ju je definirati. Polazna osnova je izraz za protok:

$$\dot{V} = v_{\text{sr.}} \cdot A = v_{\text{sr.}} \cdot R^2 \cdot \pi \quad (59)$$

Protok se može definirati i analiziranjem gibanja dijelica fluida lokalnom brzinom $v_x(r)$.



Analizom gornje slike slijedi da se protok može pisati kao:

$$\dot{V} = \int_0^R 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot v_x(r)$$

te uvrštenjem izraza za lokalnu brzinu:

$$\dot{V} = \int_0^R 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot (R^2 - r^2) = \frac{R^2 \cdot \pi}{8 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

Izjednačavanjem gornje jednadžbe s jednadžbom (59)

$$v_{sr.} \cdot R^2 \cdot \pi = \frac{R^2 \cdot \pi}{8 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

dobijemo izraz za srednju brzinu strujanja u horizontalnoj cijevi:

$$v_{sr.} = \frac{1}{8\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot R^2 \quad (60)$$

te konačno odnos između maksimalne i srednje brzine strujanja:

$$\frac{v_{max.}}{v_{sr.}} = 2$$

Poznavanje ovog odnosa je od izuzetnog značaja za mjerenje srednje brzine strujanja iz koje se određuje i protok. Npr. pri mjerenju brzine pomoću Pitotove cijevi mjeri se brzina u osi cijevi koja predstavlja maksimalnu brzinu strujanja iz koje se može izračunati srednja brzina.

4.2.2.3. Gubitak energije pri laminarnom strujanju u horizontalnoj cijevi

Pri strujanju fluida dolazi do nepovratnog gubitka energije, a gubitak energije izražen je padom tlaka.

Sređivanjem izraza (60) dobijemo:

$$-\int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{sr.}}{R^2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx$$

i integriranjem slijedi:

$$p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{sr.}}{R^2} \cdot (x_2 - x_1) \quad (61)$$

Zbog praktičnosti se uvodi:

$(x_2 - x_1) = l$ - dužina cijevi

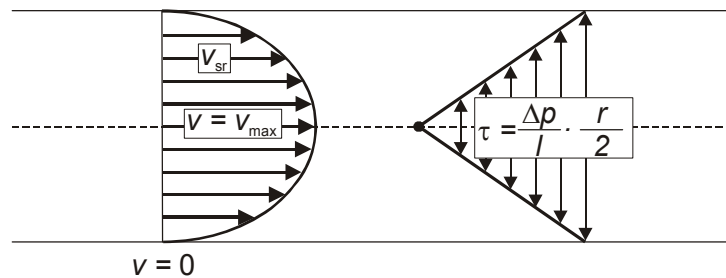
$(p_1 - p_2) = \Delta p$ - pad tlaka u cijevi

$$R = \frac{d}{2} \quad R^2 = \frac{d^2}{4}$$

pa iz jednadžbe (61) slijedi **Hagen-Poiseuilleova** jednadžba za pad tlaka:

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot v_{sr.}}{d^2} \quad (62)$$

Na slici 4.8. prikazana je raspodjela brzina i smičnog naprezanja po presjeku cijevi na temelju koje se jasno vidi da je u osi cijevi maksimalna brzina protjecanja, a smično naprezanje jednako je nuli, dok je uz stijenku cijevi obrnut slučaj.



Slika 4.8 Vektorski prikaz brzina i smičnog naprezanja u ovisnosti o položaju u cijevi

Iz Hagen-Poiseuilleove jednadžbe jasno je izražen utjecaj viskoznosti (η) u cijelom toku. To znači da se pri laminarnom strujanju količina gibanja prenosi samo molekularnim mehanizmom, odnosno da do gubitka energije dolazi isključivo zbog viskoznog trenja između samih čestica fluida i čestica fluida i stijenke.

4.2.3. Turbulentno strujanje

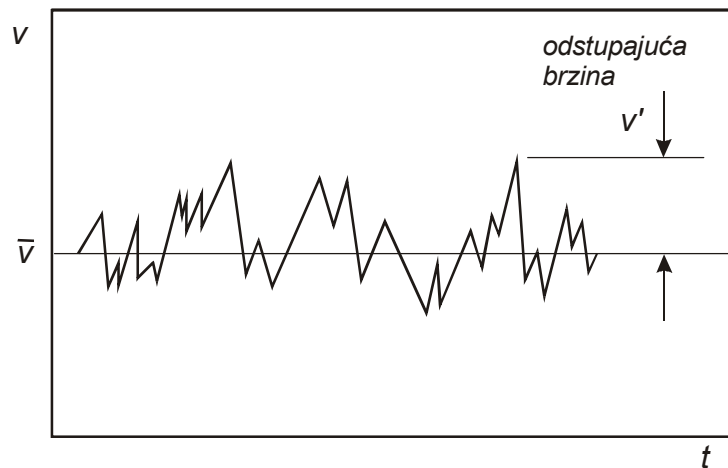
Slika 4.6. (Reynoldsov pokus) pokazuje transformaciju laminarnog strujanja u turbulentno. Dakle, turbulentno područje ostvareno je kod većih brzina strujanja kada se postigne neka kritična vrijednost Reynoldsovog broja ($Re_{kr.} = 2 \cdot 10^3$). Karakteristika turbulentnog strujanja su nepravilne putanje čestica fluida, te osim komponente brzine u smjeru osnovnog toka, prisutne su i bočne komponente.

Prema *Hinzeu* turbulentno gibanje je neravnomjerno stanje strujanja u kojem parametri strujanja podliježu slučajnim promjenama u vremenu i prostoru, pri čemu se statističkim metodama ovi parametri mogu osrednjiti.

Prema *Tayloru* i *von Karmanu* do turbulencije dolazi uslijed uspostavljanja određenog gradijenta brzine koji nastaje zbog:

- prisustva nepokretnog čvrstog tijela u strujnom polju (*zidna turbulencija*)
- uspostavljanja gradijenta brzine u slobodnom toku (*slobodna turbulencija*)

Pri turbulentnom strujanju se uvodi pojam **vremenski osrednjeno turbulentno strujanje**. To je matematički model strujanja u kojemu su strujnice pravilne linije. Raspodjela osrednjenih brzina je slična kao u laminarnom području, ali je profil vremenskih brzina bitno različit od profila brzina laminarnog strujanja. Reynoldsov pokus pokazao je da je osnovna karakteristika turbulentnog strujanja neravnomjerno pulzacijsko gibanje čestica.



Odstupanje brzine od srednje brzine strujanja u jednoj točki ukazuje na nestacionarnost turbulentnog strujanja.

Ako je vrijeme dovoljno veliko u odnosu na vrijeme trajanja jednog impulsa tada je srednja brzina mjerodavna veličina. Srednja vrijednost komponente brzine (\bar{v}) je konstantna dok trenutne vrijednosti brzine (v') fluktuiraju oko srednje vrijednosti.

Trenutna brzina može se izraziti kao funkcija srednje brzine:

$$v(t) = \bar{v}(x, y, z) + v'(x, y, z, t)$$

gdje je vrijednost srednje brzine u točki (x, y, z) definirana integralom:

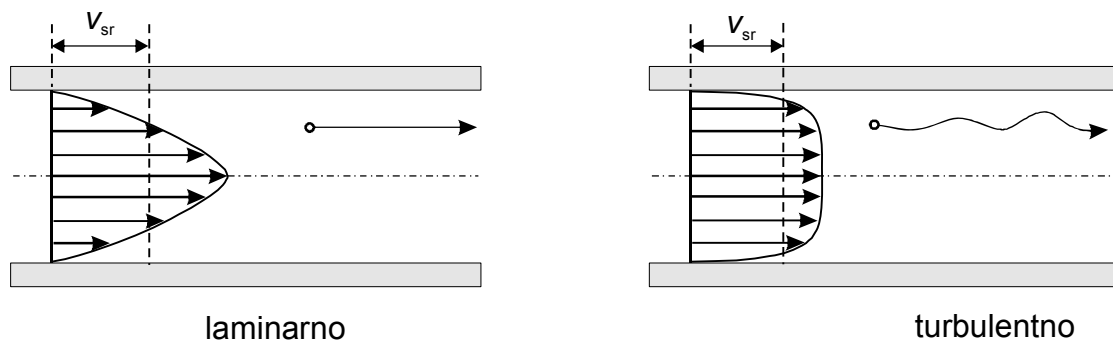
$$\bar{v} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v'(x, y, z, t) dt \quad (63)$$

pri čemu vrijednost t mora biti velika u odnosu na vrijeme trajanja jednog impulsa.

Srednja vrijednost odstupajućih brzina jednaka je nuli:

$$v' = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v'(x, y, z, t) dt = 0 \quad (64)$$

U stvarnom turbulentnom strujanju strujnice fluktuirajućeg gibanja presijecaju strujnice tog kvazi uređenog, osrednjenog strujanja i time se iz sloja u sloj fluida prenosi količina gibanja, topline, tvari i ostale karakteristične veličine. Za razliku od *laminarnog strujanja*, u kojem također postoji prijenos tih veličina iz sloja u sloj ali u mikroskopskim razmjerima jer su nosioci tog prijenosa molekule, pri *turbulentnom strujanju* nosioci tog prijenosa su “grozdovi” čestica fluida (grupe molekula) pa je i miješanje odvija u makroskopskim razmjerima.



Slika 4.9 Prikaz kvazistacionarnog vremenski osrednjenog strujanja

Laminarno: $v_{sr.} = \frac{v_{max.}}{2}$

Turbulentno: $v_{sr.} = (0,7 - 0,9) \cdot v_{max.}$

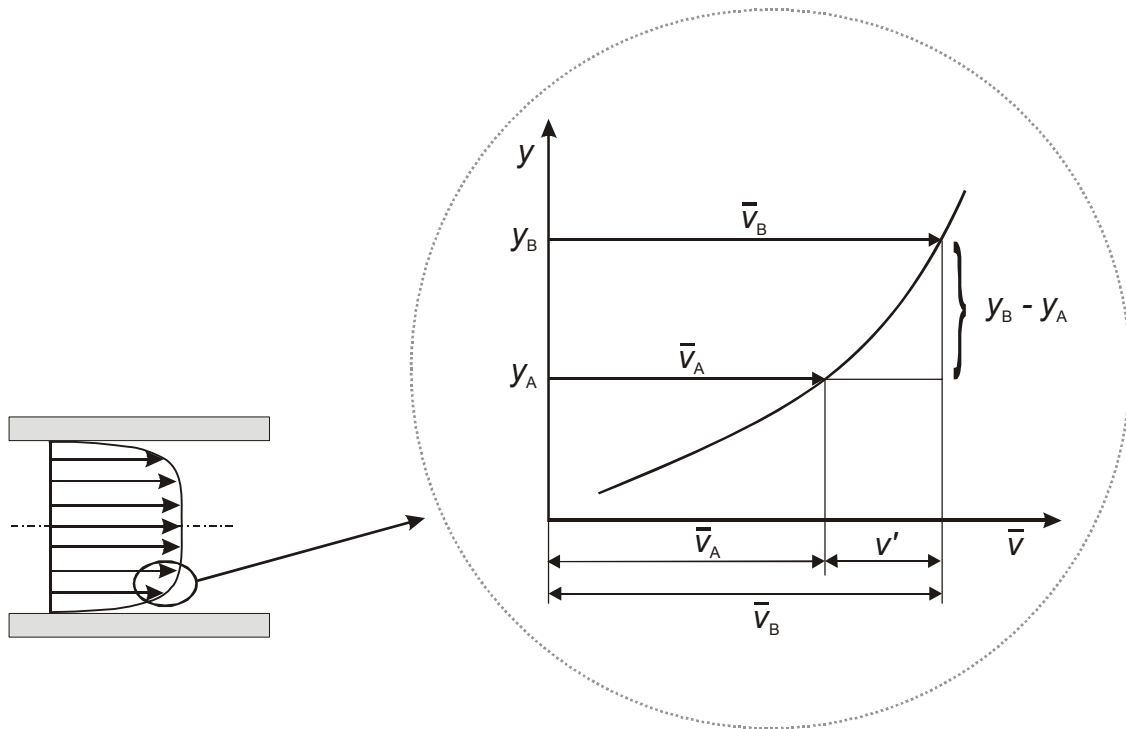
Empirijski izraz za raspodjelu brzina pri turbulentnom strujanju:

$$v = v_{max.} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \quad n = 6 - 10$$

Strujanje se naziva kvazistacionarno jer je ono nestacionarno ako $t \rightarrow 0$, a ako je t dovoljno velik u odnosu na vrijeme trajanja jednog impulsa, zbog velikog broja impulsa srednja brzina strujanja je konstantna za određeni radijus ovojnice.

Teorija o turbulentnom tečenju nije egzaktno riješena pa se u praksi koriste empirijske jednadžbe.

Za objašnjenje turbulentne razmjene količine gibanja potrebno je ući u dublju analizu turbulentnog gibanja.



Iz slike se može izvesti da je:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dv} = \frac{y_B - y_A}{v'}$$

a odstupajuća brzina:

$$v' = \frac{dv}{dy} \cdot (y_B - y_A) \quad (65)$$

te:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \frac{dv}{dy} \cdot (y_B - y_A) = \bar{v}_A + v' \quad (66)$$

Promatrajmo u nekom dvodimenzionalnom strujnom polju s uspostavljenim gradijentom brzine u y smjeru, jedan makroskopski dijelić fluida na položaju y_A sa

srednjom brzinom \bar{v}_A . Sve dok ovaj dijelić fluida ima brzinu \bar{v}_A , on se ponaša kao i okolina. Pretpostavimo da je taj dijelić izložen impulsu čime mu se trenutno povećava brzina na $\bar{v}_A + v'$. U tom trenutku nastaje vrtlog jer će se taj dijelić (sada vrtlog) razlikovati od svoje neposredne okoline. Daljnje gibanje nastalog vrtloga brzinom $\bar{v}_A + v'$ u toj sredini bilo bi popraćeno intenzivnom energetskom disipacijom (nepovratnim gubitkom energije). Zbog toga se zbog suviška energije vrtlog pomiče u područje većih brzina, područje koje ima istu brzinu (položaj y_B) te se više ne razlikuje od okoline.

Udaljenost od sloja iz kojeg je dijelić fluida (konačni volumen) pošao do sloja u kojem se odigralo miješanje naziva se **Prandtlov put miješanja** ($y_B - y_A = l'$).

Za objašnjenje fizikalnog smisla Prandtlovog puta miješanja potrebno je postaviti analogiju s definicijom *molekularne difuzivnosti* (kinematičke viskoznosti) koja se može definirati jednadžbom:

$$\nu = \bar{l} \cdot \bar{c} \quad (67)$$

gdje je \bar{l} srednji put molekula, a \bar{c} srednja brzina gibanja molekula.

Analogno se može definirati i pojam *turbulentne difuzivnosti*, dakle kao produkt odstupajuće brzine i Prandtlovog puta miješanja:

$$\nu_T = l' \cdot v' \quad (68)$$

Prandtl je pretpostavio da je l' proporcionalno udaljenosti od stijenke:

$$l' = k \cdot y$$

gdje je k bezdimenzijska konstanta koja se određuje eksperimentalno. Prema Nikuradseu $k = 0,36 - 0,42$.

Budući da je, bez obzira na vrijednost Reynoldsove značajke, uvijek prisutan molekularni mehanizam prijenosa količine gibanja, ukupni fluks količine gibanja zbroj je dva fluksa količine gibanja:

- Fluks količine gibanja u laminarnom području definiran je Newtonovim izrazom:

$$\tau_{\text{LAM}} = -\eta \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} = -\nu \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} \quad (69)$$

gdje je η dinamička viskoznost, a ν kinematička viskoznost (molekularna difuzivnost).

U laminarnom strujanju otpor je isključivo posljedica viskoznog trenja.

- Analogno laminarnom području, fluks količine gibanja u turbulentnom području može se pisati kao:

$$\tau_{\text{TURB}} = -\eta_T \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} = -\nu_T \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} \quad (70)$$

gdje je η_T turbulentna dinamička viskoznost, a ν_T turbulentna kinematička viskoznost (turbulentna difuzivnost) koja se razlikuje od kinematičke viskoznosti u laminarnom području jer se čestice gibaju i u smjeru osi y .

Zbrajanjem jednadžbi (69) i (70) dobije se ukupni fluks količine gibanja:

$$\tau_{\text{UK}} = \tau_{\text{LAM}} + \tau_{\text{TURB}} = -(\nu + \nu_T) \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} \quad (71)$$

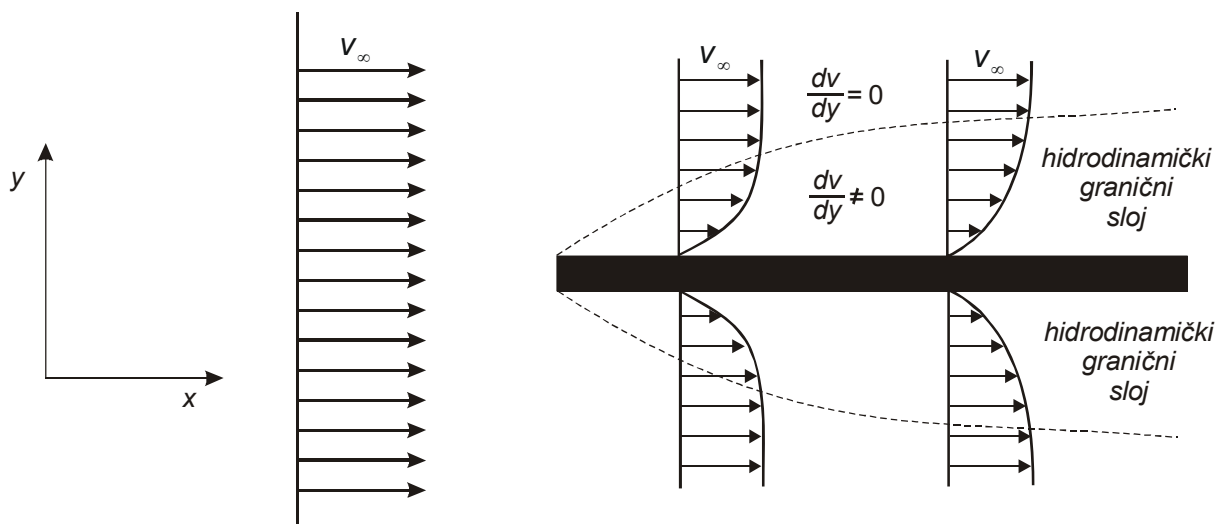
Turbulentni doprinos ukupnom fluksu količine gibanja u razvijenom turbulentnom području višestruko je veći od laminarnog doprinosa. Molekularni mehanizam prijenosa uvijek je prisutan, a kod visokih vrijednosti Reynoldsa, prisutan je samo u tankom sloju fluida neposredno uz stijenku, a koji se naziva hidrodinamički granični sloj.

4.2.3.1. Teorija graničnog sloja

Teoriju graničnog sloja postavio je *Ludwig Prandtl* još 1904. godine, a koja je i danas temelj objašnjenja svih pojava prijenosa količine gibanja, topline i tvari.

Pri strujanju viskoznog fluida uz nepokretnu čvrstu površinu zbog svojstva viskoznosti dolazi do pojave kočenja susjednih slojeva fluida. Kod turbulentnog strujanja (kod visokih vrijednosti Reynoldsove značajke) utjecaj kočenja osjetit će se samo na određeni broj zamišljenih slojeva u blizini stijenke, dok se u ostalom dijelu fluida na određenoj udaljenosti od nepokretne površine taj utjecaj ne osjeća i u tom dijelu fluid struji turbulentno.

Najjednostavniji slučaj za razmatranje je strujanje preko ravne ploče.



Brzina v_∞ je brzina strujanja fluida na koju se ne osjeća utjecaj čvrste stijenke (brzina nesmetanog toka fluida).

Dio fluida u kojem se, zbog svojstva viskoznosti fluida, osjeća utjecaj nepokretne površine (na taj način da postoji gradijent brzine $\frac{dv}{dy}$) naziva se

hidrodinamički granični sloj. Svojom postojanjem hidrodinamički granični sloj utječe na prijenos tvari, topline i količine gibanja pružajući otpor pa se zbog toga uvijek nastoji proces voditi u takvim uvjetima da je njegova debljina što manja.

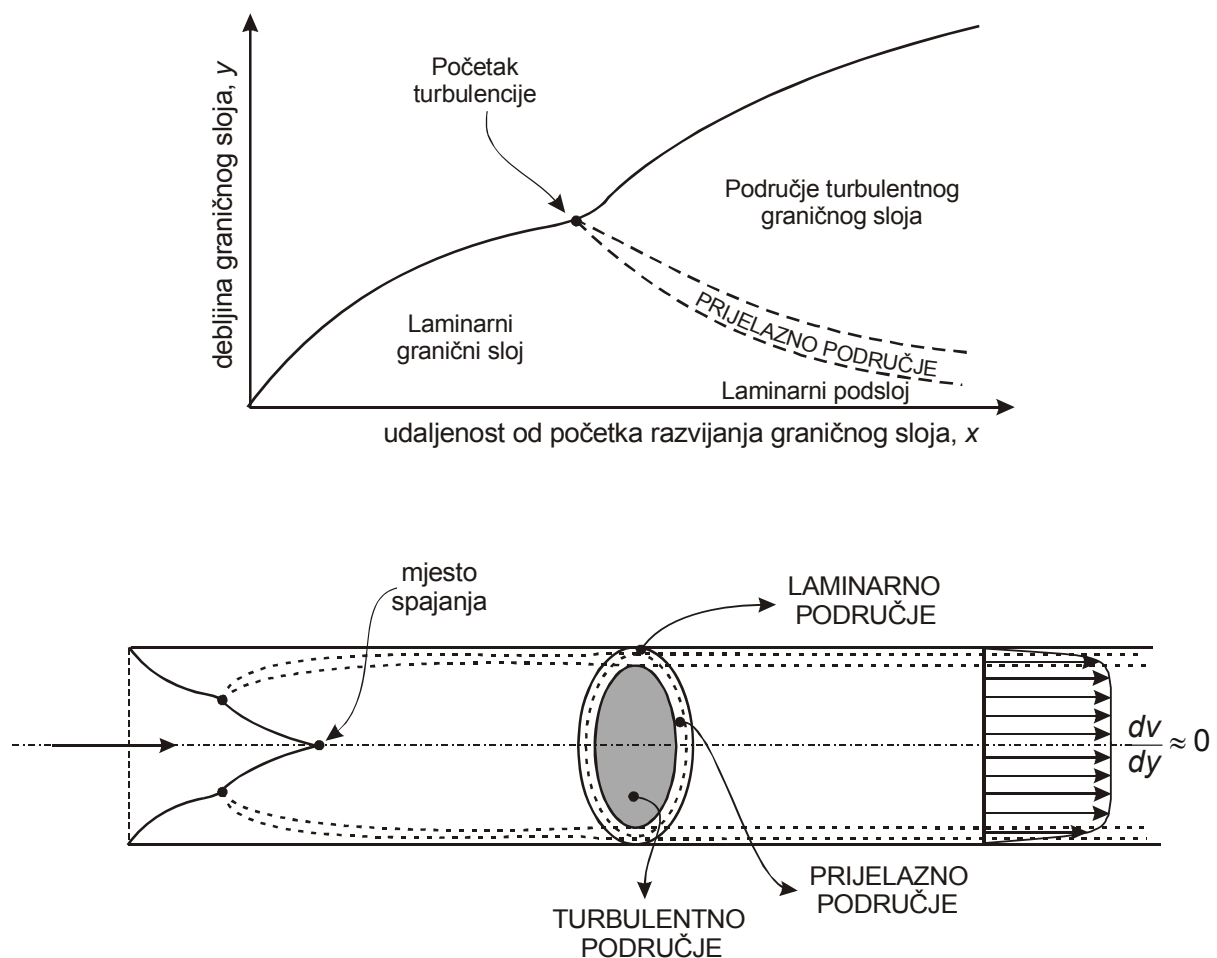
Brzina sloja neposredno uz nepokretnu površinu, uz uvjet da nema klizanja, jednaka je nuli i povećava se s udaljenošću od površine te asimptotski približava brzini nesmetanog toka, v_∞ .

Dakle, Prandtl je podijelio gibanje fluida u dva područja:

- područje u kojem se osjeća utjecaj čvrste površine na tok fluida
- područje u kojem se ne osjeća utjecaj čvrste površine na tok fluida

Granični sloj je vrlo tanak i unutar njega je, zbog svojstva viskoznosti, smično naprezanje vrlo veliko tako da je i gradijent brzine izrazito velik. Iznad graničnog sloja fluid se može smatrati praktički neviskoznim, gradijent brzine je mali pa je i smično naprezanje koje je posljedica viskoznosti, vrlo malo što rezultira približno jednakim brzinama unutar tog područja $\left(\frac{dv}{dy} \approx 0\right)$.

Prandtl je svojim proučavanjima došao do spoznaje da struktura graničnog sloja nije tako jednostavna već da se on na nekoj udaljenosti od početka razvoja dijeli u tri područja.



Slika 4.10 Razvoj hidrodinamičkog graničnog sloja do razvijenog, ustaljenog toka fluida u ravnoj cijevi.

U potpuno razvijenom turbulentnom toku egzistira tzv. *laminarni podsloj*. To je područje fluida na koji se osjeća utjecaj čvrste površine zbog svojstva viskoznosti, a nalazi se tik uz čvrstu površinu.

Mjesto početka turbulencije (udaljenost od početnog ruba x) može se definirati modificiranim Reynoldsovim brojem (Re_x):

$$Re_x = \frac{v \cdot x \cdot \rho}{\eta} \quad (72)$$

Vrijednost Re_x ukazuje na hidrodinamičke uvjete strujanja za određeni položaj u smjeru strujanja x , tako da se može smatrati lokalnom Reynoldsovom značajkom.

Za ravnu ploču vrijedi:

$Re_x < 2 \cdot 10^5$ laminarni granični sloj

$2 \cdot 10^5 < Re_x < 3 \cdot 10^6$ prijelazno

$Re_x > 3 \cdot 10^6$ turbulentni granični sloj

Blasius je rješavanjem niza diferencijalnih jednadžbi i predložio izraze za određivanje debljine hidrodinamičkog graničnog sloja za ravnu ploču.

Za laminarno područje:

$$\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \quad k = 4,64 \quad (73)$$

Za turbulentno područje:

$$\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad k = 0,376 \quad (74)$$

Utjecaj hidrodinamičkih uvjeta izražen sa Re_x općenito se može izraziti:

$$\delta_H \approx \frac{1}{Re_x^m}$$

što znači da se debljina hidrodinamičkog graničnog sloja smanjuje povećanjem Reynoldsove značajke.

4.2.3.2. Univerzalna raspodjela brzina pri turbulentnom gibanju

Pri visokim vrijednostima Reynoldsove značajke, laminarni fluks količine gibanja može se zanemariti budući da je višestruko manji od turbulentnog doprinosa:

$$\tau_{UK} = \tau_{TURB} = \nu_T \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} = \nu_T \cdot \rho \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} = \tau_0 \quad (75)$$

Jednadžbu (75) ne bi smjeli primjeniti za turbulentno područje u neposrednoj blizini stijenke, međutim budući da je debljina graničnog sloja jako mala (laminarni doprinos fluksu količine gibanja je stoga također vrlo mali) može se uzeti da je uz stijenku $\tau_{TURB} = \tau_0$ čime se ne čini veća pogreška.

Uvrštavanjem jednadžbe (65) u jednadžbu (68) dobijemo:

$$\nu_T = l'^2 \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} \quad (76)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (75) daje:

$$\tau = l'^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2 \quad (77)$$

Iz jednadžbe (77) slijedi:

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}{l'} \quad (78)$$

Budući da je $l' = k \cdot y$ jednadžba (78) može se pisati u obliku:

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}{k \cdot y} \quad (79)$$

gdje je $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ - brzina trenja (brzina tangencijalnog naprezanja).

Ovdje se ne može govoriti o brzini u klasičnom smislu, međutim dimenzijski taj izraz daje (m s^{-1}), tako da to na neki način predstavlja prividnu brzinu.

Integriranjem jednadžbe (79) uz $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \omega^*$ dobijemo:

$$\bar{v} = \frac{\omega^*}{k} \ln y + c \quad (80)$$

Konstanta integriranja (c) iz jednadžbe (80) određuje se iz graničnih uvjeta.

Jednadžba (80) može se pisati i u obliku:

$$\frac{\bar{v}}{\omega^*} = \frac{1}{k} \ln y + c \quad (81)$$

gdje je član $\frac{\bar{v}}{\omega^*}$ bezdimenzijska brzina i označava se sa v^+ .

Osim bezdimenzijske brzine uvodi se i parametar položaja, odnosno bezdimenzijska udaljenost:

$$y^+ = \frac{\omega^* \cdot y}{\nu} \quad (82)$$

iz čega slijedi da je udaljenost:

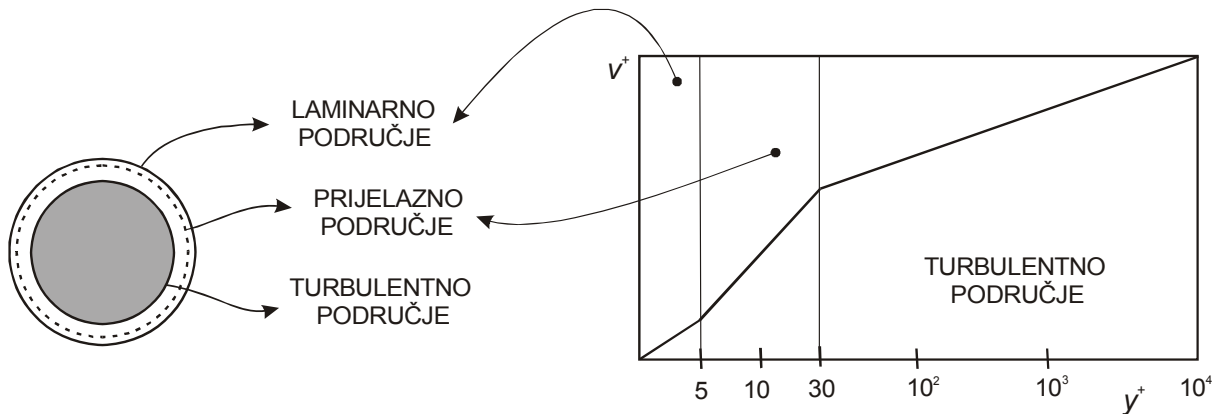
$$y = \frac{\nu \cdot y^+}{\omega^*} \quad (83)$$

Uvrštavanjem bezdimenzijske brzine i jednadžbe (83) u jednadžbu (81) dobijemo:

$$v^+ = \frac{1}{k} \ln \frac{\nu \cdot y^+}{\omega^*} + c$$

što sređivanjem daje izraz za *univerzalnu raspodjelu brzina* kod turbulentnog strujanja:

$$v^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + c_1 \quad (84)$$



Slika 4.11 Prikaz univerzalne raspodjele brzine u razvijenom toku

Za glatku cijev vrijedi (Nikuradse):

- laminarno: $0 < y^+ \leq 5$ $v^+ = y^+$
- prijelazno: $5 < y^+ \leq 30$ $v^+ = 5 \cdot \ln y^+ - 3,05$
- turbulentno $y^+ > 30$ $v^+ = 2,5 \cdot \ln y^+ + 5,5$

To su poluempirijske jednačbe kojima su koeficijenti eksperimentalno dobiveni. Ove jednačbe daju mogućnost određivanja brzine u bilo kojoj točki presjeka kroz koji turbulentno protječe kapljevina.

4.2.3.3. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev kružnog presjeka

Procjena gubitka energije, koji se izražava padom tlaka, kod turbulentnog strujanja vrlo je složena zbog kompleksne slike strujnica, zbog prisutnosti graničnog sloja i zbog laminarnog i turbulentnog doprinosa fluksu količine gibanja.

Iako su eksperimentalno utvrđene varijable koje utječu na pad tlaka, nije poznata diferencijalna jednačba koja opisuje pojavu prijenosa količine gibanja. Ukoliko nije poznata diferencijalna jednačba koja opisuje ponašanje sustava, ali su poznate sve varijable koje bi tvorile tu jednačbu moguće je izvesti **kriterije sličnosti** iz predodređenog broja poznatih varijabli koristeći se metodom **dimenzijske analize**.

Dimenzijska analiza je matematička metoda koja omogućuje da ponašanje nekog fizikalnog sustava izrazimo pomoću smanjenog broja varijabli. Ona ne daje egzaktnu funkciju nego skup bezdimenzijskih značajki u obliku tzv. **bezdimenzijskih**, odnosno **korelacijskih jednačbi**.

PRINCIP SLIČNOSTI

Princip sličnosti bazira se na saznanju da se pod sličnim uvjetima moraju javiti i slične posljedice. Ako su dva fizikalna sustava slična, može se iz poznavanja jednog predvidjeti ponašanje drugoga. Materijalni objekti i fizikalni sustavi mogu se okarakterizirati sa tri kvalitete: *oblik*, *veličina* i *sastav*. Ove tri varijable nezavisne su jedna o drugoj.

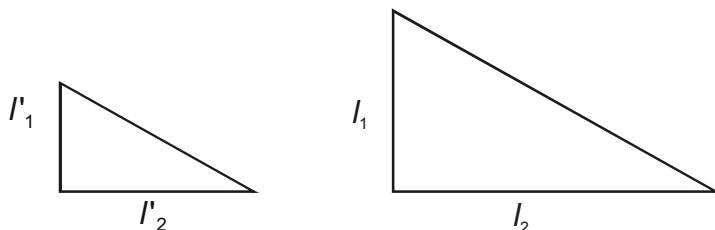
Princip sličnosti odnosi se na oblik. Pod pojmom oblika kemijski inženjer ne podrazumijeva samo *geometrijski oblik* nego i *sliku strujnica*, *sliku temperaturnog polja* i *sliku koncentracijskog polja*.

Dakle, u kemijskom inženjerstvu su važne četiri sličnosti:

- *geometrijska*
- *mehanička*
- *termička*
- *koncentracijska (kemijska)*

Svaka od ovih sličnosti, i to ovako poredanih, pretpostavlja one iznad nje same. Npr. dva će sustava biti termički slična ako su geometrijski slična, a ako se nalaze u gibanjima moraju biti i mehanički slična.

• **Geometrijska sličnost**



Dva su sustava geometrijski slična, ako za svaku točku u jednom sustavu postoji odgovarajuća točka u drugom sustavu.

Sličnost može biti izražena odnosom karakterističnih veličina. Iz gornje slike slijedi da su dva trokuta slična ako je zadovoljen sljedeći uvjet:

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = a_l = l_+ = \text{konstanta sličnosti}$$

Odnos tih karakterističnih veličina koje definiraju sustav, a ne mogu se više razdijeliti (konačne su) naziva se **simpleks**.

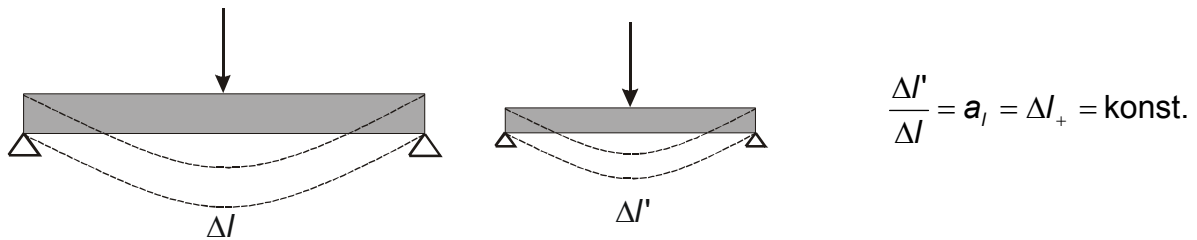
• **Mehanička sličnost**

Kada govorimo o mehaničkoj sličnosti podrazumijevamo:

- statičku,
- kinematičku
- ili dinamičku sličnost.

Statička sličnost

Geometrijski slična tijela su i statički slična kad su pod konstantnim tlakom njihove relativne deformacije takove da tijela ostaju geometrijski slična.

Kinematička sličnost

Geometrijski slični sustavi u gibanju su kinematički slični kad odgovarajuće točke prelaze geometrijski slične puteve u odgovarajućim vremenskim intervalima.

$$\frac{v'}{v} = a_v$$

Dinamička sličnost

Geometrijski slični sustavi u gibanju su i dinamički slični kad su odnosi odgovarajućih sila u odgovarajućim točkama dvaju sustava u stalnom odnosu.

U prijenosu količine gibanja primjenjuje se dinamička sličnost. Dinamička sličnost podrazumijeva postavljanje odnosa između *inercijske sile* (F_i) koja uzrokuje gibanje i neke sile koja se javlja u sustavu, dakle koja je karakteristična za određenu prijenosnu pojavu.

Npr. pri gibanju viskoznog fluida u cijevi kao sila otpora javlja se sila trenja (F_{tr}), dakle viskozno trenje, te se postavlja odnos između sile inercije i sile trenja.

$$\frac{F_i}{F_{tr}} = \frac{m \cdot a}{\tau \cdot S} = \frac{\rho \cdot l^3 \cdot \frac{v^2}{l}}{\eta \cdot \frac{v}{l} \cdot l^2} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta} \quad (85)$$

$$Re = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta} \quad (86)$$

Jednadžba (86) predstavlja Reynoldsovu značajku koja je bezdimenzijski kriterij sličnosti. Linearna dimenzija l definira mjerodavnu geometrijsku karakteristiku sustava (npr. kod strujanja u cijevi to je promjer cijevi d).

Pri definiranju odvih odnosa bitno je baratati s konačnim, a ne s diferencijalnim veličinama. Isto tako numeričke konstante (npr. π , 2) ulaze u vrijednost značajke.

Reynoldsova značajka može se definirati i na temelju odnosa fluksa količine gibanja i laminarnog doprinosa fluksu količine gibanja:

$$Re = \frac{\tau_{uk}}{\tau_L} = \frac{f \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}}{\eta \cdot \frac{v}{l}} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta}$$

Za cijev vrijedi već spomenuti izraz za Reynoldsovu značajku (jednadžba 44):

$$Re = \frac{v d \rho}{\eta}$$

Vrijednost Reynoldsove značajke ukazuje na dominirajući mehanizam prijenosa.

Odnos sile inercije i sile gravitacije izražava se *Froudeovom značajkom*:

$$Fr = \frac{F_i}{F_g} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{\frac{v^2}{l}}{g} = \frac{v^2}{l \cdot g} = \frac{v^2}{d \cdot g}$$

Pri strujanju realnog fluida dolazi do gubitka energije koji se izražava padom tlaka. Dakle, na temelju dinamičke sličnosti vrijedi:

$$\frac{F_i}{F_p} = \frac{m \cdot a}{p \cdot A} = \frac{\rho \cdot l^3 \cdot \frac{v^2}{l}}{p \cdot l^2} = \frac{\rho \cdot v^2}{p} \quad (87)$$

Pri izražavanju gubitka energije uobičajeno je koristiti *Eulerovu značajku*:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} \quad (88)$$

Eulerova značajka mjera je za količinu izgubljene energije pri strujanju viskoznog fluida.

• Termička sličnost

Geometrijski slični sustavi su i termički slični ako su odgovarajuće temperaturne razlike u konstantnom odnosu, a ako su sustavi u gibanju moraju biti i kinematički, odnosno dinamički slični.

$$\frac{\Delta T'}{\Delta T} = a_T = \Delta T_+ = \text{konst.}$$

• Koncentracijska (kemijska) sličnost

Geometrijski i termički slični sustavi su kemijski slični ako koncentracijske razlike među geometrijski odgovarajućim točkama u oba sustava stoje u konstantnom odnosu. Ako su sustavi u gibanju, moraju biti i dinamički slični.

$$\frac{\Delta c'}{\Delta c} = a_c$$

DIMENZIJSKA ANALIZA

Dimenzijska analiza matematička je metoda koja omogućuje da se dobiju informacije o obliku funkcionalne ovisnosti među veličinama u fizičkim sustavima za koje, zbog njihove složenosti, ne postoje egzaktna rješenja. Međutim, moguće je odrediti uvjete fizičke sličnosti među zbivanjima te tako i zakone modeliranja i prenošenja rezultata iz eksperimenata na veliko mjerilo tehničke izvedbe. Smisao je dimenzijske analize da se iz predodređenog broja varijabli (koje utječu na odvijanje procesa) izvede korelacijska jednadžba koja povezuje bezdimenzijske značajke i simplekse. Pri tome je nužan eksperiment.

Tri su osnovne metode provedbe dimenzijske analize:

- Buckinghamova metoda (π teorem)
- Rayleighova metoda
- Metoda sustavnog kušanja

Napomena: U ovom kolegiju dane su samo osnovne provedbe dimenzijske analize. Opširan prikaz se može naći u raznoj literaturi (npr. Tehnička enciklopedija).

Buckinghamov teorem ili π - teorem osnovni je teorem dimenzijske analize i sadrži svu njenu bit. Osnovni je princip metode da se svaka dimenzijski homogena funkcija od n dimenzijskih varijabli može svesti na zavisnost $(n - r)$ bezdimenzijskih produkata potencija (bezdimenzijskih grupa) pri čemu je r maksimalni broj dimenzijskih varijabli koje međusobno ne mogu tvoriti bezdimenzijsku grupu, odnosno r je minimalni broj varijabli čijim se jedinicama mogu izraziti jedinice svih n varijabli. Na taj se način pojednostavljuje izvođenje korelacija između karakterističnih varijabli.

Npr. ako je $n = 7$, a $r = 3$ tvori se korelacija između $n - r = 7 - 3 = 4$ bezdimenzijske grupe.

Dimenzijska homogenost kod dimenzijske analize podrazumijeva da svi članovi jednadžbe moraju tvoriti iste dimenzije na obje strane jednadžbe.

Npr.:

$$F = m \cdot a$$

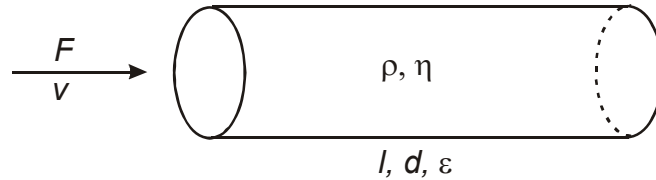
$$[ML T^{-2}] = [M] \cdot [L T^{-2}] = [ML T^{-2}]$$

gdje je

$[M]$	- masa
$[L]$	- duljina
$[T]$	- vrijeme

Rayleighova metoda

Provedbu ove metode promotrit ćemo na primjeru strujanja kroz cijev. Eksperimentalnim je istraživanjima utvrđena ovisnost narinute sila, odnosno sile koja uzrokuje gibanje fluida definiranih svojstava, brzinom v , kroz cijev određenih geometrijskih karakteristika.



Utvrđeno je da narinuta sila, odnosno sila otpora ovisi o nizu varijabli:

$$F = f(v, \rho, \eta, d, l/d, \varepsilon/d)$$

gdje su l/d i ε/d simpleksi.

Broj dimenzijskih varijabli: $n = 5$ (F, v, ρ, η, d)

Broj dimenzijskih varijabli koje ne mogu međusobno dati bezdimenzijsku grupu: $r = 3$ (M, L, T)

[M] - masa [L] - duljina [T] - vrijeme

Budući da navedene varijable i simpleksi utječu na vrijednost sile, postavlja se jednačba:

$$F = k \cdot v^a \cdot \rho^b \cdot \eta^c \cdot d^e \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (89)$$

Izraženo dimenzijama:

$$[MLT^{-2}] = [LT^{-1}]^a \cdot [ML^{-3}]^b \cdot [ML^{-1}T^{-1}]^c \cdot [L]^e \quad (90)$$

(konstanta k i simpleksi ne ulaze u dimenzijsku jednačbu).

Izjednačavanjem eksponenata na istovrsnim dimenzijama, iz jednačbe (90) slijede tri jednačbe sa četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} M: & 1 = b + c \\ L: & 1 = a - 3b - c + e \\ T: & -2 = -a - c \end{aligned}$$

Budući da se u sve tri jednačbe pojavljuje nepoznanica "c" svi eksponenti izražavaju se preko ove nepoznanice:

$$\begin{aligned} b &= 1 - c \\ a &= 2 - c \\ e &= 2 - c \end{aligned}$$

Uvrštavanjem eksponenata izraženih preko nepoznanice "c" u jednačbu (89) dobijemo:

$$F = k \cdot v^{2-c} \cdot \rho^{1-c} \cdot \eta^c \cdot d^{2-c} \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (91)$$

Grupiranjem varijabli istog eksponenta dobijemo:

$$\frac{F}{v^2 \cdot \rho \cdot d^2} = k \cdot \left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho}\right)^c \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (92)$$

U jednačbi (92) eksponent "f" je određen eksperimentalno i ima vrijednost jedan što znači da je ovisnost sile o simpleksu l/d linearna.

Nadalje, $\frac{F}{d^2} = \tau = \Delta p$, (d^2 izražava površinu, tako da sila po površini predstavlja smično naprezanje, odnosno pad tlaka), a $\left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho}\right)^c = \left(\frac{1}{Re}\right)^c$ pa se jednačba (92) može pisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = k \cdot \left(\frac{1}{Re}\right)^c \cdot \left(\frac{l}{d}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (93)$$

odnosno:

$$\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{l}{d} \quad (94)$$

Izjednačavanjem jednačbe (94) i jednačbe (88) dobijemo:

$$Eu = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{l}{d} \quad (95)$$

Jednačba (95) predstavlja bezdimenzijsku korelacijsku jednačbu koja ukazuje na utjecaj hidrodinamičkih uvjeta i geometrijskih karakteristika na gubitak energije pri protjecanju. Pokazalo se da broj bezdimenzijskih značajki stvarno odgovara: $n - r = 5 - 3 = 2$ (Eulerova i Reynoldsova značajka).

Funkcionalna ovisnost $f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)$ izražava se faktorom trenja ξ , a izražava utjecaj viskoznih sila i geometrijskih karakteristika pri strujanju fluida.

Dogovorno je, umjesto ξ , uvedeno $\frac{\xi}{2}$ tako da se $\frac{1}{2}$ poveže sa $v^2 \rho$ te se na taj način dobiva kinetička energija izražena po jedinici volumena (jednačba 97).

$$f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right) = \frac{\xi}{2} \quad (96)$$

Jednačba (94) prelazi u oblik:

$$\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = \frac{\xi}{2} \cdot \frac{l}{d}$$

odnosno:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (97)$$

Jednačba (97) omogućava procjenu pada tlaka pri strujanju kroz cijev, a naziva se **Darcy-Weissbachova jednačba**.

Ovisnost faktora trenja o Reynoldsovoj značajci

Kod laminarnog strujanja vrijede oba zakona, Hagen-Poiseuilleov (jednačba 62) i Darcy-Weissbachov (jednačba 97). Izjednačavanjem tih izraza dobiva se:

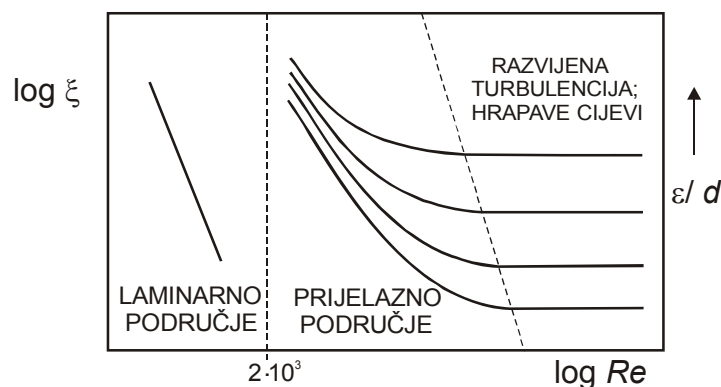
$$\frac{32 \eta l v_{sr}}{d^2} = \xi \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho$$

Kraćenjem i sređivanjem dobije se:

$$\xi = 64 \frac{\eta}{v_{sr} \rho d}$$

$$\xi = \frac{64}{Re} \quad (98)$$

Jednadžba (98) vrijedi za laminarno područje.



Slika 4.12 MOODYJEV DIJAGRAM – ovisnost faktora trenja o Reynoldsovoj značajci i relativnoj hrapavosti

Laminarno područje

$$\xi = f(Re)$$

Prilikom laminarnog strujanja fluida faktor trenja ovisi samo o Reynoldsovoj značajci i može se primjeniti jednadžba (98). Površina cijevi prekrivena je zamišljenim slojem fluida koji praktički miruje, a čija je debljina dovoljno velika da prekriva površinu cijevi, pa nema utjecaja relativne hrapavosti $\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$. Zbog toga relativna hrapavost površine

cijevi nema utjecaja na gubitak energije, odnosno gubitak energije je isključivo posljedica viskoznog trenja. Količina gibanja se prenosi na čvrstu površinu isključivo molekularnim mehanizmom, a analitički izraz za fluks količine gibanja je:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dy} \quad \text{odnosno} \quad \tau = -\nu \frac{d(v\rho)}{dy}.$$

Turbulentno i prijelazno područje

$$\xi = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

Kod većih brzina dolazi do formiranja graničnog sloja koji se smanjuje povećanjem brzine i udaljenošću, što je izraženo lokalnom Reynoldsovom značajkom (Re_x) (jednadžba 74). Ukoliko je debljina graničnog sloja takva da hrapava površina nije u potpunosti prekrivena laminarnim podslojem, dolazi do izražaja i oblik, odnosno faktor trenja ovisi i o relativnoj hrapavosti $\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$. Čestice koje se gibaju vrtložnim

mehanizmom mogu doći u kontakt s površinom toka pa se pored mehanizma molekularnog prijenosa količine gibanja javlja i prijenos količine gibanja uzrokovan otporom oblika. Molekularni mehanizam prijenosa prisutan je samo u laminarnom podsloju.

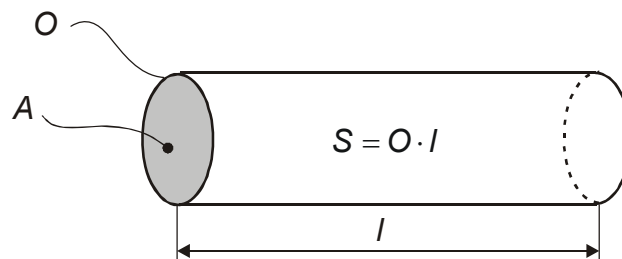
Izrazito turbulentno područje i izrazito hrapave cijevi

$$\xi = f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \quad (\text{visoke vrijednosti } Re\text{-značajke i izrazito hrapave cijevi})$$

Debljina laminarnog podsloja je u odnosu na apsolutnu hrapavost zanemariva tako da faktor trenja ovisi samo o relativnoj hrapavosti cijevi.

4.2.3.4. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev koja nije kružnog presjeka

Dimenzijskom analizom dobivena je Darcy-Weissbachova jednačba koja omogućava procjenu pada tlaka pri strujanju fluida u cijevi kružnog presjeka. Problem se javlja kada cijevi nisu kružnog presjeka, što znači da je potrebno definirati d .



Bilanca količine gibanja:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

Promotrimo li gornju sliku vidljivo je da se površina plašta (S) može definirati na sljedeći način:

$$S = O \cdot l$$

gdje je O nakvašeni opseg ili nakvašeni perimetar, a l dužina cijevi pa slijedi:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot O \cdot l \quad (99)$$

odnosno:

$$\frac{A}{O} = \frac{\tau \cdot l}{\Delta p} \quad (100)$$

Promatramo li cijev kružnog presjeka jednačbu (99) možemo pisati na sljedeći način:

$$\Delta p \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \tau \cdot d \pi \cdot l \quad (101)$$

iz čega slijedi:

$$\frac{d}{4} = \frac{\tau \cdot l}{\Delta p} \quad (102)$$

Izjednačavanjem jednadžbe (100) i jednadžbe (102) dobijemo izraz za *ekvivalentni promjer* koji se definira kao omjer između četiri površine poprečnog presjeka cijevi kroz nakvašeni opseg:

$$d_{\text{ekv.}} = 4 \cdot \frac{A}{O} \quad (103)$$

Uvrstimo li ovu jednadžbu u jednadžbu (97) dobijemo izraz za procjenu pada tlaka pri strujanju fluida kroz cijev koja nema kružni presjek:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{l}{d_{\text{ekv.}}} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (104)$$

Vrijednost *Re*-značajke definira se na sljedeći način:

$$Re = \frac{v d_{\text{ekv.}} \rho}{\eta}$$

4.2.4. Protjecanje kroz cjevovod

U procesnoj industriji (i u svakodnevnom životu) transport fluida odvija se kroz cjevovod koji se sastoji od ravne cijevi i ugrađenih armaturnih dijelova (ventili, koljena, mjerni instrumenti, suženja, proširenja itd.), a koji uzrokuju dodatni gubitak energije. Konstrukcija armaturnih dijelova je takova da uzrokuje naglu promjenu smjera strujanja i vrtloženje (prisutan je otpor oblika) što uzrokuje gubitak kinetičke energije.

Ukupni gubitak energije (pad tlaka) može se izraziti kao suma:

$$\Delta p_{\text{UK}} = \Delta p_{\text{RC}} + \Delta p_{\text{A}} \quad (105)$$

gdje je Δp_{RC} pad tlaka zbog protjecanja kroz ravne cijevi, a Δp_{A} je pad tlaka zbog protjecanja kroz armaturne dijelove.

Pad tlaka pri protjecanju kroz ravne cijevi definiran je jednadžbom (97):

$$\Delta p_{\text{RC}} = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

Budući da je kod armature nemoguće definirati promjer, duljinu i faktor trenja, uvodi se faktor mjesnog otpora (ζ), a izraz za pad tlaka armaturnih dijelova poprima sljedeći oblik:

$$\Delta p_{\text{A}} = \zeta \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (106)$$

v - brzina s kojom fluid nastrujava na mjesni otpor.

Iz toga slijedi da je izraz za ukupni pad tlaka kroz cjevovod:

$$\Delta p_{\text{UK}} = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

što se može pisati kao:

$$\Delta p_{\text{UK}} = \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left(\xi \cdot \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \quad (107)$$

Izjednačavanjem Darcy-Weissbachove jednadžbe i jednadžbe (106):

$$\xi \cdot \frac{l}{d} = \zeta$$

slijedi:

$$l_{\text{ekv.}} = \zeta \cdot \frac{d}{\xi} \quad (108)$$

gdje je $l_{\text{ekv.}}$ zamišljena duljina ravne cijevi promjera d koja bi pružala isti otpor kao i odgovarajući armaturni dio.

Jednadžba (107) sada se može pisati i u obliku:

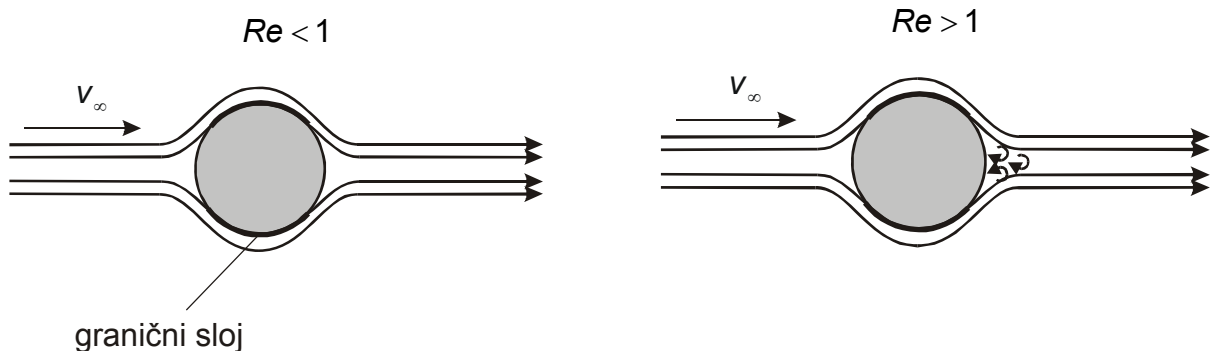
$$\Delta p_{\text{UK}} = \xi \cdot \frac{l + l_{\text{ekv.}}}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (109)$$

4.3. Optjecanje

Optjecanje je strujanje fluida oko čvrstog tijela. Pojave se praktički ne razlikuju ako je tijelo uronjeno i nepokretno u struji fluida ili se ono giba u mirujućem fluidu, bitno je da postoji relativna brzina između tijela i fluida. U oba slučaja se u viskoznom fluidu pojavljuje sila otpora koja je posljedica viskoznog trenja i otpora oblika.

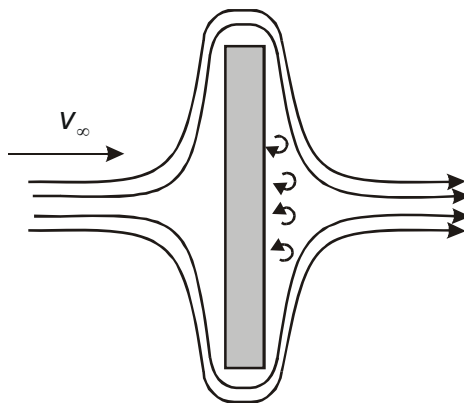
Postoje dva granična slučaja:

- Isti oblik, različite brzine strujanja (Re) $Re = \frac{v d_{\text{č}} \rho}{\eta}$



- Ista brzina strujanja (Re), različit oblik





Kod malih Reynoldsa i pogodnog oblika dominira viskozno trenje, međutim uvijek je prisutan i otpor oblika budući da čestice fluida direktno nastrujavaju na čvrsto tijelo. Takvo strujanje naziva se puzeće strujanje (fluid "puzi" uz površinu tijela).

Kod velikih Reynoldsa i nepogodnog oblika (ploča) dominira otpor oblika. Uslijed inercije čestica fluida, zbog naglog skretanja strujnica, dolazi do otkidanja graničnog sloja. Iza tijela se zadržava nešto fluida koji se intenzivno kovitla budući da je u dodiru sa strujom fluida koji ga tangencijalno dodiruje pri čemu dolazi do određenog prijenosa količine gibanja (dodatni gubitak energije).

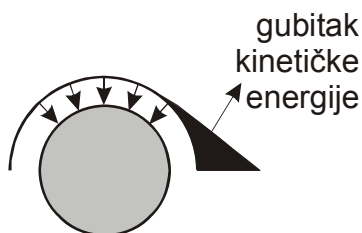
4.3.1. Ukupni otpor čvrstog tijela pri optjecanju

Pri gibanju fluida oko čvrstog tijela (ili obrnuto) javlja se sila otpora (F_D) koja je uzrokovana pojavom viskoznog trenja (zbog svojstva viskoznosti) te otporom koji ovisi o obliku tijela.

$$F_{uk} = F_D = F_{tr} + F_i$$

Sila trenja (F_{tr}) - zbog viskoznog trenja dolazi do gubitka energije koji se očituje padom tlaka (gubitak tlačne energije). Pod otporom trenja se podrazumijeva rezultanta svih površinskih sila koje djeluju na površinu tijela u smjeru strujanja fluida. Viskoznost uzrokuje trenje između slojeva fluida i između fluida i površine te taj otpor nazivamo *površinskim trenjem* ili *površinskim otporom*. (engl. *skin friction*)

Sila otpora oblika (F_i) - *inercijski otpor*, *otpor oblika*, gubitak kinetičke energije. Uzrokovana je i ovisan o obliku tijela, a jednak je zbroju svih komponenti tlaka normalnog na površinu tijela. Prevladava kod većih Reynoldsa. (engl. *drag friction*)



Ukupni otpor općenito se može pisati kao:

$$F = f \cdot p_k \cdot A$$

gdje je: f faktor ukupnog otpora (eksperimentalno određen),

A je površina – kod malih Reynoldsa to je ukupna površina u dodiru sa strujom fluida
– kod velikih Reynoldsa to je projekcija površine obrnute na smjer strujanja

$$p_k \text{ je kinetički tlak nesmetanog gibanja } p_k = \frac{v_\infty^2 \cdot \rho}{2}$$

- Laminarno područje ($Re < 1$)

$$F_{tr} = f_1 \cdot p_k \cdot S$$

gdje je f_1 faktor otpora s obzirom na površinu S .

Stokes je riješio skup diferencijalnih jednadžbi koje opisuju pojave pri optjecanju u laminarnom području i dobio izraz za silu otpora kod laminarnog strujanja:

$$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v \quad (110)$$

$$F_D = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v}_{\text{sila trenja}} + \underbrace{\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v}_{\text{sila inercije}}$$

Iako se radi o laminarnom području, ukupna sila otpora sastoji se od sile trenja ($2/3$) i sile otpora oblika ($1/3$). Dakle, i kod najmanjih brzina strujanja, uvijek je prisutan otpor oblika. To je i bitna razlika u odnosu na protjecanje gdje u laminarnom području otpor oblika nije prisutan.

- Prijelazno i turbulentno područje ($Re > 1$)

Odnosi se zbog složenosti rješavaju dimenzijskom analizom.

Sila otpora za sva područja Reynoldsovog broja

$$F_D = f(v, \rho, \eta, d, \psi)$$

gdje je ψ sferičnost, a predstavlja odnos površine kugle i površine tijela nepravilnog oblika istog volumena. Primjenom Rayleighove metode slijedi:

$$F_D = k \cdot v^a \cdot \rho^b \cdot \eta^c \cdot d^e \cdot \psi^f \quad (111)$$

Dimenzijska jednadžba:

$$[ML T^{-2}] = [L T^{-1}]^a \cdot [ML^{-3}]^b \cdot [ML^{-1} T^{-1}]^c \cdot [L]^e \quad (112)$$

Iz jednadžbe (112) slijede tri jednadžbe sa četiri nepoznanice:

$$M: 1 = b + c$$

$$L: 1 = a - 3b - c + e$$

$$T: -2 = -a - c$$

Budući da se u sve tri jednačbe pojavljuje nepoznanica "c" svi eksponenti izražavaju se preko ove nepoznanice:

$$b = 1 - c$$

$$a = 2 - c$$

$$e = 2 - c$$

Uvrštavanjem eksponenata izraženih preko nepoznanice "c" u jednačbu (111) dobijemo:

$$F_D = k \cdot v^{2-c} \cdot \rho^{1-c} \cdot \eta^c \cdot d^{2-c} \cdot \psi^f \quad (113)$$

Grupiranjem varijabli istog eksponenta dobijemo:

$$\frac{F_D}{v^2 \cdot \rho \cdot d^2} = k \cdot \left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho} \right)^c \cdot \psi^f \quad (114)$$

$$\text{U jednačbi (114)} \quad \frac{F}{d^2} = \tau, \quad \left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho} \right)^c = \left(\frac{1}{Re} \right)^c$$

iz čega slijedi:

$$\tau = f(Re, \psi) \cdot v^2 \rho \quad (115)$$

Dijeljenjem s $v^2 \rho$ dobiva se $\frac{\tau}{v^2 \rho} = \frac{\Delta p}{v^2 \rho} = Eu = f(Re, \psi)$ što predstavlja korelacijsku

jednačbu istovjetnu s korelacijskom jednačbom pri protjecanju, a koja ukazuje na isto značenje: gubitak energije pri protjecanju ovisi o hidrodinamičkim uvjetima i geometrijskim karakteristikama sustava.

Dogovorno je uvedeno da se funkcionalna ovisnost $f(Re, \psi)$ izražava faktorom otpora:

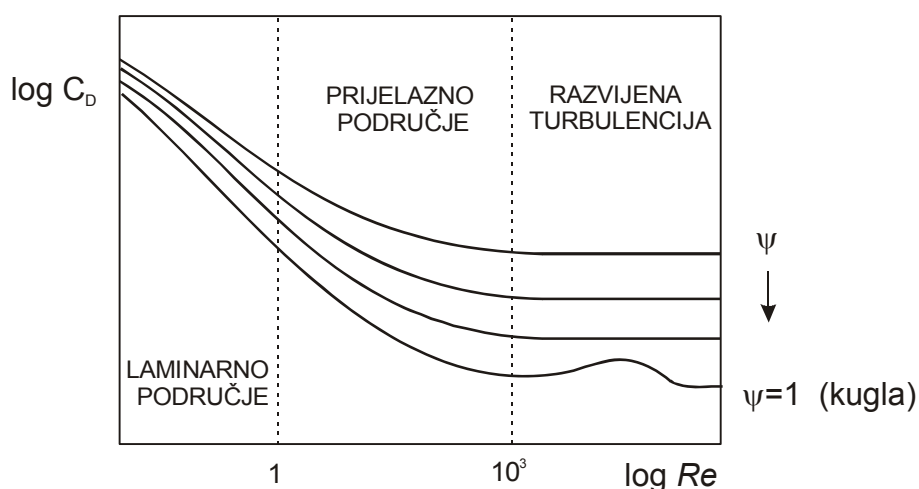
$$f(Re, \psi) = \frac{C_D}{2} \quad (116)$$

pa jednačba (115) prelazi u oblik:

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \rho}{2} \quad (117)$$

To je izraz za silu otpora pri optjecanju. Površina A predstavlja projiciranu površinu tijela okomitu na smjer strujanja.

Ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci



Slika 4.13 Ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci

Reynoldsova značajka se za nesferičnu česticu definira na sljedeći način:

$$Re = \frac{v \cdot d_{\text{ekv}} \cdot \rho}{\eta}$$

gdje je d_{ekv} ekvivalentni promjer, odnosno promjer kugle koja ima isti volumen kao i tijelo nepravilnog oblika:

$$d_{\text{ekv}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}} \quad (118)$$

gdje je V volumen nepravilnog tijela. Jednadžba (118) izvedena je iz definicije volumena kugle.

Laminarno područje

$$Re < 1$$

Količina gibanja se prenosi pretežno molekularnim mehanizmom. Gubitak energije nastaje uslijed površinskog trenja (2/3) i manjim dijelom uslijed otpora oblika (1/3).

Izjednačavanjem jednadžbe (110) i (117) dobije se ovisnost faktora otpora u laminarnom području:

$$3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v = C_D \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$C_D = \frac{24 \cdot \eta}{v \cdot d \cdot \rho}$$

$$\boxed{C_D = \frac{24}{Re}} \quad (119)$$

To znači da u laminarnom području nema utjecaja geometrijskog faktora što bi značilo da nije prisutan i otpor oblika, međutim taj otpor je uvijek prisutan. Na slici 4.13. se vidi da postoje odstupanja u ovisnosti.

Prijelazno područje

$$1 < Re < 10^3$$

Količina gibanja prenosi se molekularnim i vrtložnim mehanizmom. Dolazi do preklapanja mehanizama prijenosa, a do prijenosa količine gibanja dolazi uglavnom zbog otpora oblika.

Područje razvijene turbulencije

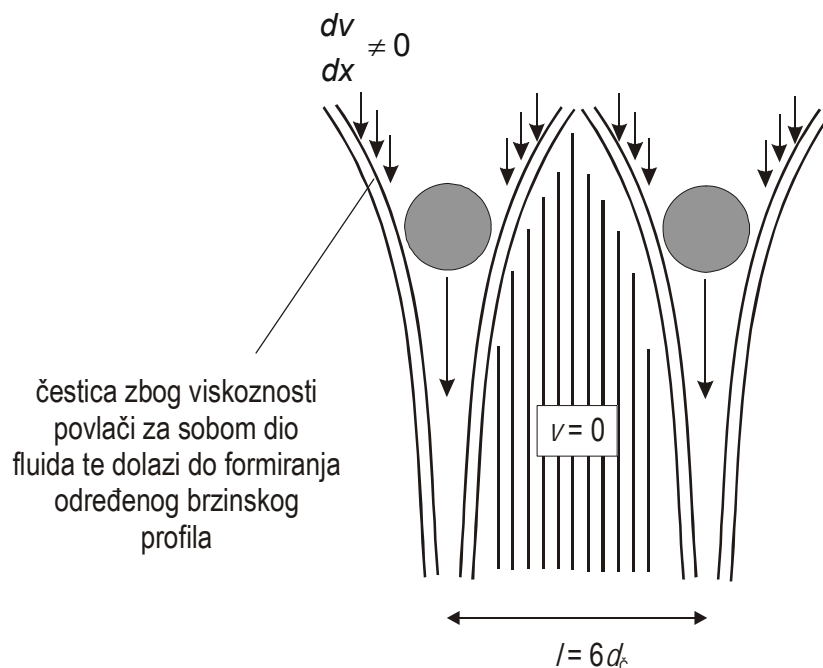
$$Re > 10^3$$

Količina gibanja prenosi se praktički samo vrtložnim mehanizmom tako da su vrijednosti faktora otpora konstantne.

Za razliku od Moodyjevog dijagrama, ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci je kontinuirana funkcija budući da su oba uzroka gubitka energije (površinsko trenje i otpor oblika) istovremeno prisutni u cijelom području Re -značajki.

4.3.2. Brzina gibanja čestica (fluida)

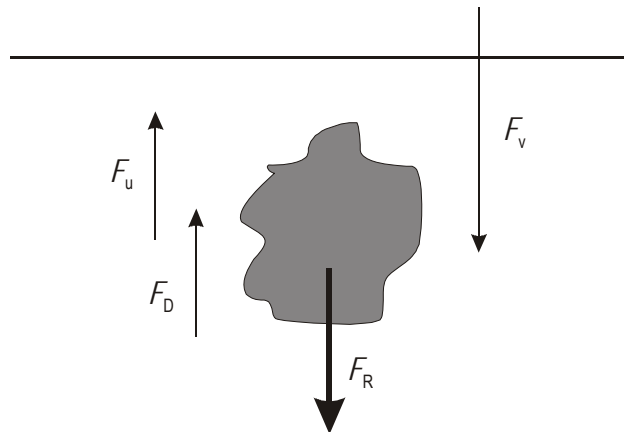
Za provedbu važnih mehaničkih operacija izuzetno je važno poznavati brzinu gibanja čestica (bilo pod djelovanjem sile teže, centrifugalne sile itd.)



Ukoliko nema preklapanja brzinskih profila koje uzrokuje prisustvo dvije ili više čestica, taloženje se smatra *nesmetanim*. U protivnom imamo *smetano* taloženje. Općenito se smatra da je taloženje nesmetano ako je $l > 6d_c$.

Da bi se ustanovili odnosi između sila, postavlja se bilanca sila.

Promatrajmo nesmetano taloženje:



$$F_R = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad - \text{rezultantna sila}$$

$$F_v = m \cdot a \quad - \text{vanjska sila}$$

$$F_u = m_{\text{fluida}} \cdot a = \frac{m_{\text{čestice}}}{\rho_{\text{čestice}}} \cdot \rho_{\text{fluida}} \cdot a \quad - \text{sila uzgona}$$

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = C_D \cdot \underbrace{\frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \rho}{2}}_{\text{za kuglu}} \quad - \text{sila otpora}$$

Prema zakonu očuvanja količine gibanja vrijedi: $\sum_{i=1}^N F_i = 0$

Bilanca sila:

$$\begin{aligned} F_R &= F_v - F_u - F_D \\ m \cdot \frac{dv}{dt} &= m \cdot a - \frac{m}{\rho} \cdot \rho_f \cdot a - C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2} \\ \frac{dv}{dt} &= a \cdot \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) - C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m} \end{aligned}$$

Nakon određenog vremena dolazi do uravnoteženja sila i brzina postaje konstantna tj. gibanje postaje stacionarno $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$. Gibanje čestica se odvija samo pod utjecajem gravitacije ($a = g$).

$$\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \cdot g = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m}$$

Za kuglu vrijedi: $A = \frac{d^2 \pi}{4} \quad m = V \cdot \rho_{\text{č}} = \frac{d^3 \pi}{6} \cdot \rho_{\text{č}}$

Dobije se izraz za brzinu koji vrijedi bez obzira na vrijednost Reynoldsove značajke:

$$v = \sqrt{\frac{4 \cdot d \cdot (\rho_c - \rho_f) \cdot g}{3 \cdot \rho_f \cdot C_D}} \quad (120)$$

Uzme li se u obzirom ovisnost faktora otpora o *Re*-značajci u laminarnom području (jednadžba 119) dobije se *Stokesov zakon* za brzinu padanja čestica u laminarnom području pod djelovanjem gravitacijskog polja:

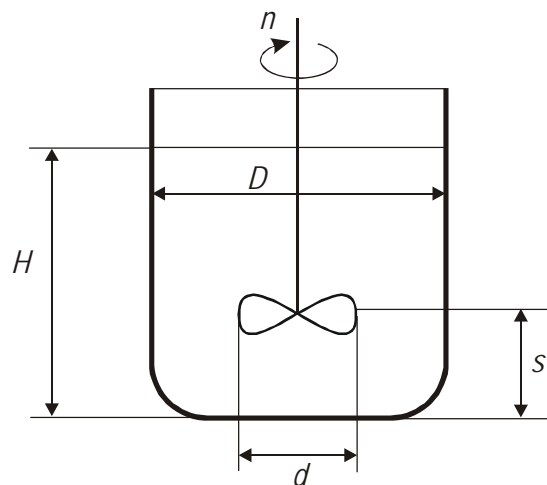
$$v = \frac{d^2 \cdot (\rho_c - \rho_f) \cdot g}{18 \cdot \eta} \quad (121)$$

4.4. Strujanje u miješalici

Teorija prijenosa količine gibanja pri strujanju u miješalici također je temelj pojedinih jediničnih operacija (miješanje kapljevina, suspendiranje).

Miješanje je operacija kojom se u određenim uvjetima želi postići u materijalu jednoliko raspodjeljivanje u mehaničkom, toplinskom i koncentracijskom smislu.

Miješalica može biti bilo koji reaktor ili posuda u koju je uronjeno *miješalo*.



Geometrijske karakteristike miješalice definirane su odnosima između geometrijskih dimenzija posude i miješala:

$$S_1 = \frac{H}{d} \quad S_2 = \frac{D}{d} \quad S_3 = \frac{s}{d}$$

(Navedeni odnosi predstavljaju *simplekse*).

Sa stanovišta prijenosa količine gibanja potrebno je utvrditi fluks količine gibanja koji se prenosi te na taj način utvrditi odnose između energije potrebne za miješanje (ili snage) i parametara koji utječu na ponašanje sustava. Zbog kompleksnosti odnosa potrebno je primijeniti dimenzijsku analizu.

Na temelju eksperimenta utvrđena je sljedeća ovisnost:

$$\frac{E}{t} = P = f(n, t, \eta, \rho, S_1, S_2, S_3, g)$$

Dimenzijskom analizom dobivena je ovisnost:

$$Eu_M = f(Re_M, Fr_M, S_1, S_2, S_3)$$

Zbog kružnog gibanja čestica fluida uvode se modificirane značajke.

Reynoldsova značajka za pravocrtno gibanje:

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}$$

Umjesto brzine pravocrtnog gibanja uvodi se obodna brzina:

$$v = d \cdot \pi \cdot n$$

te slijedi:

$$Re_M = \frac{n d^2 \rho}{\eta} = \frac{n d^2}{v} \quad (122)$$

(Konstanta π ulazi u vrijednost značajke).

Eulerova značajka (značajka snage) izvodi se na istovjetni način:

$$Eu = \frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = \frac{\Delta p \cdot \dot{V}}{v^2 \cdot \rho \cdot \dot{V}}$$

Protok se izražava produktom $A \cdot v$, a površina A kao karakteristična linearna dimenzija na kvadrat ($A = d^2$).

$$Eu = \frac{P}{\rho \cdot (d \cdot \pi \cdot n)^2 \cdot A \cdot v} = \frac{P}{\rho \cdot d^2 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot d^2 \cdot d \cdot \pi \cdot n}$$

$$Eu_M = N_P = \frac{P}{\rho n^3 d^5} \quad (123)$$

Pri miješanju se zbog strujanja kapljevine i u vertikalnom smjeru mora uzeti u obzir i utjecaj sile gravitacije koja je izražena *Froudeovom značajkom*.

$$Fr = \frac{v^2}{d \cdot g}$$

Uvrštenjem obodne brzine dobiva se:

$$Fr = \frac{(d \cdot \pi \cdot n)^2}{d \cdot g}$$

$$Fr_M = \frac{n^2 d}{g} \quad (124)$$

Bezdimenzijska korelacijska jednadžba se sada može napisati:

$$Eu_M = k \cdot Re_M^m \cdot Fr_M^n \quad (125)$$

Uvjet da miješanje bude efikasno je da nema vrtloga, pri tome je $n = 0$ te se eliminira Fr -značajka pa jednačba (125) poprima sljedeći oblik:

$$Eu_M = k \cdot Re_M^m \quad (126)$$

Značenje Eurelove značajke (značajke snage)

$$Eu_M = N_p = \frac{P}{\rho n^3 d^5}$$

Snaga predstavlja utrošenu energiju u jedinici vremena:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$$

Za kružno gibanje:

$$P = F_D \cdot d \cdot \pi \cdot n$$

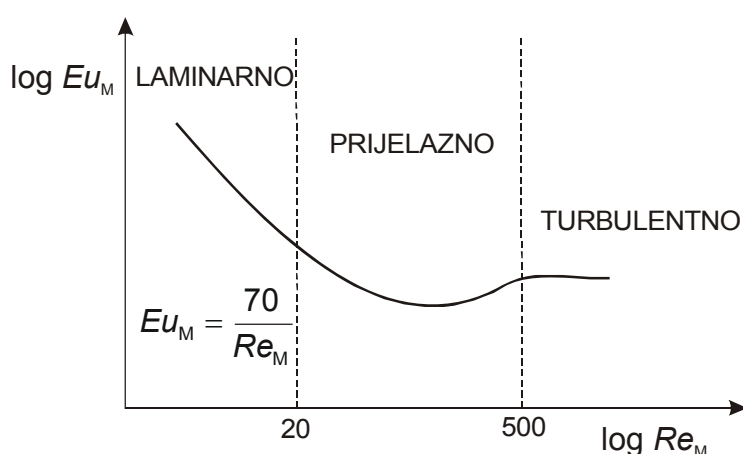
Uvođenjem izraza za silu otpora:

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$Eu_M = \frac{F_D \cdot d \cdot \pi \cdot n}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} = \frac{C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \rho}{2} \cdot d \cdot \pi \cdot n}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} = \frac{C_D \cdot d^2 \cdot \frac{v^2 \rho}{2} \cdot d \cdot \pi \cdot n}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5}$$

$$Eu_M = \frac{C_D \cdot \pi^3}{2} = k \cdot C_D \quad (127)$$

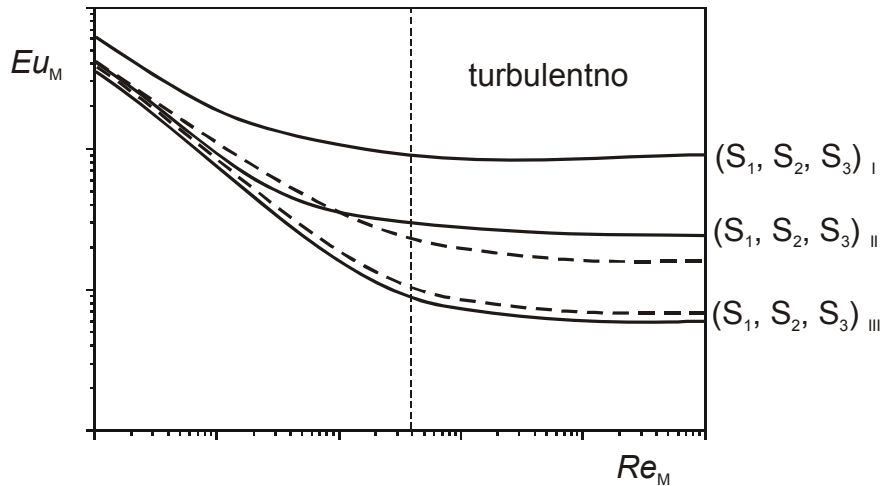
Iz jednačbe (127) vidljivo je da je Eulerova značajka (značajka snage) direktno proporcionalna faktoru otpora tako da se umjesto ovisnosti faktora otpora o Re -značajci može grafički prikazati ovisnost Eu -značajke o Re -značajci.



Slika 4.14 Ovisnost značajke snage o Re -značajci

(Eulerova značajka se naziva i značajka snage i označava se s N_p). Vidljivo je (slika 4.14.) da kao i kod protjecanja i optjecanja, faktor otpora (odnosno Eu_M -značajka) opadaju s povećanjem Re -značajke te u razvijenom turbulentnom području poprimaju konstantnu vrijednost.

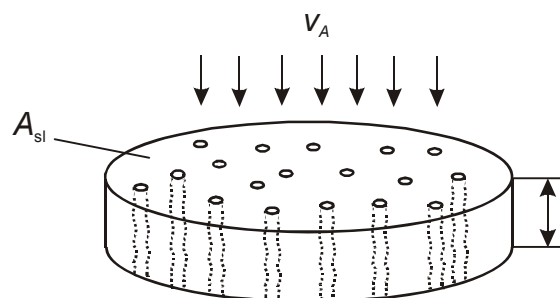
Za različite geometrijske karakteristike miješalica postoji i odgovarajuća funkcionalna ovisnost što je prikazano dijagramom:



4.5. Strujanje kroz sloj čestica

Kako je već navedeno u više navrata, teorija prijenosa količine gibanja temelji je brojnih jediničnih operacija u kojima postoji strujanje kroz sloj čestica (filtracija, fluidizacija, taloženje).

Zamislimo sloj čestica koji se sastoji od čestica različitih veličina i oblika pri čemu postoji veliki broj nepravilnih pora različitih dužina i promjera kroz koje fluid struji brže ili sporije što ovisi o pokretačkoj sili koja uzrokuje strujanje (razlika tlakova) te o otporu koji pruža sam sloj. Ako su čestice krupne, tada sloj sadrži široke pore i otpor takvog sloja je relativno malen, a strujanje može biti laminarno i turbulentno. Međutim, ako je sloj sastavljen od finih čestica i pore su vrlo uske čak, i kapilarne, te predstavljaju veliki otpor strujanju, brzina strujanja je malena te je u ovom slučaju strujanje praktički uvijek laminarno. Budući da su u takvom sloju pore vrlo nepravilne, pune izbočina i zakrivljenja, može se na temelju ranijih razmatranja zaključiti da do energetske gubitke dolazi i zbog površinskog (viskoznog) trenja i zbog otpora uslijed oblika. Očito je da su u ovom slučaju prisutni i učinci protjecanja i optjecanja.



Slika 4.15 Strujanje kroz porozni sloj

Temeljni je, međutim, ovdje problem kako odrediti geometrijske karakteristike nekog poroznog sloja, budući da je vrlo teško odgovoriti:

- kolika je duljina pora (kapilara), l
- koliki je njihov promjer, d_{ekv}
- kolika je veličina čestica od kojih je sastavljen sloj, $d_{\text{č}}$
- kolika je specifična površina čestica, S_V
- koliki je broj tih čestica, n
- kolika je brzina strujanja u poroznom sloju, v

Zbog toga se za definiranje geometrijskih karakteristika poroznog sloja primjenjuju pristupačne, mjerljive veličine, a to su:

- poroznost sloja (ε), definira se kao udio šupljina (pora) u poroznom sloju

$$\varepsilon = \frac{V_{\text{SL}} - V_{\text{č}}}{V_{\text{SL}}} = \frac{V_{\text{š}}}{V_{\text{SL}}} = \frac{V_{\text{P}}}{V_{\text{SL}}} \quad (128)$$

$$1 - \varepsilon = \frac{V_{\text{č}}}{V_{\text{SL}}}$$

$$V_{\text{č}} = (1 - \varepsilon) \cdot V_{\text{SL}} \quad (129)$$

gdje je V_{SL} volumen sloja, $V_{\text{č}}$ volumen čvrste faze, a $V_{\text{š}}$ volumen šupljina.

- broj čestica

$$n = \frac{\text{volumen svih čestica}}{\text{volumen jedne čestice}}$$

$$n = \frac{(1 - \varepsilon) \cdot V_{\text{SL}}}{V_{\text{jedne čestice}}} = \frac{A_{\text{SL}} \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_{\text{č}}^3 \cdot \pi}{6}} \quad (130)$$

$$\text{gdje je } \frac{d_{\text{č}}^3 \cdot \pi}{6} = V_{\text{sphere}}.$$

- promjer pora

Budući da su pore nepravilnog oblika uvodi se ekvivalentni promjer pora:

$$d_{\text{ekv}} = 4 \cdot \frac{A_{\text{P}}}{O} = 4 \cdot \frac{A_{\text{P}}}{O} \cdot \frac{l}{l} = 4 \cdot \frac{V_{\text{P}}}{S_{\text{UK}}} = 4 \cdot \frac{\frac{V_{\text{P}}}{V_{\text{SL}}}}{\frac{S_{\text{UK}}}{V_{\text{SL}}}}$$

gdje je A_{P} poprečni presjek pora.

$$d_{\text{ekv}} = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{S_V} \quad (131)$$

- specifična površina (cjelokupna slobodna površina unutar sloja izražena po jedinici volumena sloja)

$$S_V = \frac{S_{\text{UK}}}{V_{\text{SL}}} = \frac{n \cdot S_{\text{jedne čestice}}}{V_{\text{SL}}} = \frac{\frac{A_{\text{SL}} \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_{\text{č}}^3 \cdot \pi}{6}} \cdot d_{\text{č}}^2 \cdot \pi}{A_{\text{SL}} \cdot l}$$

$$S_V = \frac{6 \cdot (1 - \varepsilon)}{d_{\check{c}}} \quad (132)$$

- površinska brzina (v_A) je brzina kojom suspenzija nastrujava na površinu filtarskog sredstva (A). Na taj način može se izraziti brzina strujanja kroz porozni sloj. Iz jednadžbe kontinuiteta:

$$\begin{aligned} \dot{V}_P &= \dot{V}_{SL} \\ \dot{V} &= v \cdot A_P = v_A \cdot A_{SL} \\ v &= v_A \cdot \frac{A_{SL} \cdot l}{A_P \cdot l} = v_A \cdot \frac{V_{SL}}{V_P} \\ v &= \frac{v_A}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (133)$$

Na temelju zakona o očuvanju količine gibanja postavlja se bilanca sila:

$$\begin{aligned} \text{pokretačka sila (sila tlaka)} &= \text{sila otpora} \\ \Delta p \cdot A_P &= n \cdot F_D \end{aligned}$$

Na temelju tako izraženih geometrijskih karakteristika poroznog sloja, te polazeći od Darcy-Weissbachove jednadžbe i izraza za silu otpora pri optjecanju dolazi se do opće jednadžbe za pad tlaka pri strujanju kroz porozni sloj.

$$\begin{aligned} \Delta p \cdot A_{SL} \cdot \varepsilon &= \frac{A_{SL} \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)}{d_{\check{c}}^3 \cdot \pi} \cdot C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \\ \Delta p \cdot \varepsilon &= \frac{l \cdot (1 - \varepsilon)}{d_{\check{c}}^3 \cdot \pi} \cdot C_D \cdot \frac{d_{\check{c}}^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{\varepsilon^2 \cdot 2} \\ \Delta p &= \frac{3}{2} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} C_D \frac{l}{d_{\check{c}}} \frac{v_A^2 \rho}{2} \end{aligned} \quad (134)$$

gdje je C_D faktor otpora strujanju kroz porozni sloj.

Jednadžba (134) omogućava procjenu pada tlaka pri strujanju kroz porozni sloj bez obzira radi li se o širokim ili uskim porama.

Ova jednadžba podsjeća na *Darcy-Weissbachovu*, a razlikuje se zbog složene geometrijske strukture sloja.

4.5.1. Strujanje kroz uske pore

Ranije je spomenuto da je kod poroznih slojeva, koji su sastavljeni od sitnih čestica, zbog velikog otpora brzina strujanja kroz pore vrlo mala, te je i strujanje laminarno. Na temelju tih činjenica nameće se pretpostavka da se faktor otpora može izvesti na sličan način kao i kod protjecanja $\left(\xi = \frac{64}{Re}\right)$ i optjecanja $\left(C_D = \frac{24}{Re}\right)$.

Pri strujanju kroz porozni sloj Reynoldsova značajka izražava se u modificiranom obliku budući da uzima u obzir složene geometrijske karakteristike:

$$Re' = \frac{v \cdot d_{ekv} \cdot \rho}{\eta} = \frac{\frac{v_A}{\varepsilon} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{d_c \cdot \varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \rho}{\eta}$$

$$Re' = \frac{2d_c v_A \rho}{3(1-\varepsilon)\eta} \quad (135)$$

$$\frac{3}{2} Re' = \frac{Re}{1-\varepsilon} \quad (136)$$

Uzme li se u obzir da je kod strujanja kroz cijev, faktor otpora:

$$C_D = \frac{64}{Re'}$$

uvršćavanjem u jednadžbu (134) dobije se:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{64}{\frac{2 v_A \cdot d_c \cdot \rho}{3 \eta \cdot (1-\varepsilon)}} \cdot \frac{1}{d_c} \cdot \frac{v_A^2 \rho}{2}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 72 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{v_A \eta}{d_c^2}$$

Eksperimentalno je međutim utvrđeno da se u slučaju, kada je porozni sloj sačinjen od sferičnih čestica, faktor otpora može izračunati iz jednadžbe:

$$C_D = \frac{160}{Re'} \quad (137)$$

(Umjesto konstante 64 uvrštava se konstanta 160).

Uvrštavanjem u opću jednadžbu za pad tlaka dobiva se:

$$\boxed{\frac{\Delta p}{l} = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{v_A \eta}{d_c^2}} \quad (138)$$

Ova jednadžba poznata je po svojim autorima i naziva se *Carman-Kozenyjevom* jednadžbom i vrijedi za sferične čestice.

4.5.2. Strujanje kroz široke pore

U slučaju kada je porozni sloj sačinjen od krupnih čestica otpori strujanju su srazmjerno mali, brzina strujanja fluida je velika te je i strujanje turbulentno. U ovim uvjetima strujanja kroz porozni sloj, *Burke* i *Plummer* su utvrdili da je vrijednost faktora otpora konstantna i da iznosi:

$$C_D = 2,3$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (134) dobiva se:

$$\frac{\Delta p}{l} = 1,75 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{v_A^2 \rho}{d_{\check{c}}} \quad (139)$$

Izvedene jednadžbe (138) i (139) predstavljaju izraze za pad tlaka (gubitak energije) u graničnim uvjetima (za laminarno ili za turbulentno strujanje). Budući da su u velikom broju slučajeva prisutna oba mehanizma, ukupan pad tlaka dobiva se zbrajanjem jednadžbi, te se dobiva *Ergunova jednadžba*:

$$\frac{\Delta p}{l} = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{v_A \eta}{d_{\check{c}}^2} + 1,75 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{v_A^2 \rho}{d_{\check{c}}} \quad (140)$$

Pomnožim li se Ergunova jednadžba sa $\left(\frac{d_{\check{c}}}{\rho \cdot v_A^2} \cdot \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \right)$ i pregrupiraju članovi tako da se dobiju bezdimenzijske grupe, slijedi izraz:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_A^2} \right) \cdot \left(\frac{d_{\check{c}}}{l} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \right) = 180 \cdot \frac{(1-\varepsilon) \cdot \eta}{\rho \cdot v_A \cdot d_{\check{c}}^2} + 1,75$$

odnosno:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_A^2} \right) \cdot \left(\frac{d_{\check{c}}}{l} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \right) = 180 \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{Re} + 1,75 \quad (141)$$

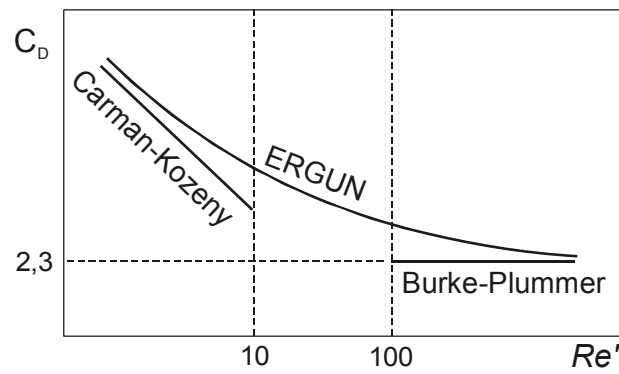
Iz općeg izraza za pad tlaka (jednadžba 134) slijedi:

$$\frac{3}{4} C_D = \left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_A^2} \right) \cdot \left(\frac{d_{\check{c}}}{l} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} \right) \quad (142)$$

Pregrupiravanjem članova u Ergunovoj jednadžbi te povezivanjem jednadžbi (136), (141) i (142) dobiva se pogodan oblik izražavanja faktora otpora za sloj sastavljen od sferičnih čestica:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} C_D &= 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{Re'} + 1,75 \\ C_D &= \frac{160}{Re'} + 2,3 \end{aligned} \quad (143)$$

Grafičkim prikazom $C_D = f(Re')$ dobiva se dijagram koji podsjeća na dijagram ovisnosti faktora otpora o Reynoldsovoj značajci kod protjecanja i optjecanja.



Slika 4.16 Grafički prikaz ovisnosti faktora otpora o Re'

Pravci koji slijede iz Carman-Kozenyjeve i Burke-Plummerove jednačbe predstavljaju asimptote Ergunove krivulje.

5. PRIJENOS TOPLINSKE ENERGIJE

U uvodnom dijelu ovog kolegija napomenuto je da postoji fenomenološka analogija između prijenosa količine gibanja, topline i tvari. Pri tom je naglašeno da je prijenos toplinske energije temelj toplinskih jediničnih operacija dok je prijenos tvari temelj difuzijskih operacija.

Opći zakon očuvanja:

$$\begin{array}{rclclcl} V \cdot \frac{dX_V}{dt} & = & \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V, ul.} & - & \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V, izl.} & + & V_r \\ \text{AKUMULACIJA} & = & \text{ULAZ} & - & \text{IZLAZ} & + & \text{GENERACIJA} \end{array}$$

Promatramo li prijenos toplinske energije, X_V iz općeg zakona očuvanja predstavlja količinu topline po jedinici volumena (Q):

$$V \cdot \frac{dQ}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot Q_{V, ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot Q_{V, izl.} + V_r$$

Pokretačka sila procesa je razlika temperatura. Proces je stacionaran ako nema ovisnosti temperaturnog gradijenta o vremenu $\left(\frac{dT/dy}{dt} = 0\right)$, a nestacionaran

ukoliko ovisnost postoji $\left(\frac{dT/dy}{dt} \neq 0\right)$. U brojnim slučajevima procesi prijenosa topline su nestacionarni te će se u ovom poglavlju opisati primjeri nestacionarnog prijenosa topline. Intenzitet prijenosa ovisan je o pokretačkoj sili, o otporima koji se javljaju i o površini izmjene topline. Proučavanje fenomenologije prijenosa usmjereno je na što točnije definiranje navedenih veličina.

Do prijenosa topline dolazi različitim mehanizmima:

- **Kondukcija** ili toplinsko provođenje je molekularni mehanizam prijenosa topline pri kojem su čestice tvari u direktnom kontaktu. Karakterističan je za čvrsta tijela, a ovisan o fizikalnim svojstvima tvari, geometrijskim karakteristikama te o lokalnim razlikama u temperaturi. Prisutan je i kod kapljevina i plinova u mirovanju.
- **Konvekcija** ili prijenos topline miješanjem (vrtloženjem) je vrtložni mehanizam prijenosa topline. Karakterističan je za fluide pri čemu se pod konvektivnim prijenosom topline ne podrazumijeva samo izmjena u masi fluida nego čak i značajnije, izmjena između fluida i čvrste površine. Gibanje fluida može biti uzrokovano lokalnim razlikama u temperaturi pa govorimo o *prirodnoj konvekciji*, ili vanjskim utjecajem (narinutom silom: ventilator, pumpa miješanje itd.) pa govorimo o *prisilnoj konvekciji*.
- **Radijacija** ili toplinsko zračenje bitno se razlikuje jer se prijenos topline ostvaruje elektromagnetskim valovima između dviju površina različitih temperatura odvojenih medijem koji omogućuje taj prijenos. Intenzitet zračenja ovisi o temperaturi i valnoj duljini, a uglavnom se odvija u infracrvenom dijelu spektra.

5.1. Kondukcija

Kondukcija je mehanizam prijenosa topline svojstven čvrstim tijelima, a odvija se između čestica u direktnom kontaktu kada su njihove pojedinačne temperature različite. Dakle, toplina se prenosi s čestice na česticu molekularnim mehanizmom. Proučavanja se zbog jednostavnosti provode na *izotropnim tijelima* (ona tijela kod kojih su fizička svojstva ista u bilo kojoj promatranoj točki), a temeljne postavke se primjenjuju na kompleksnije sustave.

Potrebno je naglasiti da će se u ovom području prijenosa tvari i energije često javljati i nestacionarne pojave pa su osnovne polazne jednačbe nešto kompleksnije.

Temperatura neke točke definirana je funkcijom temperaturnog polja:

$$T = f(x, y, z, t)$$

Granična vrijednost omjera temperaturnih promjena i udaljenosti između izotermnih ploha predstavlja temperaturni gradijent:

$$\text{grad } T = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta y} = \frac{dT}{dy}$$

u uvjetima stacionarnog jednodimenzijskog provođenja topline.

(*Izotermna ploha* je ploha u kojoj sve točke tijela imaju istu temperaturu.)

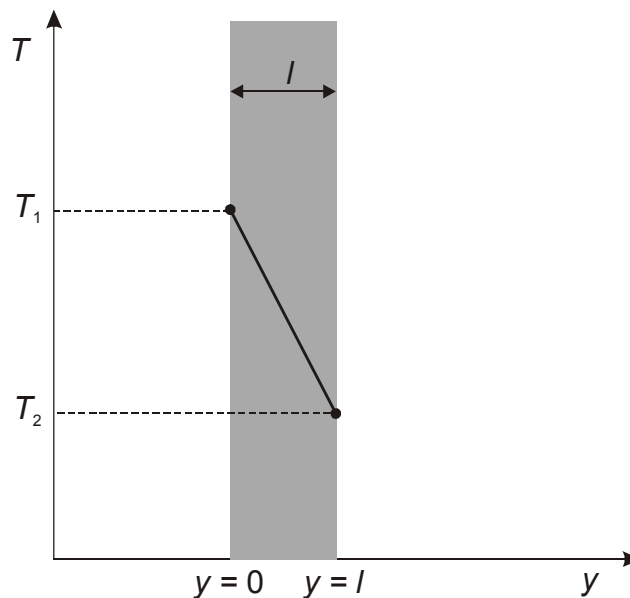
Budući da se u praksi toplina prenosi u svim smjerovima korektno je temperaturni gradijent označavati parcijalnim derivacijama $\frac{\partial T}{\partial y}$.

U ovisnosti o vremenu mogu se odvijati:

- stacionarni procesi – temperatura se u određenoj točki ne mijenja s vremenom $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$, odnosno temperaturni gradijent je konstantan $\left(\frac{dT}{dy} \neq f(t)\right)$
- nestacionarni procesi – temperatura se u određenoj točki mijenja s vremenom $\left(\frac{dT}{dt} \neq 0\right)$, odnosno mijenja se temperaturni gradijent $\left(\frac{dT}{dy} = f(t)\right)$

5.1.1. Stacionarno provođenje topline kroz jednoslojni zid

Proučavanje provođenja topline u stacionarnim uvjetima temelji se na *Fourierovu zakonu* stacionarnog provođenja topline (I Fourierov zakon).



Slika 5.1

Općenito: $T = f(x, y, z, t)$

Stacionarni uvjeti: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (temperatura u određenoj točki ne mijenja se s vremenom).

Ako se prijenos topline odvija u jednom smjeru može se umjesto parcijalnih derivacija pisati obične derivacije $\left(\frac{dT}{dy}\right)$.

Promatrajmo jednodimenzijско (smjer y) provođenje topline kroz stijenku ravne ploče (slika 5.1). Fourier je utvrdio da provođenje topline ovisi o razlici temperatura, površini, vremenu, daljini te svojstvu tvari koja je izražena sa koeficijentom toplinske vodljivosti (λ).

$$Q = f(\Delta T, A, t, y, \lambda)$$

Fourier je izveo jednadžbu:

$$\frac{Q}{t} = \dot{Q} = \lambda \cdot A \cdot \left(-\frac{dT}{dy}\right)$$

Negativni predznak temperaturnog gradijenta ukazuje da temperatura opada s udaljenošću od izvorišta topline.

Budući da je $\frac{Q}{A \cdot t} = q$ fluks, Fourierova jednadžba može se pisati i u obliku:

$$q = \lambda \cdot \left(-\frac{dT}{dy} \right) \quad (144)$$

što predstavlja *I. Fourierov zakon*.

Iz jednadžbe (144) slijedi:

$$q \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy = -\lambda \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q \cdot (y_2 - y_1) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1)$$

$(y_2 - y_1)$ predstavlja debljinu zida:

$$q = -\frac{\lambda}{l} \cdot (T_2 - T_1)$$

te konačno:

$$q = \frac{\lambda}{l} \cdot (T_1 - T_2) \quad (145)$$

gdje $\left(\frac{\lambda}{l} \right)$ predstavlja toplinsku vodljivost, a $\left(\frac{l}{\lambda} \right)$ toplinski otpor.

Jednadžba (145) može se pisati i na sljedeći način:

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{l}{\lambda}} = \frac{\text{pokretačka sila}}{\text{otpor}}$$

a usporedbom sa općim izrazom za fluks vidimo da u jednadžbi imamo pokretačku silu $(T_1 - T_2)$ i otpor prijenosu topline $\left(\frac{l}{\lambda} \right)$.

Ukupno prenesena toplina je prema tome:

$$Q = \frac{\lambda}{l} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A \cdot t \quad (146)$$

Navedeni izrazi vrijede kada je koeficijent toplinske vodljivosti konstantan u promatranom rasponu temperatura. Ukoliko je zbog promjene temperature došlo do velike promjene koeficijenta toplinske vodljivosti potrebno je provesti sljedeću korekciju:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot [1 + b \cdot (\bar{T} - T_0)]$$

gdje je T_0 referentna temperatura kod koje je koeficijent toplinske vodljivosti λ_0 ,

\bar{T} je aritmetička srednja vrijednost temperatura,

b je temperaturni koeficijent koji se određuje eksperimentalno.

U proračun se sada uzima srednja vrijednost koeficijenta toplinske vodljivosti:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda + \lambda_0}{2} \quad (147)$$

a proračun se provodi prema jednadžbi:

$$Q = \frac{\bar{\lambda}}{l} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A \cdot t \quad (148)$$

Najbolji vodiči topline su metali (srebro, bakar, zlato).

Koeficijent toplinske vodljivosti metala smanjuje se s temperaturom (osim kod aluminija). Vrijednosti se kreću u rasponu od 3 do 458 W m⁻¹ K⁻¹.

Kod građevinskih izolacijskih materijala te se vrijednosti kreću u rasponu od 0,02 do 3 W m⁻¹ K⁻¹, a ovisno o udjelu šupljina u materijalu te o vlažnosti ovisi i porast koeficijenta toplinske vodljivosti sa temperaturom.

Koeficijent toplinske vodljivosti kapljevine u pravilu opada s porastom temperature (osim kod vode i glicerola), a vrijednosti se kreću u rasponu od 0,08 do 0,65 W m⁻¹ K⁻¹.

Plinovima raste toplinska vodljivost s porastom temperature, a vrijednosti koeficijenta su u rasponu od 0,05 do 0,6 W m⁻¹ K⁻¹.

5.1.2. Stacionarno provođenje topline kroz višeslojni zid

Uvjet stacionarnosti:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{odnosno} \quad q = \text{konst.} \quad \text{odnosno} \quad \frac{dQ}{dt} = \text{konst.}$$

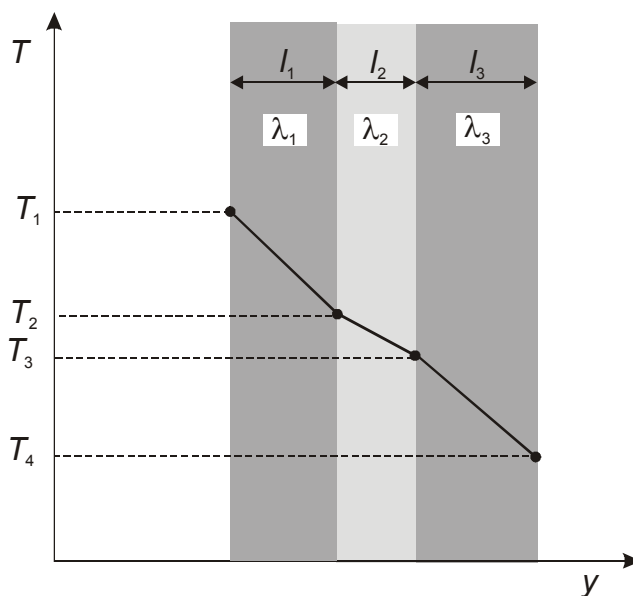
iz čega slijedi: $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3 = \dots = \dot{Q}_n$

S obzirom na sliku 5.2 jednažbu (146) možemo pisati za svaki sloj na sljedeći način:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\lambda_1}{l_1} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\lambda_2}{l_2} \cdot (T_2 - T_3) \cdot A$$

$$\dot{Q}_3 = \frac{\lambda_3}{l_3} \cdot (T_3 - T_4) \cdot A$$



Slika 5.2

Budući da je količina prenesene topline konstantna možemo pisati:

$$\dot{Q} \cdot \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3} \right) = A \cdot (T_1 - T_4)$$

odnosno:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (T_1 - T_4)}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}} \quad (149)$$

Strmina pada temperature u pojedinom sloju određena je svojstvima sloja odnosno vrijednošću koeficijenta toplinske vodljivosti samog sloja (λ). Želimo li jednadžbu (149) pisati općenito za n slojeva te uz konstantnu površinu izmjene topline, ona će imati sljedeći oblik:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}} \quad (150)$$

gdje je $(T_1 - T_{n+1})$ ukupni pad temperature odnosno ukupna pokretačka sila, a $\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}$

je ukupni toplinski otpor.

Na temelju $\dot{Q} = \text{konst.}$, $A = \text{konst.}$, vrijedi:

$$\frac{\Delta T_{\text{uk}}}{R_{\text{uk}}} \cdot A = \frac{\lambda_1}{l_1} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A = \frac{\lambda_2}{l_2} \cdot (T_2 - T_3) \cdot A = \frac{\lambda_3}{l_3} \cdot (T_3 - T_4) \cdot A$$

odnosno:

$$\frac{\Delta T_{\text{uk}}}{R_{\text{uk}}} = \frac{\Delta T_1}{\frac{l_1}{\lambda_1}} = \frac{\Delta T_2}{\frac{l_2}{\lambda_2}} = \frac{\Delta T_3}{\frac{l_3}{\lambda_3}}$$

dakle:

$$\frac{\Delta T_{\text{uk}}}{R_{\text{uk}}} = \frac{\Delta T_{\text{lok}}}{R_{\text{lok}}} \quad (151)$$

Ova zakonitost je od izuzetnog praktičnog značaja jer se npr. na temelju ukupne razlike temperatura i ukupnog toplinskog otpora mogu procijeniti vrijednosti lokalnih temperatura.

Toplinski tok kroz višeslojni zid može se aproksimirati homogenim zidom, ali je tada potrebno uzeti ekvivalentni koeficijent toplinske vodljivosti:

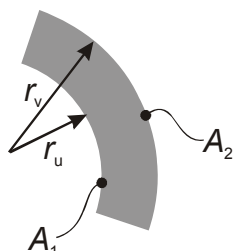
$$\lambda_{\text{ekv}} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}}$$

pa se jednadžba (150) može pisati u sljedećem obliku:

$$\dot{Q} = \lambda_{\text{ekv}} \cdot \frac{A \cdot \Delta T_{\text{uk}}}{\sum_{i=1}^n l_i} \quad (152)$$

5.1.3. Kondukcija kroz zakrivljene (cilindrične) površine

Ukoliko se toplina provodi kroz zakrivljene površine (npr. kroz stijenku cijevi kružnog presjeka), osnovni je problem definirati mjerodavnu površinu izmjene topline. Najčešće se uzima srednja vrijednost površine temeljena na srednjem polumjeru (promjeru). Kod tankih zidova to nema značajnijeg utjecaja.



Slika 5.3

I ovdje je moguće primijeniti jednadžbu (146):

$$Q = \frac{\lambda}{l} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A \cdot t$$

ali je potrebno definirati površinu:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot \bar{A} \cdot \underbrace{\frac{\Delta T}{r_v - r_u}}_l \quad (153)$$

Ako je $\frac{r_v}{r_u} < 2$ (kod cijevi tankih stijenki) koristi se aritmetička sredina polumjera:

$$\bar{r} = r_A = \frac{r_v + r_u}{2}$$

Ako je $\frac{r_v}{r_u} > 2$ (kod cijevi debelih stijenki) koristi se logaritamska srednja vrijednost polumjera:

$$\bar{r} = r_{LM} = \frac{r_v - r_u}{\ln \frac{r_v}{r_u}}$$

Srednja površina definira se na sljedeći način:

$$\bar{A} = 2 \cdot \bar{r} \cdot \pi \cdot L$$

Uvrstimo li izraz za srednju površinu i srednji promjer (logaritamski ili aritmetički) u jednadžbu (153) dobijemo:

- za $\bar{r} = r_A$ $\dot{Q} = \lambda \cdot \Delta T \cdot \frac{r_v + r_u}{r_v - r_u} \cdot \pi \cdot L \quad (154)$

- za $\bar{r} = r_{LM}$ $\dot{Q} = \lambda \cdot \Delta T \cdot \frac{2}{\ln \frac{r_v}{r_u}} \cdot \pi \cdot L \quad (155)$

Koristimo li umjesto polumjera promjere, jednadžbu (155) možemo pisati na sljedeći način:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{d_v}{d_u}}$$

Za višeslojni cilindrični zid općenito se navedene jednadžbe mogu pisati na sljedeći način:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

Koeficijent toplinske vodljivosti se za višeslojni zid može aproksimirati homogenim zidom:

$$\lambda_{\text{ekv}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_{i+1}}{d_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

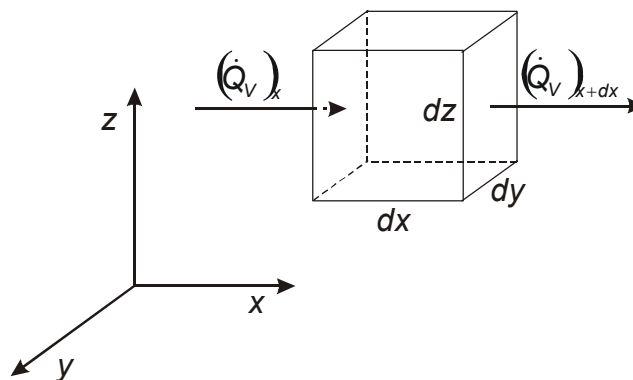
te se konačno dobiva izraz za toplinski tok:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{\lambda_{\text{ekv}}} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

5.1.4. Nestacionarna kondukcija

Ako pri provođenju topline kroz sustav, toplinski fluks, odnosno temperatura u promatranoj točki predstavlja funkciju vremena, tada se prijenos topline odvija u nestacionarnim uvjetima. Dakle, gradijent temperature promatrane točke mijenja se i s vremenom.

Promatrajmo procesni prostor, a zbog jednostavnosti neka to bude paraleloepid s dimenzijama dx, dy i dz .



Slika 5.4

S obzirom na opći zakon očuvanja vrijedi:

$$V \cdot \frac{dQ_V}{dt} = \dot{V}_{\text{ul.}} \cdot Q_{V,\text{ul.}} - \dot{V}_{\text{izl.}} \cdot Q_{V,\text{izl.}} + V_r$$

odnosno:

$$V \cdot \frac{\partial Q_V}{\partial t} = (\dot{Q}_V)_x - [(\dot{Q}_V)_x + (\dot{Q}_V)_{x+dx}] + V_r \quad (156)$$

Parcijalne derivacije uvode se budući da su promjene prisutne u svim smjerovima.

Toplina koja se akumulira u procesnom prostoru:

$$\partial Q_V = c_p \cdot \rho \cdot \partial T$$

Volumen procesnog prostora može se pisati:

$$V = dx \cdot dy \cdot dz$$

Promjena topline u smjeru osi x definira se na sljedeći način:

$$\text{Ulaz:} \quad \dot{Q}_x = +\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \cdot dz$$

$$\text{Izlaz:} \quad \dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \cdot dx = +\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \cdot dz - \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\text{ULAZ – IZLAZ:} \quad (\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}) = \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} \cdot dx = +\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Uvrstimo li gore navedene jednačbe u jednačbu (156) dobijemo sljedeći izraz:

$$c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \cdot dz + \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \cdot dz + \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + V_r$$

Budući da nema izvorišta topline, nema ni generacije topline pa je $V_r = 0$.

Podijelimo li gornju jednačbu sa $(dx \cdot dy \cdot dz)$ i sa $(c_p \cdot \rho)$ dobijemo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = + \underbrace{\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}}_a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (157)$$

Analogni izrazi mogu se napisati i za prijenos topline u smjerovima y i z pa se dobiva ukupna promjena temperature:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

odnosno:

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot \nabla^2 T \quad (158)$$

gdje je a koeficijent temperaturne vodljivosti.

Jednačba (158) predstavlja *II Fourierov zakon*, a uzima u obzir nestacionarnost procesa i provođenje topline u smjeru osi x, y i z .

Ako se prijenos topline odvija u jednom smjeru i ako je proces stacionaran dobiva se *I Fourierov zakon* (jednačba 144).

Neka se prijenos topline odvija samo u smjeru osi x uz pretpostavku da je proces stacionaran ($\frac{dT}{dt} = 0$):

$$0 = \frac{\lambda}{\rho c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Množenjem sa (ρc_p) dobiva se:

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

te integriranjem:

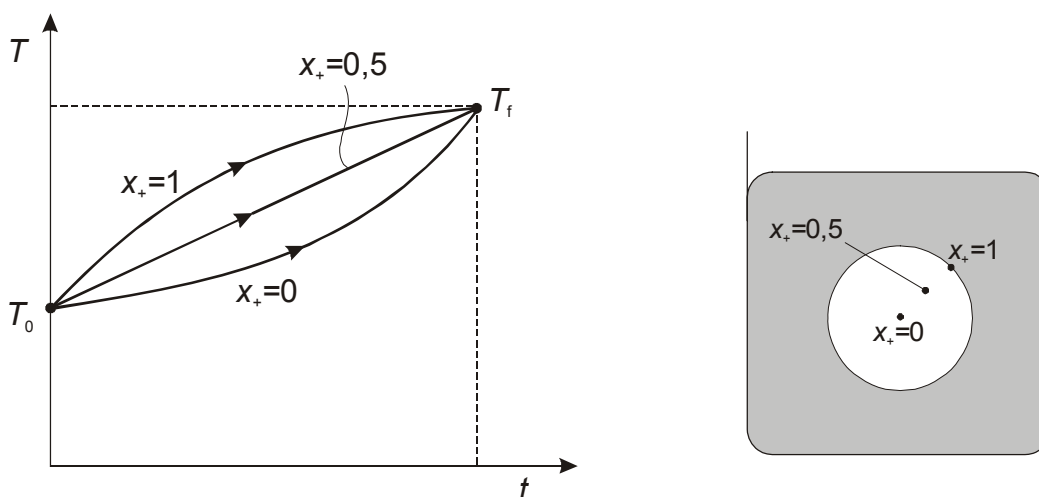
$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{I. Fourierov zakon})$$

Ovaj zakon se može izraziti i supstitucijom $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$:

$$q = -a \cdot \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial x}$$

5.1.4.1. Analitička rješenja pri nestacionarnoj kondukciji

Prije analize nestacionarne kondukcije potrebno je ukazati na neke njene značajnosti. Kod nestacionarne kondukcije značajan je faktor vrijeme izloženosti temperaturnoj promjeni. Promatrajmo tijelo uronjeno u vruću vodu.



Slika 5.5

Promotrimo li sliku 5.5 vidimo da se temperatura na svim položajima kugle ne mijenja jednakom brzinom. Unutrašnjost kugle najsporije se zagrijava do temperature vruće vode T_f .

Položaj x_+ je bezdimenzijska koordinata, a predstavlja omjer položaja x i linearne dimenzije tijela (u slučaju kugle to je polumjer):

$$x_+ = \frac{x}{l}$$

Temperatura T_0 predstavlja početnu temperaturu kugle prije zagrijavanja ($t = 0$).

Temperaturna promjena ovisi o vremenu te o vanjskom i unutarnjem otporu prijenosu topline. Prema zakonu očuvanja količine topline koja se prenosi s okoline na površinu plohe tijela u jedinici vremena, jednaka je količini topline prenesene kondukcijom od te iste površine u unutrašnjost tijela (i obrnuto).

$$q_{ok} = q_{tijelo}$$

$$q_{KONV} = q_{KOND}$$

q_{KONV} se izražava Newtonovim zakonom konvekcije:

$$q_{KONV} = \alpha \cdot \Delta T$$

pri čemu je α koeficijent prijelaza topline, $J m^{-2} K^{-1} s^{-1}$. (O konvekciji će biti govora kasnije).

$$\alpha \cdot (T_{fluida} - T_{plohe}) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (T_f - T_p) \quad (159)$$

U jednadžbi (159) $\frac{\alpha}{\lambda}$ se može izraziti kao $\left(\frac{1}{\lambda}\right) / \left(\frac{1}{\alpha}\right)$ te na taj način to predstavlja omjer kondukcijskog i konvekcijskog otpora.

5.1.4.2. Raspodjela temperatura u tijelu

Temperaturno polje u tijelu ovisi o čitavom nizu varijabli i konstanti koje nije moguće izraziti nekom diferencijalnom jednadžbom te se, kao i u mnogim prethodnim slučajevima, mora primijeniti dimenzijska analiza.

$$T = f(\alpha, \lambda, a, t, x, y, z, T_p, T_f, l)$$

Dimenzijskom analizom sve su varijable grupirane u tri bezdimenzijske značajke.

Biotova značajka

Predstavlja odnos unutarnjeg i vanjskog otpora prijenosu topline.

$$Bi = \frac{\left(\frac{l}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

$$\boxed{Bi = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}} \quad (160)$$

Često se koristi i recipročna vrijednost:

$$m = \frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha \cdot l}$$

Fourierova značajka

Predstavlja bezdimenzijsko vrijeme.

$$Fo = \frac{a \cdot t}{l^2} \quad (161)$$

Bezdimenzijska temperatura

Predstavlja neostvarenu temperaturnu promjenu.

$$\theta(t) = \frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} \quad (162)$$

$T(t)$ je temperatura u nekom vremenu t .

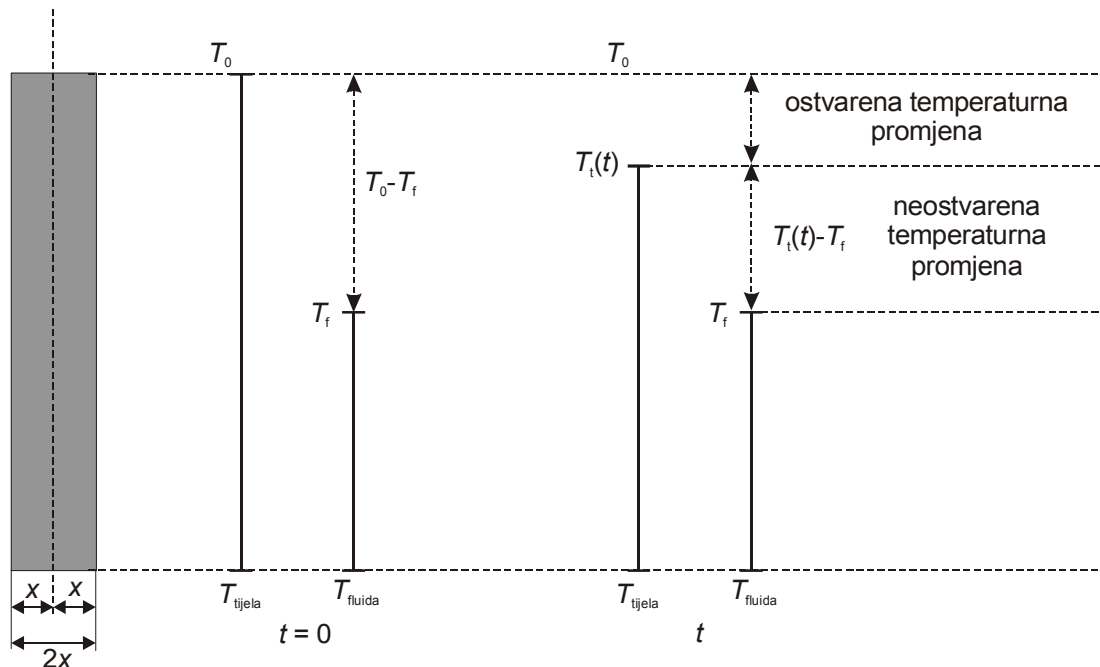
T_0 je temperatura na početku ($t = 0$).

T_f je temperatura fluida.

$T(t) - T_f$ predstavlja neostvarenu temperaturnu promjenu u vremenu t .

$T_0 - T_f$ je maksimalna moguća razlika temperatura.

Neostvarena temperaturna promjena može se ilustrirati na sljedeći način



Slika 5.6 Prikaz temperatura tijela i fluida u vremenu $t=0$ i t ($T_{\text{fluida}} < T_{\text{tijela}}$)

Dakle, neostvarena temperaturna promjena je ona temperaturna razlika koja se još može ostvariti sve dok tijelo ne poprimi temperaturu fluida. (Pretpostavka je da je volumen fluida puno veći od volumena tijela tako da se temperatura fluida praktički ne mijenja).

5.1.4.3. Zagrijavanje (hlađenje) tijela konačnih dimenzija

Promatramo npr. grijanje ili hlađenje s obje strane ploče. U ovom slučaju govori se o prodiranju (penetraciji) topline u tijelo konačnih dimenzija. Ako je vrijeme dovoljno dugačko, temperaturna promjena se ostvaruje u obje (svim) granične plohe.

Ovakav slučaj prodiranja topline izuzetno je složen zbog velikog broja varijabli:

- fizička svojstva,
- geometrijski parametri,
- temperaturne razlike,
- unutarnji i vanjski otpor.

Pri ovakvim kompleksnim sustavima pogodno je primjeniti bezdimenzijske značajke i veličine. Analitičko rješenje je zamišljeno uvođenjem funkcionalne ovisnosti bezdimenzijske temperature o *Biotovoj* i *Fourierovoj* značajci.

$$\theta = f(Bi, Fo)$$

Matematičkom analizom dobiva se rješenje brzo konvergirajućeg beskonačnog reda:

$$\theta = \frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = f_1(Bi) \cdot e^{-a \cdot Fo} + f_2(Bi) \cdot e^{-b \cdot Fo} + \dots$$

Prvi član reda u gornjoj jednadžbi je puno veći u odnosu na ostale pa je uobičajeno rješenje pisati u obliku:

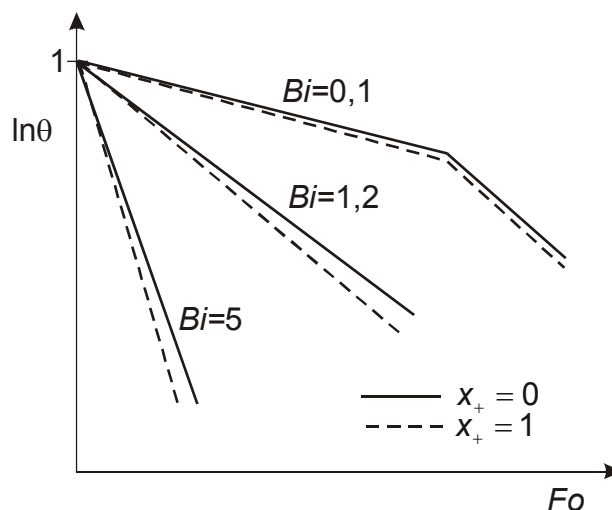
$$\theta = f_1(Bi) \cdot e^{-a \cdot Fo} \quad (163)$$

Za sferu vrijedi jednadžba:

$$\theta = 0,608 \cdot e^{-9,87 \cdot Fo} + 0,152 \cdot e^{-39,5 \cdot Fo} + 0,0076 \cdot e^{-88,8 \cdot Fo} + \dots$$

Kao što je već rečeno, prvi član je puno veći u odnosu na ostale pa se i ovdje kod proračuna koristi samo prvi član.

Slika 5.7. vrijedi za promjenu temperature ploče kod različitih vrijednosti Biotove značajke. Uz konstantnu vrijednost *Bi* značajke, funkcije će imati različiti oblik ukoliko se radi o različitoj geometriji tijela.



Slika 5.7

Iz slike 5.7 vidljivo je da su funkcije različite za različite položaje u tijelu pa tako možemo definirati bezdimenzijsku temperaturu u središtu i na površini tijela:

$$\theta = \frac{T(t, x_+ = 0) - T_f}{T_0 - T_f}$$

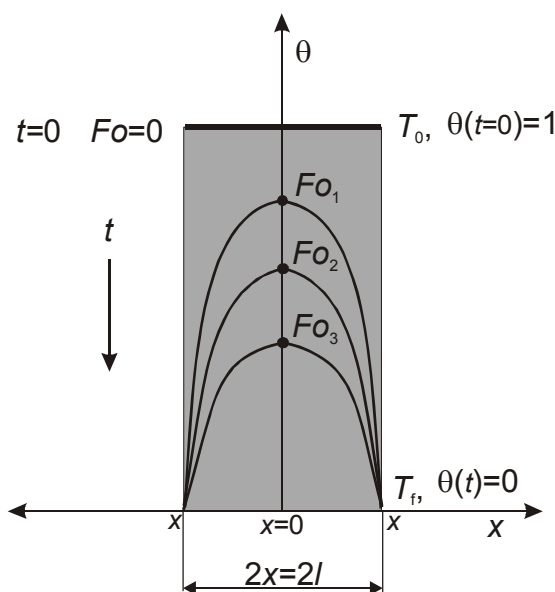
$$\theta = \frac{T(t, x_+ = 1) - T_f}{T_0 - T_f}$$

Raspodjela temperatura u tijelu kod različitih vrijednosti Biotove značajke:

Promatrajmo slučaj da tijelo oblika kugle, temperature T_0 uronimo u srazmjerno veliki volumen vode znatno niže temperature (T_f). Ovisno o toplinskim karakteristikama tijela dolazi i do različitih temperaturnih raspodjela.

1. $Bi > 100$

Vrijednosti koeficijenta toplinske vodljivosti (λ) male su u odnosu na koeficijent prijelaza topline (α). Unutarnji otpor je dakle vrlo velik. Izmjena s okolinom je brza te se temperatura stijenke ploče pri hlađenju trenutno izjednačava s temperaturom okoline, a unutrašnjost tijela ne, već se polagano hladi.



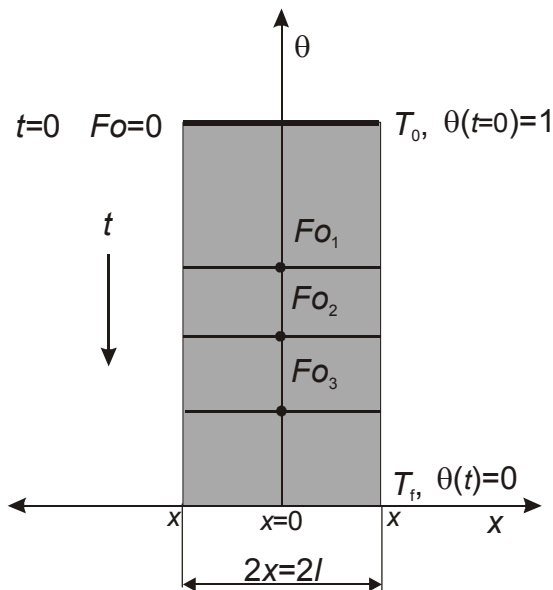
U vremenu $t = 0$ ($Fo = 0$), temperatura tijela je jednolika u cijelom volumenu.

$$\theta_{x_+=0} = \frac{T(t, x_+ = 0) - T_f}{T_0 - T_f}$$

$$\theta_{x_+=1} < \theta_{x_+=-1}$$

2. $Bi < 0,1$

Vrijednosti koeficijenta toplinske vodljivosti (λ) velike su u odnosu na koeficijent prijelaza topline (α), a to znači da je vanjski otpor velik. Hlađenje je brzo, temperatura stijenke ploče pri hlađenju se zbog dobre toplinske vodljivosti tijela neznatno razlikuje od temperature u sredini.

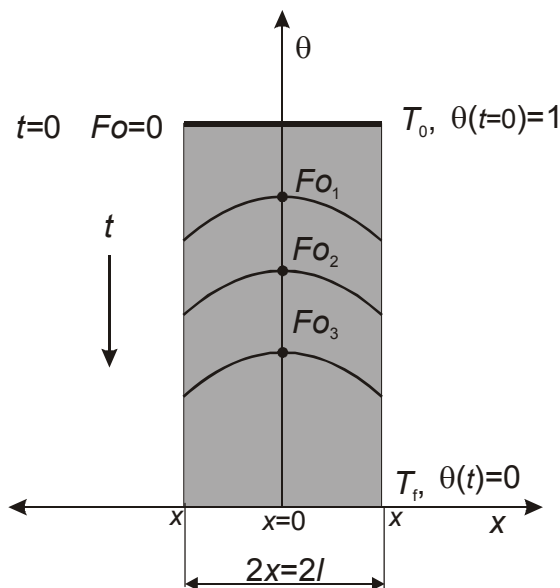


$$\theta_{x_+=1} \approx \theta_{x_+=1}$$

$$\theta_{x_+=1} = \frac{T(t, x_+ = 1) - T_f}{T_0 - T_f}$$

3. $0,1 < Bi < 100$

Promjena temperature u zidu podjednako je ovisna i o unutarnjem i o vanjskom otporu.



Procjena prenesene topline

Količina topline koja se prenosi za vrijeme hlađenja (ili zagrijavanja) može se izračunati na sljedeći način. Toplina koja se prenosi s toplog fluida na hladni medij općenito se izračunava na temelju jednadžbe:

$$Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \Delta T$$

Ukupno (maksimalno moguća) prenesena topline pri hlađenju tijela od početne temperature do temperature fluida:

$$Q_{uk} = Q_{max} = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f)$$

u vremenskom intervalu od $t = 0$ do $t = t_1$ ($Fo = 0$ do Fo_1):

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_1)$$

Ako se temperaturnoj razlici doda i oduzme T_f :

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot [T_0 - T_f - (T_1 - T_f)]$$

Na taj način uvodi se neostvarena temperaturna promjena:

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \cdot \left[1 - \underbrace{\frac{T_1 - T_f}{T_0 - T_f}}_{\theta_1(t_1)} \right]$$

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \cdot (1 - \theta_1)$$

Gornju jednadžbu možemo pisati općenito za bilo koje vrijeme pa dobijemo:

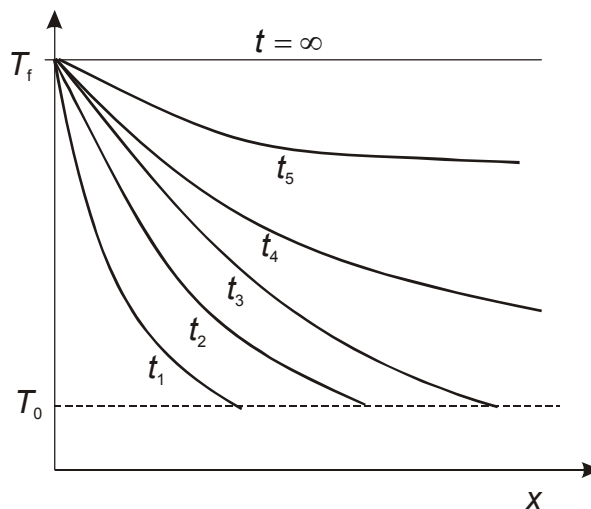
$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \cdot [1 - \theta(t)] \quad (164)$$

odnosno:

$$Q(t) = Q_{uk} \cdot [1 - \theta(t)] \quad (165)$$

5.1.4.4. Zagrijavanje (hlađenje) polubeskonačnog tijela

Penetracija topline kod grijanja ili hlađenja semiinfinitenzimalnog tijela (polubeskonačnog) odvija se samo s jedne strane, odnosno samo u jednom dijelu od ukupne površine (npr. naglo hlađenje Zemljine površine). Površina tijela trenutno se podvrgne visokoj temperaturi (T_f) i održava se na toj temperaturi.



Slika 5.8

Tokom zagrijavanja uspostavlja se različita raspodjela temperatura u ovisnosti o udaljenosti od stijenke. U ovim slučajevima, raspodjela temperatura u tijelu izražava se normalnom raspodjelom (Gausovim integralom vjerojatnosti):

$$\frac{T_f - T(t)}{T_f - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-z^2} dz \quad (166)$$

Parametar z definira se na sljedeći način:

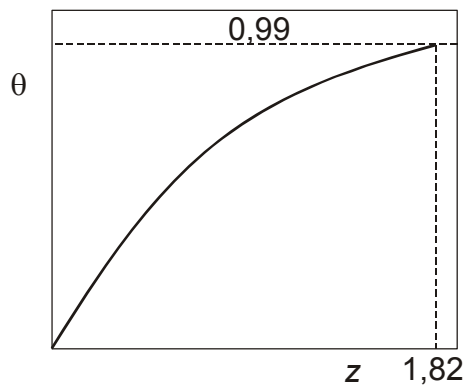
$$z = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \quad (167)$$

Za proračune se u ovim slučajevima uvodi pojam *dubine penetracije* koja se određuje na temelju Gausovog integrala vjerojatnosti (statističke tablice). Dubina penetracije je udaljenost od površine tijela na kojoj se u unutrašnjosti tijela pod utjecajem promjena na površini može ustanoviti promjena bezdimenzijske temperature u vrijednosti od 1% ukupne moguće promjene.

$$\frac{T_f - T(t)}{T_f - T_0} = \theta_n(t) = 0,99 \quad \text{neostvarena promjena}$$

$$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = \theta_o(t) = 0,01 \quad \text{ostvarena promjena}$$

Na temelju vrijednosti parametra z može se iz dijagrama ili statističkih tablica za svaku raspodjelu očitati neostvarena temperaturna promjena.



Slika 5.9

Kod $\theta = 0,99$ vrijednost bezdimenzijske značajke $z = 1,82$, a $x = x_{\text{penetracije}}$. Iz jednadžbe (167) slijedi:

$$\begin{aligned} x_p &= 2 \cdot z \cdot \sqrt{a \cdot t} = 2 \cdot 1,82 \cdot \sqrt{a \cdot t} = 3,64 \cdot \sqrt{a \cdot t} \\ x_p &\cong 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t} \end{aligned} \quad (168)$$

Proračuni se provode uz upotrebu statističkih tablica. Danas se pomoću računala proračuni provode primjenom metode nelinearne regresije.

5.2. Konvekcija

Konvekcija je vrtložni mehanizam prijenosa topline pri čemu se toplina prenosi grupama molekula. Karakterističan je za fluide u gibanju pri čemu se pod konvektivnim prijenosom topline ne podrazumijeva samo izmjena u masi fluida nego čak i značajnije, izmjena između fluida i čvrste površine.

Budući da gibanje može biti uzrokovano bilo zbog lokalne razlike gustoća, ili kao posljedica utjecaja vanjske (narinute) sile, razlikuje se:

- prirodna konvekcija - gibanje je uzrokovano zbog lokalne razlike u temperaturi, a zbog toga i u gustoći te dolazi do spontanog miješanja fluida
- prisilna konvekcija - gibanje je uzrokovano primjenom raznih uređaja (pumpe, ventilatori, miješalice)

Količina prenesene topline bitno ovisi i o hidrodinamičkim uvjetima jer nije svejedno da li se radi o laminarnom ili turbulentnom gibanju fluida. Kod laminarnog strujanja prevladava konduktivni mehanizam, dok kod turbulentnog vrtložni mehanizam.

Općenito, fluks količine topline ovisi o fizikalnim svojstvima, geometrijskim i hidrodinamičkim karakteristikama promatranog sustava.

Fizikalna svojstva fluida

- koeficijent toplinske vodljivosti, λ
- specifični toplinski kapacitet, c_p
- koeficijent temperaturene vodljivosti, a
- dinamička viskoznost, η
- gustoća, ρ

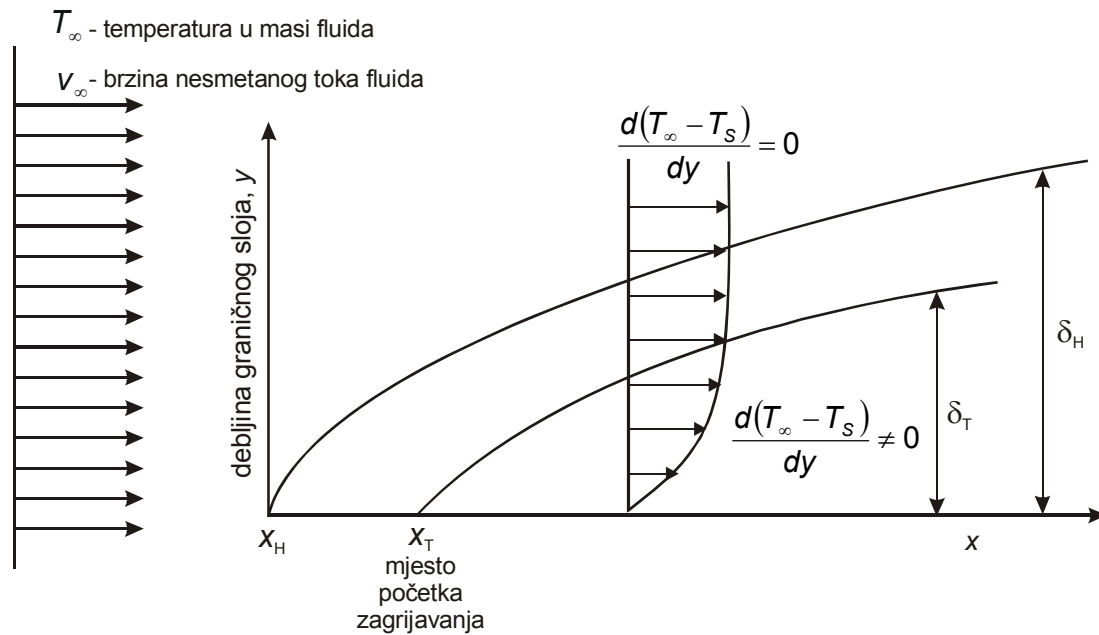
Geometrijske karakteristike

- veličina i oblik površine (ravna ili zakrivljena)

Hidrodinamičke karakteristike

- srednja brzina strujanja
- Reynoldsova značajka
- debljina hidrodinamičkog graničnog sloja

Pri zagrijavanju gibajućeg fluida, osim formiranja hidrodinamičkog graničnog sloja, dolazi do formiranja **toplinskog graničnog sloja** koji predstavlja glavni otpor prijenosu topline.



Slika 5.10

Debljina toplinskog graničnog sloja je ona debljina u kojoj postoji toplinski gradijent, a izvan toplinskog graničnog sloja temperatura mase fluida je jednolična. Na slici 5.10 x_H predstavlja početak razvoja hidrodinamičkog graničnog sloja, dok je x_T točka početka razvijanja toplinskog graničnog sloja.

Odnos između debljine hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja definira se prema *Polhausenu* na sljedeći način:

$$\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{3}} \quad (169)$$

Prandtlova značajka (Pr)

Predstavlja omjer difuzivnosti količine gibanja (izražene kinematičkom viskoznošću) i temperaturne difuzivnosti (izražene koeficijentom toplinske vodljivosti).

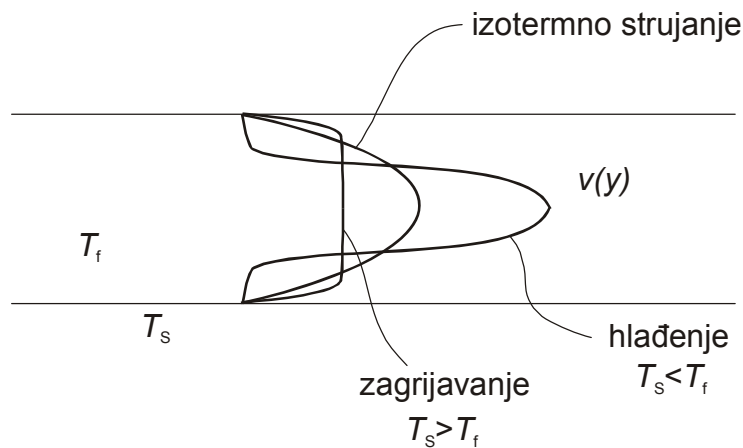
$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\frac{v \cdot l}{a}}{\frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}} = \frac{\eta}{\rho \cdot a}$$

$$\boxed{Pr = \frac{v}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}} \quad (170)$$

Kod viskoznih tekućina najčešće je $Pr > 1$ što znači da je hidrodinamički granični sloj veći od toplinskog. Kod plinova su debljine slojeva približno jednake ($Pr = 1$). Izuzetak pravila su tekući metali kod kojih je $Pr \approx 10^{-2}$ i ne vrijedi jednačina (169).

Budući da se promjenom temperature mijenjaju i fizikalna svojstva fluida, nije svejedno da li se radi o hlađenju ili zagrijavanju. Tako npr., brzina prijenosa topline kod kapljevina veća je kod zagrijavanja nego kod hlađenja. Razlike u temperaturi

stijenke i fluida utječu na raspodjelu brzina, odnosno formiranje različitih brzinskih profila.



Slika 5.11

Npr. ukoliko je temperatura stijenke veća od temperature fluida, viskoznost fluida uz stijenku je manja od viskoznosti u masi fluida te je i debljina hidrodinamičkog, a istovremeno i toplinskog, graničnog sloja manja tako da je i otpor prijenosu topline manji.

Koeficijent prijelaza topline

Određivanje količine topline koja se prenosi sa stijenke na fluid (ili obrnuto), temelji se na teoriji graničnog sloja te na pretpostavci da je glavni otpor prijenosu topline u toplinskom graničnom sloju (laminarnom podsloju) za potpuno razvijeni tok, gdje se topline prenosi molekularnim mehanizmom – kondukcijom. Uz to treba naglasiti da je koeficijent toplinske vodljivosti fluida nizak pa je zato otpor velik.

Temeljna pretpostavka je vezana uz što točnije definiranje koeficijenta prijelaza topline (α) čija vrijednost kvantitativno definira brzinu izmjene topline konvekcijom. Koeficijent prijelaza topline ovisi o čitavom nizu parametara te se najčešće određuje eksperimentalno:

$$\alpha = f(v, \rho, \eta, \lambda, \beta, c_p, \Delta T, l, d) \quad [\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1}]$$

gdje je: v - srednja brzina strujanja
 β - koeficijent toplinske ekspanzije
 l, d - linearne dimenzije

Provedbom dimenzijske analize izvedene su bezdimenzijske značajke koje su funkcionalno povezane korelacijskim jednadžbama koje se koriste pri opisivanju prijenosa topline konvekcijom uz uvjet geometrijske i dinamičke sličnosti.

Nusseltova značajka

Predstavlja odnos između ukupno prenesene topline i topline prenesene kondukcijom.

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} \quad (171)$$

Podsjeća na Biotovu značajku međutim kod Nusseltove značajke koeficijent toplinske vodljivosti odnosi se na fluid, dok je kod Biotove značajke to svojstvo čvrstog tijela.

Stantonova značajka

Predstavlja odnos između ukupno prenesene topline i raspoložive toplinske energije fluida.

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\frac{\alpha \cdot l}{\lambda}}{\frac{v \cdot d \cdot \rho \cdot c_p \cdot \eta}{\eta \cdot \lambda}}$$

$$St = \frac{\alpha}{c_p \cdot v \cdot \rho} \quad (172)$$

Grashoffova značajka

Mjerodavna je kod prirodne konvekcije, a predstavlja omjer između sile uzgona uzrokovane razlikom gustoća i molekularnog trenja.

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot l^3 \cdot \Delta T}{\nu^2} \quad (173)$$

$$\beta \cdot \Delta T = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (174)$$

Bezdimenzijske korelacijske jednačbe prijenosa topline, dobivene dimenzijskom analizom, u općem obliku mogu se svesti u dvije osnovne grupe:

- prisilna konvekcija $Nu = f(Re, Pr, \text{geometrijske karakteristike})$
- prirodna konvekcija $Nu = f(Gr, Pr, \text{geometrijske karakteristike})$

Kod plinova je Prandtlova značajka praktički neovisna o temperaturi pa slijedi:

$$Nu = f(Re)$$

Budući da je intenzitet prijenosa različit ovisno o tome da li se fluid grije ili hladi, često se primjenjuju indeksi f (fluid) i s (stijenka) uz značajke i druge veličine te se uvode i bezdimenzijski parametri:

$$\frac{T_f}{T_s} \quad - \text{značajan za plinove}$$

$$\frac{\eta_f}{\eta_s}, \frac{Pr_f}{Pr_s} \quad - \text{značajni za kapljevine}$$

Indeks (f) ukazuje na svojstva mase fluida, a indeks (s) na svojstva fluida neposredno uz stijenku.

Budući da fizikalne karakteristike fluida ovise o temperaturi potrebno je definirati mjerodavnu temperaturu.

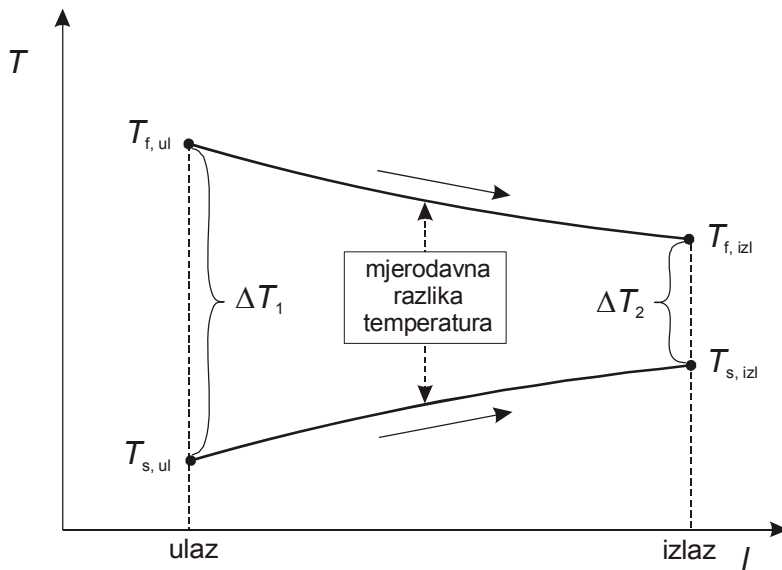
U graničnom sloju često se koristi aritmetička sredina: $\bar{T}_\delta = \frac{T_s + T_f}{2}$.

Ako se temperatura mijenja i duž toka:

$$\bar{T}_f = \frac{T_{s,ul} + T_{s,izl}}{2} \pm \frac{(T_{f,ul} - T_{s,ul}) - (T_{f,izl} - T_{s,izl})}{\ln\left(\frac{T_{f,ul} - T_{s,ul}}{T_{f,izl} - T_{s,izl}}\right)}$$

+ fluid se hladi
- fluid se grije

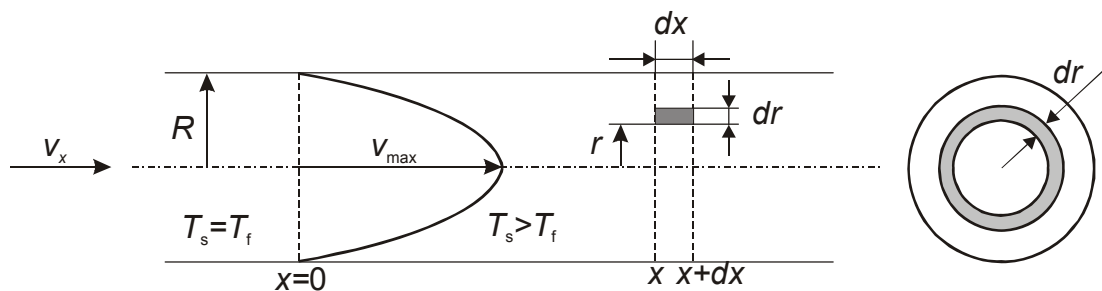
$$\bar{T}_f = \frac{T_{s,ul} + T_{s,izl}}{2} + \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)} \quad (175)$$



Slika 5.12

5.2.1. Prijenos topline pri laminarnom toku u cijev

Za egzaktno rješavanje problema vezanih uz prijenos topline pri laminarnom strujanju promatra se definirani volumen fluida koji se giba u laminarnim uvjetima.



Slika 5.13

Na mjestu $x = 0$ javlja se toplinski fluks sa zida na masu fluida (počinje zagrijavanje) i to:

1. Kondukcija u radijalnom smjeru (\dot{Q}_{rad})

$$q_r \cdot 2r\pi \cdot dx - q_{r+dr} \cdot 2r\pi \cdot dx = -2r\pi \cdot \frac{\partial q_r}{\partial r} \cdot dr \cdot dx$$

ulaz - izlaz

2. Kondukcija u aksijalnom smjeru (\dot{Q}_{aks})

$$q_x \cdot 2r\pi \cdot dx - q_{x+dx} \cdot 2r\pi \cdot dx = -2r\pi \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dr$$

ulaz - izlaz

3. Viskozna disipacija (generiranje toplinske energije zbog viskoznog trenja)

$$2r\pi \cdot dr \cdot dx \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \tau_x = 2r\pi \cdot dr \cdot dx \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

4. Brzina akumulacije toplinske energije (\dot{Q}_{acc})

$$v_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)_x \cdot 2r\pi \cdot dr - v_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)_{x+dx} \cdot 2r\pi \cdot dr = 2r\pi \cdot dr \cdot v_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx$$

Članovi pod 2. i 3. su zanemarivi u odnosu na članove 1. i 4. te se bilanciranjem i dijeljenjem s $(2\pi \cdot dx \cdot dr)$ dobiva:

$$r \cdot \rho \cdot c_p \cdot v_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = 0 - \frac{\partial(r \cdot q_r)}{\partial r} \quad (176)$$

Prema *I* Fourierovom zakonu:

$$q_r = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

pa se fluks u radijalnom smjeru može pisati na sljedeći način:

$$\frac{\partial(r \cdot q_r)}{\partial r} = -\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Uvođenjem izraza za raspodjelu brzine:

$$v_x = \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot (R^2 - r^2) = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot R^2$$

$$v_x = 2 \cdot v_{\text{sr}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Konačno jednadžba (176) prelazi u oblik:

$$\boxed{-\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2 \cdot r \cdot \rho \cdot c_p \cdot v_{\text{sr}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = 0} \quad (177)$$

Jednadžba (177) predstavlja *Graetzovu* diferencijalnu jednadžbu koja vrijedi za prijenos topline pri laminarnom strujanju u cijevi. Ova jednadžba nema jednoznačno rješenje i rješava se uvođenjem određenih ograničenja.

U praksi se primjenjuju bezdimenzijske korelacijske jednačbe koje se dobivaju na temelju dimenzijske analize:

$$Nu = f(Re, Pr, \text{geometrijskih karakteristika})$$

Parametri jednačbe ovise o vremenu trajanja izmjene topline što se izražava Graetzovom značajkom:

$$Gz = \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{l} \right)^{-1}$$

$$Gz = \frac{a \cdot l}{v \cdot d^2} \quad (178)$$

Graetzova značajka predstavlja bezdimenzijsko vrijeme, odnosno bezdimenzijski položaj tako da ukazuje na vrijeme izmjene topline i duljinu puta izmjene topline.

$$Gz < 0,05$$

Blizina ulaza u cijev; kratko vrijeme izmjene.

$$Nu = 1,08 \cdot \left(\frac{a \cdot l}{v \cdot d^2} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

Općenito, na malim udaljenostima od ulaza u cijev vrijedi da je Nusseltova značajka proporcionalna sa $l^{-\frac{1}{3}}$.

$$0,05 < Gz < 5$$

Kod malih brzina strujanja (laminarno strujanje) ili vrlo dugačkih cijevi tako da su temperature fluida i stijenke na izlazu praktički jednake.

$$Nu = 0,5 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{l} \right)$$

$$Gz > 5$$

Razvijeni laminarni tok.

Izraz koji se najčešće koristi pri prijenosu topline je *Sieder-Tateova jednačba* koja ima veliku praktičnu primjenu:

$$Nu = 1,86 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14}$$

Za različite geometrijske karakteristike sustava koriste se različite vrijednosti konstanti i eksponenata. Na temelju korelacijskih jednačbi moguće je procijeniti koeficijent toplinske vodljivosti $\left(\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d} \right)$ uz strogo poštivanje principa sličnosti.

5.2.2. Prijenos topline pri turbulentnom toku u cijev

Ovi slučajevi se najčešće susreću te su često proučavani. Osnovna jednadžba (bezdimenzijska korelacija) koja se i danas primjenjuje, predložili su *Dittus* i *Boelter* za glatku cijev:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^n \quad (179)$$

Vrijednost eksponenta n ovisi da li se radi o grijanju ili hlađenju:

$$n = 0,4 \quad \text{grijanje}$$

$$n = 0,3 \quad \text{hlađenje}$$

Ukoliko se temperatura fluida i temperatura stijenke znatno razlikuju potrebno je izraz korigirati s omjerom viskoznosti u struji fluida i uz stijenku:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (180)$$

Izrazi (179) i (180) vrijede za *turbulentno* područje kada je:

$$5\,000 < Re < 200\,000$$

i za potpuno razvijeni tok koji se postiže ukoliko je $\frac{l}{d} > 50$,

te za: $0,7 < Pr < 50$

Za ulazno područje dok strujanje još nije potpuno razvijeno, Nusselt je dao izraz:

$$Nu = 0,036 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{d}{l} \right)^{0,055}$$

Utjecaj hidrodinamičkih uvjeta na vrijednost koeficijenta prijelaza topline (α)

Iz zakona očuvanja, topline koja se prenosi s fluida na stijenku jednaka je toplini koja se provodi kroz toplinski granični sloj fluida:

$$q_{\text{KONV}} = q_{\text{KOND}}$$

$$\alpha \cdot \Delta T = -\frac{\lambda_f}{\delta_T} \cdot \Delta T$$

Na temelju te jednadžbe slijedi da se koeficijent prijelaza topline može definirati kao:

$$\alpha = \frac{\lambda_f}{\delta_T}$$

Promjenom hidrodinamičkih uvjeta, koji su definirani Re -značajkom, dolazi do promjene debljine hidrodinamičkog, a istovremeno i debljine toplinskog graničnog sloja. Ranije je pokazano da debljina hidrodinamičkog graničnog sloja opada s Re -značajkom:

$$\delta_H \sim \frac{1}{Re_x^m}$$

Budući da je $\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{3}}$, na analogan način se može izraziti i debljina toplinskog graničnog sloja:

$$\delta_T \sim \frac{1}{Re_x^n}.$$

Iz toga slijedi da se povećanjem Re -značajke smanjuje debljina toplinskog graničnog sloja, te se na taj smanjuje i otpor prijenosu topline, odnosno povećava se koeficijent prijelaza topline α . Na temelju tih spoznaja može se promjenom hidrodinamičkih uvjeta strujanja utjecati na brzinu prenesene topline.

5.2.3. Prijenos topline u miješalicama

Prijenos topline u miješalici ovisan je, kao i kod strujanja kroz cijev, o karakteru strujanja koje izaziva miješalo. Kod malih vrijednosti Reynoldsa, količina gibanja koja se iz vrtložne mase fluida prenosi na granični sloj je mala pa je i količina prenesene topline mala. a koeficijent prijelaza može se približno računati na temelju penetracije količine gibanja koja se odvija u hidrauličkom graničnom sloju ($x_p = \delta_H$):

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_T} = \frac{\lambda}{\delta_H} \cdot \frac{\delta_H}{\delta_T} = \frac{\lambda}{\delta_H} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cong \frac{\lambda}{x_p} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (181)$$

Uzme li se u obzir jednadžba (167) kojom se definira penetracija topline, jednadžba (181) prelazi u sljedeći oblik:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

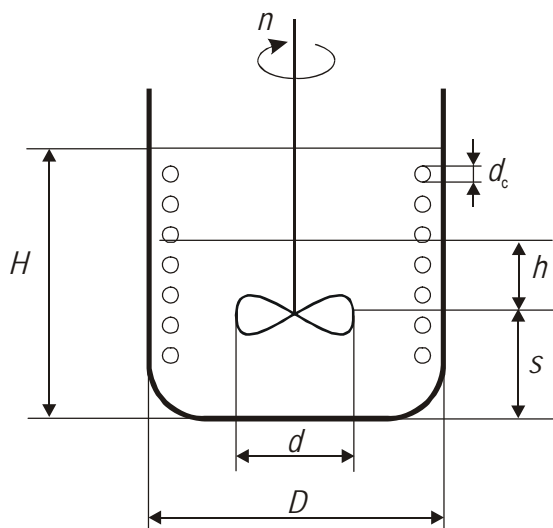
Vrijeme penetracije može se definirati kao omjer uzdužne udaljenosti zida od mjesta dodira s kapljevnom, x i srednje brzine uz stijenku ($v_s = n \cdot d$) pa se izraz za koeficijent prijelaza topline piše na sljedeći način:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot \frac{x}{v_s}}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

Budući da nazivnik predstavlja debljinu hidrauličkog graničnog sloja, a ujedno i x_p na čiju debljinu utječe Re -značajka slijedi da je:

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Za velike vrijednosti Reynoldsove značajke debljina graničnog sloja je praktički konstantna, a ona je osnovna veličina koja utječe na koeficijent prijelaza topline.

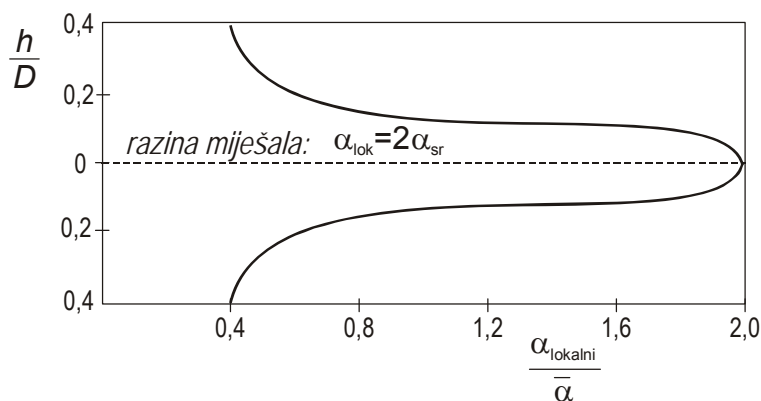


h - vertikalna udaljenost
lokalnog koeficijenta α
od miješala
 d_c - promjer spiralne
cijevi (zagrijavanje ili
hlađenje)

Slika 5.14

Na slici 5.14 prikazana je shematski miješalica definiranih geometrijskih karakteristika. Budući da po volumenu miješalice postoji i različita slika strujnog toka unutar mase fluida, različite su i vrijednosti lokalnog koeficijenta prijelaza topline.

Srednja vrijednost koeficijenta prijelaza topline može se odrediti iz funkcionalne ovisnosti Nusseltove značajke. Izrazi su različiti ovisno o geometrijskim karakteristikama miješalice. Srednji koeficijent prijelaza topline mijenja se s vertikalnom udaljenošću od miješala.



Slika 5.15

Najveći lokalni koeficijent prijelaza topline postignut je u razini miješala.

Jedan od praktički primjenjivih izraza za određivanje α_{sr} :

$$Nu = \frac{\alpha_{sr} \cdot d}{\lambda} = 0,75 \cdot Re^{\frac{2}{3}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta_f}{\eta_s} \right)^{0,14}$$

5.2.4. Prijelaz topline pri optjecanju

Pri strujanju fluida oko čvrstog tijela (ili obrnuto), pri čemu su temperature tijela i fluida različite, dolazi do formiranja hidrodinamičkog graničnog sloja unutar kojeg egzistira i toplinski granični sloj. Debljina toplinskog graničnog sloja povećava se u smjeru gibanja pa se zbog toga i koeficijent prijalaza topline smanjuje tako dugo dok se debljina toplinskog graničnog sloja ne ustali.

Na temelju već poznatog izraza za debljinu hidrodinamičkog graničnog sloja pri optjecanju oko ravne ploče $\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt{Re_x}}$ i poznate relacije $\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{3}}$, slijedi:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = \frac{x}{\delta_T} \cdot \frac{\delta_H}{\delta_H} = \frac{x}{\delta_H} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$Nu = \frac{1}{k} \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (182)$$

Jednadžba (182) vrijedi za optjecanje oko ravne ploče, za laminarni granični sloj ($Re_x < 2 \cdot 10^5$). Kod većih vrijednosti Re -značajki i različitih geometrijskih oblika čvrstog tijela, koriste se bezdimenzijske korelacijske jednadžbe u kojima su konstante i eksponenti eksperimentalno određeni.

Tako npr. za razvijeno turbulentno strujanje zraka oko kugle ($20 < Re < 1,5 \cdot 10^5$) vrijedi empirijska korelacija:

$$Nu = 0,31 \cdot Re^{0,6} \quad (Pr_{\text{zrak}} \approx 1)$$

Za ostale plinove:

$$Nu = 0,37 \cdot Re^{0,6} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

Kod kapljevina za područje $1 < Re < 7 \cdot 10^4$ za kuglu vrijedi empirijska korelacija:

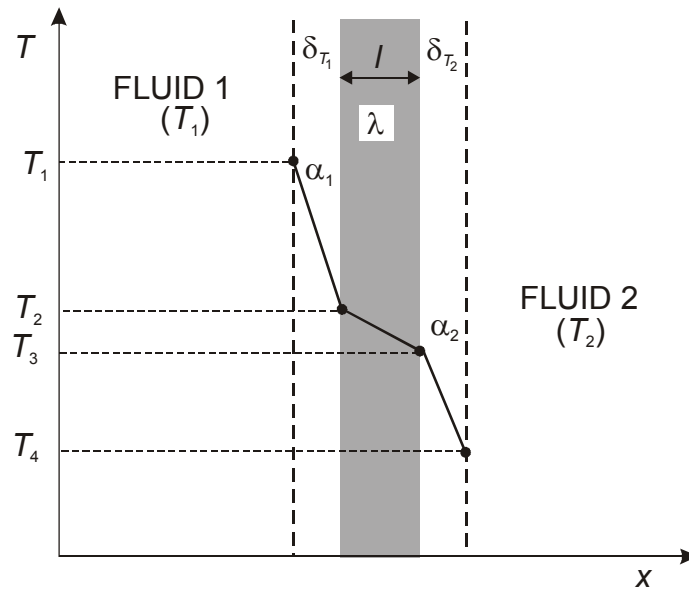
$$Nu = 2,0 + 0,60 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

Za ostale geometrijske oblike primjenjuju se analogne korelacijske jednadžbe, a vrijednosti konstanti i eksponenata su također eksperimentalno određene.

5.2.5. Prolaz topline

Ukoliko se topline prenosi s jednog fluida na drugi koji su međusobno odijeljeni čvrstom stijenkom, govorimo o *prolazu topline*.

Za ilustraciju promotrimo razmjenu topline između toplog i hladnog fluida koji struje s različitih strana uz ravnu stijenku. Pri strujanju fluida formira se hidrodinamički granični sloj unutar kojeg je i toplinski granični sloj (δ_T) koji predstavlja otpor pri prijelazu topline s fluida a stijenku (ili obrnuto).



Slika 5.16

Neka je temperatura toplijeg fluida T_1 , a hladnijeg T_2 .

Općenito vrijedi:

$$\text{fluks topline} = \frac{\text{pokretačka sila}}{\text{otpor}}$$

$$q = \frac{\Delta T}{R_{\text{toplinski}}}$$

Za sustav u kojem postoji više toplinskih otpora u seriji u stacionarnim uvjetima vrijedi:

$$q_{\text{uk}} = \frac{\Delta T_{\text{uk}}}{\sum_{i=1}^n R}$$

Prijelaz topline s fluida 1 na stijenku:

$$q = \alpha_1 \cdot (T_1 - T_2)$$

Kondukcija kroz stijenku:

$$q = \frac{\lambda}{l} \cdot (T_2 - T_3)$$

Prijelaz topline sa stijenke na fluid 2:

$$q = \alpha_2 \cdot (T_3 - T_4)$$

Uz uvjet da je proces stacionaran, dakle da je $q = \text{konst.}$, zbrajanjem gornjih jednadžbi dobijemo:

$$q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = T_1 - T_4$$

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} = \frac{\Delta T_{\text{uk}}}{\sum_{i=1}^n R} \quad (183)$$

Izraz u nazivniku predstavlja sumu toplinskih otpora, a recipročna vrijednost sume svih toplinskih otpora predstavlja koeficijent prolaza topline:

$$K = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n R} \quad (184)$$

Vrijednost koeficijenta prolaza topline često se definira najvećim otporom u seriji.

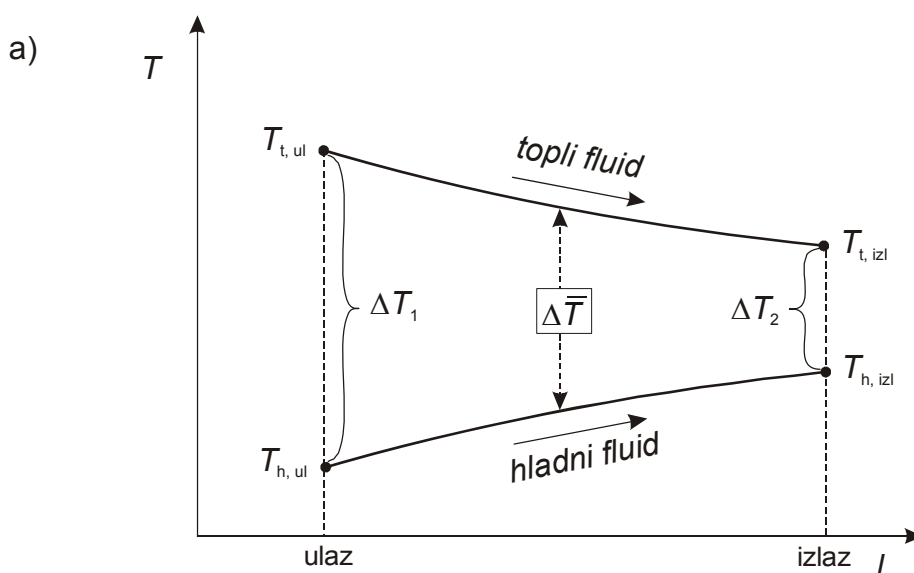
Mjerodavna površina izmjene topline i razlika temperatura

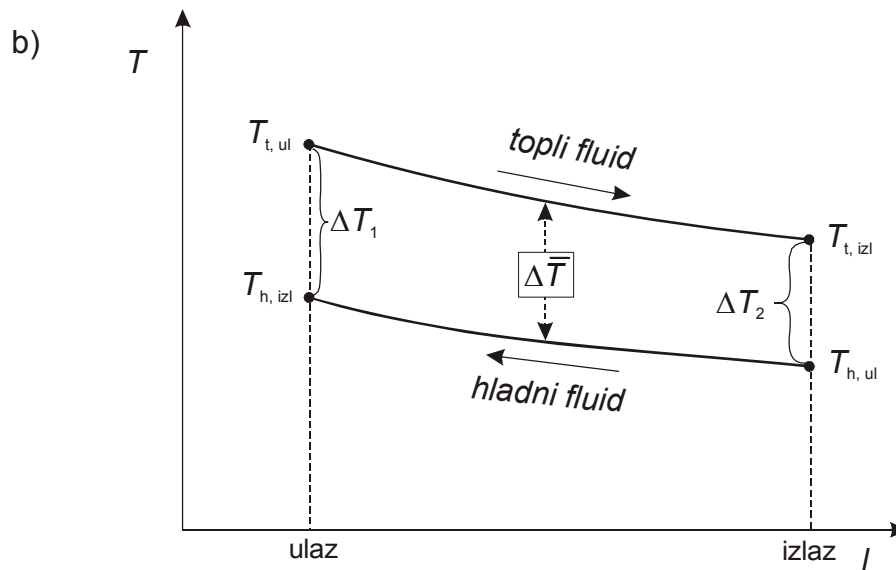
Za procjenu prenesene topline nužno je poznavati površinu izmjene topline te se primjenjuje bilancna jednadžba:

$$\dot{Q} = K \cdot A \cdot \Delta T$$

Ukoliko se radi o ravnoj stijenci tada su površine s obje strane jednake. Međutim, kod zakrivljenih stijenki se mora definirati mjerodavna površina, a to je površina na strani onog fluida koji pruža veći otpor prijenosu topline, odnosno čiji je koeficijent prijelaza topline manji. Ukoliko su koeficijenti prijelaza topline istog reda veličine, uzima se srednja vrijednost površina.

Budući da se temperaturna razlika između toplog i hladnog fluida mijenja od ulaza do izlaza (vidi slike), potrebno je definirati mjerodavnu razliku temperatura koja se koristi pri proračunu.





Slika 5.17 Dijagram promjene temperatura
toplog i hladnog fluida s duljinom izmjene topline
a) istosmjerno strujanje
b) protustrujno strujanje

Ako je $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} < 2$ koristi se aritmetička srednja vrijednost temperatura:

$$\Delta \bar{T}_a = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}$$

Ako je $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} > 2$ koristi se logaritamska srednja vrijednost temperatura:

$$\Delta \bar{T}_{LM} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$$

5.3. Radijacija (toplinsko zračenje)

Prijenos topline konvekcijom i kondukcijom praćen je, u manjoj ili većoj mjeri, pojavom toplinskog zračenja. Prijenos topline zračenjem je to veći što je i temperatura toplinskog izvora veća. Uzrokovan je intramolekularnim i atomskim promjenama zbog čega se različiti oblici energije pretvaraju u energiju elektromagnetskog zračenja uz uvjet da je temperatura izvora veća od 0 K. Energija se prenosi elektromagnetskim valovima različitih valnih duljina, a poseban značaj imaju oni valovi koji se nakon apsorpcije drugog tijela (koje prima energiju) ponovno pretvaraju u toplinsku energiju. To su svjetlosni ($\lambda = 0,4 - 0,8 \mu\text{m}$) i infracrveni dijelovi spektra ($\lambda = 0,8 - 40 \mu\text{m}$). Zračenje u rasponu ovih valnih duljina poznato je kao toplinsko zračenje.

Energetska bilanca temelji se na pojavama prirodnog toplinskog zračenja te se ti osnovni zakoni mogu ovdje primijeniti:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_A + \dot{Q}_R + \dot{Q}_P \quad (185)$$

\dot{Q} - energija zračenja

\dot{Q}_A - apsorbirana energija

\dot{Q}_R - reflektirana energija

\dot{Q}_P - energija koja prolazi kroz tijelo

Dijeljenjem s \dot{Q} jednažba (185) izražava se u bezdimenzijskom obliku:

$$A + R + P = 1$$

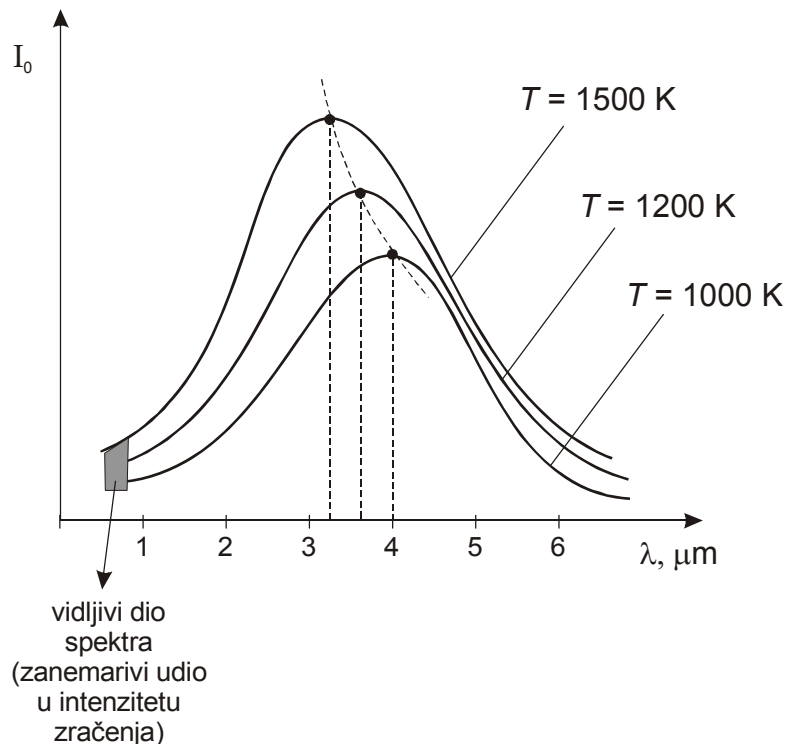
Slijede tri krajnja slučaja:

- $A = 1$ ($R = P = 0$) - ukupna energija koja je pristigla do tijela je i apsorbirana. To je slučaj kod **apsolutno crnog tijela**.
- $R = 1$ ($A = P = 0$) - energija se u potpunosti reflektira što je slučaj kod **apsolutno bijelog tijela**.
- $P = 1$ ($A = R = 0$) - sva energija prolazi kroz tijelo što će biti slučaj kod **diatermičkog tijela**.

U prirodi takovi ekstremi ne postoje, već su tijela manje ili više **siva**, a odnosi između apsorbirane, reflektirane energije i energije koja prolazi kroz tijelo ovise o prirodi tijela, njegovoj temperaturi, valnoj duljini zračenja te o karakteristikama površine tijela (hrapava ili glatka).

Čvrsta tijela apsorbiraju i reflektiraju energiju zračenja svih valnih duljina, znači u kontinuiranom dijelu spektra, dok **plinovi** apsorbiraju ili reflektiraju toplinsku energiju u strogo definiranim dijelovima spektra, ali su većim dijelom prozračni. Površine bijele boje dobro reflektiraju energiju vidljivog dijela spektra (hladnjaci, cisterne i spremnici za lako hlapljive kapljevine). Prozorsko staklo prozračno je za svjetlosno zračenje, a nepropusno za UV i IR. Energiju koja se emitira u infracrvenom (IR) dijelu spektra, bijela tijela međutim apsorbiraju gotovo isto kao i crna. Općenito, tijela glatke i polirane površine dobro reflektiraju toplinsku energiju. Dakle, kod čvrstih tijela i kapljevine $P = 0$, dok su plinovi diatermička tijela ($P = 1$).

Intenzitet zračenja apsolutno crnog tijela ovisan je o temperaturi i valnoj duljini (*Planckov zakon*). Porastom temperature povećava se i intenzitet zračenja, a maksimum krivulje pomiče se prema kraćim valnim duljinama (slika 5.17).



Slika 5.18

Wienov zakon pomaka maksimuma intenziteta zračenja kaže da se povećanjem temperature, maksimalna količina energije pomiče u područje nižih temperatura (slika 5.18).

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}$$

Planckov zakon

Planck je predložio izraz za izračunavanje intenziteta zračenja apsolutno crnog tijela.

$$I_0 = \frac{c_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad (186)$$

- λ - valna duljina, m
- T - temperatura, K
- c_1 - konstanta ($3,17 \cdot 10^{16} \text{ W m}^{-2}$)
- c_2 - konstanta ($1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m K}$)

Intenzitet zračenja se može izraziti jednadžbom $I = \frac{dq}{d\lambda}$

te integriranjem jednadžbe (186) dobijemo:

$$q_0 = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot (e^{c_2/\lambda T} - 1)} \cdot d\lambda = \frac{6,494 \cdot c_1}{c_2^4} \cdot T^4$$

(Stefan-Boltzmanov zakon) $q_0 = \sigma_0 \cdot T^4$ (187)

σ_0 - Boltzmanova konstanta ($5,77 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)

Dakle, sposobnost zračenja apsolutno crnog tijela proporcionalna je četvrtoj potenciji apsolutne temperature i vrijedi za zračenje u svim smjerovima.

Zbog pogodnosti ovaj se zakon piše u obliku:

$$q_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (188)$$

gdje je c_0 koeficijent zračenja apsolutno crnog tijela ($5,77 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$).

Pokazalo se da se navedeni zakon može primjeniti i na siva tijela pri čemu je omjer intenziteta zračenja sivog i apsolutno crnog tijela konstantan kod svih valnih duljina, a predstavlja relativnu sposobnost zračenja i naziva se *stupanj crnoće*.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{q}{q_0} = \varepsilon = \text{konst.}$$

Koeficijent zračenja može se izvesti iz stupnja crnoće:

$$\varepsilon = \frac{q}{q_0} = \frac{c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4}{c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4} = \frac{c}{c_0}$$

odnosno:

$$c = \varepsilon \cdot c_0 \quad (189)$$

Stupanj crnoće kreće se u rasponu od 0 do 1 ovisno o karakteru promatranog tijela.

Fluks toplinske energije zračenja sivog tijela izražava se na sljedeći način:

$$q_0 = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 = c_0 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (190)$$

Kirchhoffov zakon

Ovaj zakon povezuje emitiranu i apsorbiranu energiju. Omjer emitirane i apsorbirane energije je konstantan za sva tijela i jednak je sposobnosti zračenja apsolutno crnog tijela.

$$\frac{q_1}{A_1} = \frac{q_2}{A_2} = \dots = \frac{q_0}{A_0} = q_0$$

q_0 - fluks energije zračenja apsolutno crnog tijela

q - fluks energije zračenja sivog tijela

$A_0 = 1$ - sposobnost apsorpcije apsolutno crnog tijela

A - sposobnost apsorpcije sivog tijela

Ukoliko se q_0 izrazi pomoću Stefan Boltzmanovog zakona:

$$q_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

a za sivo tijelo:

$$q = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

slijedi:

$$\frac{c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4}{A} = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

odnosno

$$c = A \cdot c_0 \quad (191)$$

Iz jednadžbe (189) i (191) slijedi:

$$A = \varepsilon$$

Dakle, sposobnost apsorpcije tijela (A) brojčano je jednaka stupnju crnoće (ε).

Budući da se i A i ε kreću u intervalu od 0 do 1, zaključuje se da je sposobnost zračenja realnog sivog tijela uvijek manja od sposobnosti zračenja apsolutno crnog tijela pri određenoj temperaturi. Dalje, može se zaključiti da je sposobnost zračenja tijela utoliko veća ukoliko je veća njegova sposobnost apsorpcije i obrnuto. Tijela koja dobro reflektiraju energiju zračenja, zrače vrlo dobro. U krajnjem slučaju sposobnost zračenja apsolutno bijelog tijela jednaka je nuli.

5.3.1. Prijenos topline između dvije ravne ploče

Prijenos topline između dvije ravne ploče može se izraziti na sljedeći način:

$$q = q_1 - q_2 = c_1 \cdot \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - c_2 \cdot \left(\frac{T_2}{100} \right)^4$$

odnosno:

$$q = c_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (192)$$

gdje je c_{1-2} ukupni koeficijent zračenja tijela ili tzv. *reducirani koeficijent zračenja*. Reducirani koeficijent zračenja izražava se na temelju pojedinačnih koeficijenata zračenja:

$$c_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}} \quad (193)$$

Izraze li se koeficijenti zračenja preko stupnja crnoće ($c = \varepsilon \cdot c_0$) jednadžba (193) piše se u obliku:

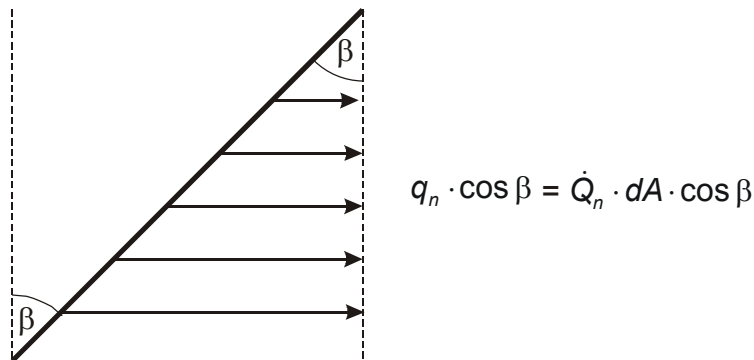
$$c_{1-2} = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Reducirani stupanj crnoće definira se na sljedeći način:

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Lambertov zakon definira energiju zračenja u određenom pravcu. Energija zračenja u pravcu različitom od normalnog na površinu smanjuje se s kosinusom kuta.

$$q = q_n \cdot \cos \beta$$



Slika 5.19

Ukoliko se toplinsko zračenje odvija između dvije površine koje su pod određenim kutom, toplinski tok je proporcionalan projekciji površine vidljivoj iz položaja druge površine i obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti. Za dva tijela u prostoru vrijedi:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_n \cdot \underbrace{\frac{A_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot A_2 \cdot \cos \beta_2}{l^2}}_{\varphi}$$

odnosno:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_n \cdot \varphi$$

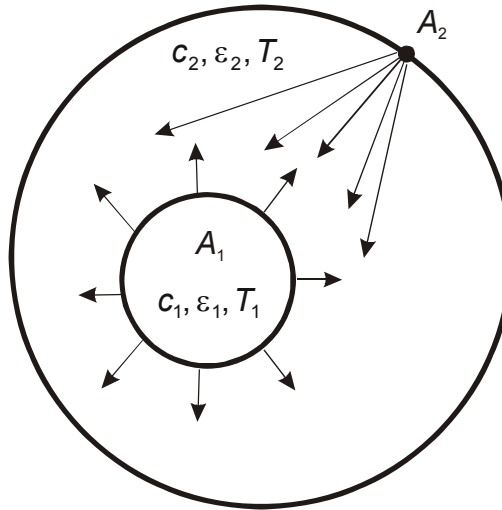
gdje je φ vidni kut.

Konačno slijedi:

$$q = c_{1-2} \cdot \varphi \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (194)$$

5.3.2. Zračenje u zatvorenom prostoru

Za ilustraciju se razmatra slučaj izmjene topline između dviju površina pri čemu je jedna u potpunosti okružena drugom.



Slika 5.20

Na tijelo A_1 dospjeva samo dio energije zračenja s tijela A_2 . Mjerodavna je površina stoga manja površina A_1 .

Izmjenjena topline može se pisati na sljedeći način:

$$\dot{Q}_{1-2} = c_{1-2} \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (195)$$

pri čemu je ukupni koeficijent zračenja:

$$c_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right)} \quad (196)$$

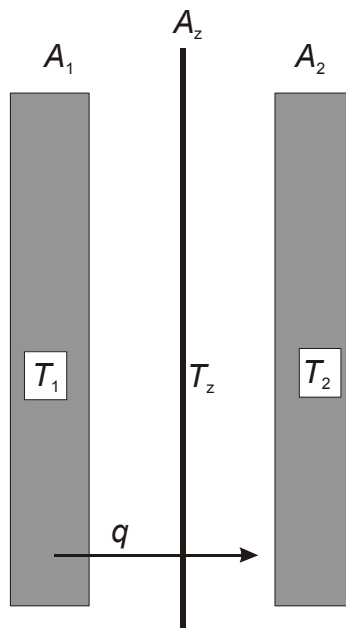
Ako je $A_2 \gg A_1$ $c_{1-2} = c_1$ te slijedi:

$$\dot{Q}_{1-2} = c_1 \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (197)$$

5.3.3. Intenzifikacija i zaštita od toplinskog zračenja

Intenzifikaciju toplinskog zračenja najjednostavnije je postići ili povišenjem temperature ili povišenjem stupnja crnoće, odnosno povišenjem ukupnog zajedničkog koeficijenta zračenja (c_{1-2}).

Zaštita. S druge se strane javlja problem smanjenja toplinskog zračenja, a kao uspješan način pokazala se primjena tzv. *toplinskih zastora*. To su najčešće polirane površine (npr. aluminijska folija) koje osiguravaju stacionarnost prijenosa topline. Ukoliko se između dvije paralelne plohe postavi toplinski zastor smanjuje se fluks zračenja.



Slika 5.21

Zbog jednostavnosti se uzima da je:

$$c_1 = c_z = c_2 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_z = \varepsilon_2$$

Toplinski fluks s površine A_1 na površinu A_2 bez zastora:

$$q_{1-2} = c_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

Toplinski fluks s površine A_1 na površinu zastora A_z :

$$q_{1-z} = c_{1-z} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_z}{100} \right)^4 \right]$$

Toplinski fluks s površine zastora A_z na površinu A_2 :

$$q_{z-2} = c_{z-2} \cdot \left[\left(\frac{T_z}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

U stacionarnim uvjetima $q_{1-z} = q_{z-2}$

$$\left(\frac{T_z}{100}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

pa slijedi:

$$q_{z-2} = c \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T_z}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

$$q_{z-2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

S brojem zastora smanjuje se gubitak energije zračenja:

$$q_{1-2} \text{ (uz zastor)} = \frac{1}{2} \cdot q_{1-2} \text{ (bez zastora)}$$

Ukoliko se poveća broj zastora:

$$q_{1-3} \text{ (uz 2 zastora)} = \frac{1}{3} \cdot q_{1-3} \text{ (bez zastora)}$$

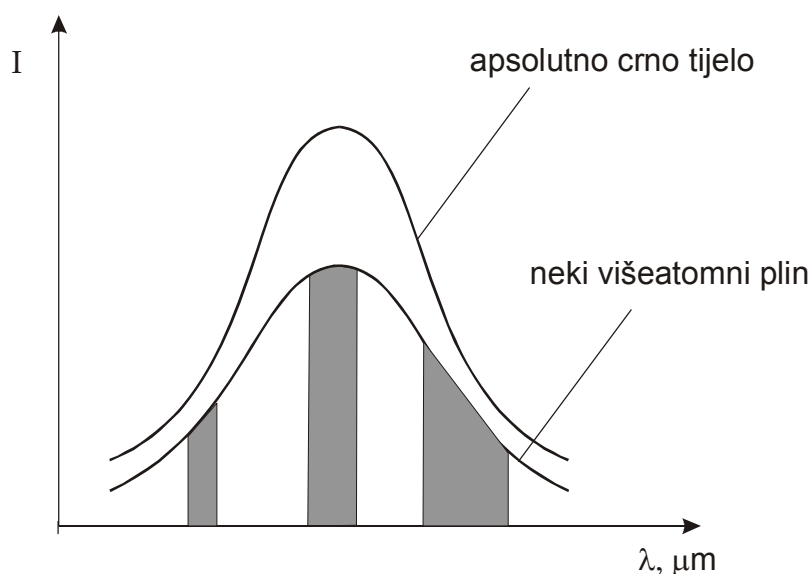
$$q_{1-4} \text{ (uz 3 zastora)} = \frac{1}{4} \cdot q_{1-4} \text{ (bez zastora)}$$

5.3.4. Toplinsko zračenje plinova

Plinovi se sa stanovišta toplinskog zračenja i apsorpcije energije ponašaju ovisno o molekularnoj strukturi.

Mono i diatomski plinovi i pare su praktički u potpunosti prozirni – diatermički.

Višeatomni plinovi (CO_2 , H_2O) imaju sposobnost visoke emisivnosti i apsorpcije topline, ali samo u određenim intervalima valnih duljina (zračenje u određenim vrpčama spektra).



Slika 5.22

Za razliku od plinova, čvrsta tijela zrače u kontinuiranom dijelu spektra. Kod plinova se energija zračenja apsorbira po cijelom volumenu koji zauzimaju, dok kod čvrstih tijela samo na površini jer su neprozračna.

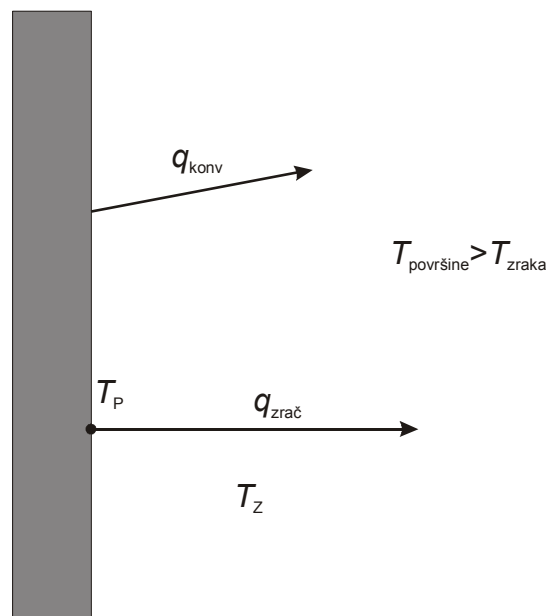
Smjese plinova imaju manju ukupnu energiju zračenja od sume pojedinačnih jer jedan plin apsorbira dio energije zračenja drugog plina.

Stupanj crnoće ovisi o temperaturi, parcijalnom tlaku i debljini sloja:

$$\varepsilon_{\text{pl}} = f(T, p, l)$$

5.3.5. Složeni prijenos topline zračenjem i konvekcijom

Ukoliko površina tijela ima znatno višu temperaturu od okoline, potrebno je pri proračunima uzeti u obzir prijenos topline u okolinu i toplinskim zračenjem i konvekcijom.



Slika 5.23

Konvekcija: $q_K = \alpha_1 \cdot (T_P - T_Z)$

Zračenje: $q_R = \varepsilon \cdot c_0 \left[\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_Z}{100} \right)^4 \right]$

$$q_{\text{uk}} = q_K + q_R = \alpha_1 \cdot (T_P - T_Z) + \varepsilon \cdot c_0 \left[\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_Z}{100} \right)^4 \right]$$

$$q = (T_P - T_Z) \cdot \left\{ \alpha_1 + \varepsilon \cdot c_0 \left[\frac{\left(\frac{T_P}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_Z}{100} \right)^4}{(T_Z - T_P)} \right] \right\}$$

$$q = (T_P - T_Z) \cdot \alpha_{\text{ekv}} \quad (198)$$

α_{ekv} je složeni ili ekvivalentni koeficijent prijelaza topline.

Izraz $\varepsilon \cdot c_0 \left[\frac{\left(\frac{T_P}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_Z}{100}\right)^4}{(T_Z - T_P)} \right]$ se analogno koeficijentu prijelaza topline pri konvekciji, naziva koeficijent prijelaza topline zračenja.

Fluks toplinskog zračenja može se izraziti analogno konvekciji:

$$q_R = \alpha_R \cdot (T_P - T_Z)$$

5.3.6. Prijenos topline pri promjeni agregatnog stanja

5.3.6.1. Vrenje kapljevina

Pri vrenju kapljevina prijenos topline je još složeniji fenomen nego što je to slučaj bez promjene agregatnog stanja jer, između ostalog, nastaje dvofazni sustav. Na prijenos topline može utjecati više faktora:

- čvrsta stijenka (horizontalna ili vertikalna)
- stanje kapljevine (na temperaturi vrelišta ili pothlađena)
- gibanje ili mirovanje fluida

Vrenje se provodi na površini grijačeg tijela (elementa) ili u masi fluida. Nema egzaktnog analitičkog rješenja problema već se proračuni provode na temelju empirijskih izraza.

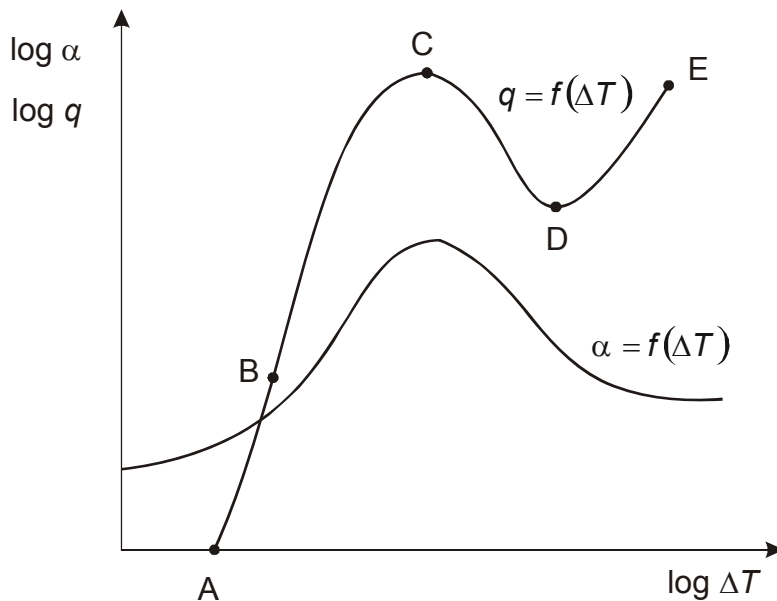
Vrenje na površini grijačeg elementa

Fluid struji preko grijačeg elementa i dio fluida koji je neposredno uz stijenk u zagrijava se i nalazi u stanju vrenja, dok su udaljeniji slojevi fluida pothlađeni. Mjehurići pare se od površine grijača gibaju kroz hladnije dijelove kapljevine gdje iščezavaju tako da nema potrebe za prostorom za otparavanje. Ovaj način vrenja naziva se *pothlađeno vrenje pri protjecanju*.

Vrenje u masi fluida

Vrenje se odvija u ograničenom prostoru ispunjenim kapljevnom u koji je uronjen grijač. Temperatura vrelišta ovisi o dubini uranjanja (zbog hidrostatskog tlaka). Mjehurići pare nastaju na površini grijača, prolaze kroz masu kapljevine i oslobađaju se na površini te odlaze u prostor za paru. Ovaj način vrenja naziva se *vrenje*

zasićene kapljevine budući da su para i kapljevina u ravnoteži na temperaturi vrenja. Koeficijent prijelaza topline i fluks topline ovise o razlici temperatura što se može prikazati dijagramom:



Slika 5.24 Ovisnost prenesene topline i koeficijenta prijelaza topline o temperaturnoj razlici

Toplinski fluks se izražava jednadžbom:

$$q = \alpha \cdot \Delta T$$

gdje je ΔT razlika temperature grijača i kapljevine

Tok krivulje ovisi o stanju fluida što se može podijeliti u nekoliko faza:

- \overline{AB} - praktički linearna ovisnost, kapljevina u blizini grijača podgrijava se zbog čega dolazi do lokalne razlike temperatura i javlja se prirodna konvekcija.
- \overline{BC} - javljaju se mjehurići pare koji svojim snažnim gibanjem intenziviraju prijenos topline jer svaki mjehurić predstavlja nukleus ili jezgru vrenja te se ova faza naziva *nukleacijsko vrenje*. Još uvijek je znatan dio grijača u neposrednom kontaktu s kapljevinom.
- C - kritična temperatura
- \overline{CD} - porastom temperature razlike površinu grijača prekrivaju uglavnom mjehurići pare koja je lošiji vodič topline te se prijenos topline smanjuje – *nestabilno mjehurasto vrenje*.
- \overline{DE} - grijač je u potpunosti prekriven stabilnim filmom pare te se tu odvija površinsko vrenje ili *vrenje u filmu* (kao kapljice na vrućem glačalu; zbog filma pare one skakuću po površini). Zbog izrazito velike temperature razlike dolazi do izražaja i toplinsko zračenje zbog čega se povećava brzina prijenosa topline.

U praksi se proces treba voditi u području nukleacijskog vrenja jer se tada postižu optimalni uvjeti s obzirom na utrošak energije i postignute efekte, a izbjegava se i pregrijavanje grijača.

Koeficijent prijelaza topline u području nukleacijskog vrenja ovisi o nizu parametara:

$$\alpha = f(T, \rho, r, \eta, \sigma, \lambda, c_p)$$

gdje je: r - latentna toplota isparavanja
 σ - napetost površine

U praksi se koriste empirijski izrazi koji uzimaju u obzir sve navedene varijable.

5.3.6.2. Kondenzacija pare

Kondenzacija pare u kapljevini može se provoditi na dva načina.

Kapljičasta kondenzacija

Javlja se kada kondenzat slabo kvasi površinu na kojoj nastaje. Kapljica se u trenutku dostizanja određene (dovoljno velike) veličine otkida i uklanja s površine. Zbog toga je prijenos topline bolji budući da nema termičkog otpora filma kapljevine, a koeficijent prijelaza topline je i do 20 puta veći nego što je to slučaj kod površinske kondenzacije.

Površinska kondenzacija (kondenzacija u filmu)

Provodi se na vertikalnim ili kosim površinama, a rijetko na horizontalnim. Koeficijent prijelaza topline ovisi o debljini filma. U praksi se proračuni svode na ovaj tip kondenzacije jer se kod kapljičaste kondenzacije ne može definirati prekrivena površina.

Vertikalni zid:
$$\bar{\alpha} = 0,94 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \rho_{fl} \cdot r \cdot \lambda_{fl}^3}{\nu_{fl} \cdot H \cdot (T^* - T_s)}}$$

Horizontalni zid:
$$\bar{\alpha} = 0,72 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \rho_{fl} \cdot r \cdot \lambda_{fl}^3}{n \cdot \nu_{fl} \cdot H \cdot (T^* - T_s) \cdot d}}$$

gdje je: H - visina stijenke koja je kvašena kondenzatom
 T^* - temperatura zasićenja
 n - broj cijevi kondenzatora

Vrlo je nepoželjno prisustvo nekondenzirajućih plinova budući da oni blokiraju površinu. Ako je omjer tlakova inerta i ukupnog tlaka:

$$0,01 < \frac{p_{inert}}{p_{ukupni}} < 0,4$$

potrebno je uvesti korekciju:
$$\frac{\alpha_{smjese}}{\alpha_{čiste pare}} \cong 0,1 \cdot \sqrt{\frac{p_{ukupni}}{p_{inert}}}$$

6. PRIJENOS TVARI

Ako neki sustav sadrži dvije ili više različitih komponenti čije se koncentracije razlikuju od točke do točke u prostoru, tada postoji prirodna tendencija da se tvar prenosi čak i kod minimalnih koncentracijskih razlika. Prijenos jednog sastojka (jedne komponente) iz područja više koncentracije prema području niže koncentracije naziva se *prijenos tvari*. Ta se pojava uočava svakodnevno jednako kao i prijenos količine gibanja i prijenos topline.

U industriji prijenos tvari javlja se u procesima kao što su adsorpcija, apsorpcija, destilacija, ekstrakcija, sušenje, sve kemijske i biokemijske reakcije.

Za odvijanje procesa prijenosa tvari ne smije izostati osim koncentracijske razlike i temperaturna razlika. Prijenos tvari uz prijenos topline temelj je toplinskog procesnog inženjerstva koje proučava toplinske separacijske procese.

Prijenos tvari može se odvijati molekularnim mehanizmom (difuzija) ili konvektivnim mehanizmom (vrtložnim). U slučaju kada djeluju oba mehanizma, odnosi su vrlo složeni te se za dobivanje aproksimativnih modela koji opisuju proces primjenjuje dominirajući mehanizam.

Kao i kod dugih procesa i kod prijenosa tvari vrijedi zakon očuvanja:

$$\begin{array}{rcll} V \cdot \frac{dX_V}{dt} & = & \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V,ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V,izl.} + V_r & \\ \text{AKUMULACIJA} & = & \text{ULAZ} - \text{IZLAZ} + \text{GENERACIJA} & \end{array}$$

X_V - predstavlja količinu prenesene tvari po jedinici volumena, a izražava se kao molarna koncentracija c , mol m⁻³ ili masena koncentracija γ , kg m⁻³.

Kod prijenosa tvari javljaju se i određene posebnosti:

- akumulacija tvari uzrokovana kemijskom reakcijom ovisi o čitavom nizu faktora (molne koncentracije reaktanata, temperatura), a često je zbog prisutnosti kemijske reakcije potrebno uzeti u obzir i generiranje količine tvari i topline.
- površinu faza između kojih se odvija prijenos tvari često je teško definirati jer je često gibljiva (reakcija između dva fluida). Kod prijenosa topline i količine gibanja jedna je faza često površina čvrste faze.
- vrijednost transportnog koeficijenta kod malih vrijednosti Reynoldsove značajke (koeficijent difuzije D) je izrazito niska u odnosu na kinematičku viskoznost ili koeficijent toplinske vodljivosti. zbog toga je fluks prijenosa tvari znatno manji nego što je fluks topline ili količine gibanja. Međutim, već kod malih brzina gibanja povećava se količina prenesene tvari vrtložnim mehanizmom, a također i molekularnim mehanizmom u smjeru protjecanja. Fluks se povećava jer se pokretačka sila tijekom procesa konstantno održava velikom.

6.1. Prijenos tvari difuzijom

Difuzija je, u širem smislu, migracija jedne vrste čestica tvari unutar smjese koja se sastoji od dvije ili više komponenata. Takav način prijenosa je u pravilu spor te često predstavlja ograničavajući (mjerodavni) faktor kod mnogih separacijskih procesa ili kod kemijske reakcije. Do prijenosa dolazi zbog pokretačke sile (razlika koncentracija). Dakle, ako u nekom sustavu postoji razlika koncentracija po prostoru promatrane vrste čestica, u tom slučaju do prijenosa dolazi od mjesta veće koncentracije prema mjestu manje koncentracije. Dakle, difuzija je molekularni mehanizam prijenosa tvari s mjesta višeg ka mjestu nižeg kemijskog potencijala. Proces prijenosa traje dok se u promatranom sustavu koncentracije izjednače, odnosno dok se ne uspostavi ravnotežno stanje.

Ukoliko se prijenos tvari odvija uz konstantni koncentracijski gradijent tada govorimo o stacionarnom prijenosu tvari: $\frac{(dc/dy)}{dt} = 0$.

U protivnom, ako je $\frac{(dc/dy)}{dt} \neq 0$ tada govorimo o nestacionarnom prijenosu tvari.

Gustoća toka tvari (fluks tvari) za molekularni mehanizam prijenosa može se općenito pisati:

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$$

odnosno:

$$\dot{m}_A = -D_A \cdot \frac{d\gamma_A}{dy} \quad [\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (199)$$

ili

$$N_A = -D_A \cdot \frac{dc_A}{dy} \quad [\text{mol m}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (200)$$

što predstavlja *Fickov zakon*.

γ_A - masena koncentracija komponente A, kg m^{-3}

c_A - molna koncentracija komponente A, mol m^{-3}

D_A - koeficijent difuzivnosti, $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$

y - udaljenost, otpor

$\frac{dc_A}{dy}$ - koncentracijski gradijent (promjena koncentracije okomito na y)

6.1.1. Prijenos tvari difuzijom u stacionarnim uvjetima

Promatra se smjesa komponenata A i B koja se giba brzinom v uzduž osi y . Fluks smjese koji se prenosi gibanjem brzinom v općenito se izražava kao produkt brzine i koncentracije:

$$N = v \cdot c$$

Ukupni fluks komponenata A i B: $N_A + N_B = v \cdot c$

Za komponentu A: $(N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c} = v \cdot c_A \quad \left(x_A = \frac{c_A}{c} \right)$

Dodatna komponenta gibanja tvari, a koja se javlja uz fluks uzrokovan gibanjem fluida je difuzija. Difuzivnost komponente A (ili B) definira se kao relativna brzina u odnosu na brzinu gibanja smjese:

$$N_A = c_A \cdot (v_A - v) \quad (201)$$

Prema Fickovom zakonu difuzija komponente A u smjesi može se napisati:

$$N_A = c_A \cdot (v_A - v) = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} \quad (202)$$

odnosno za komponentu B:

$$N_B = c_B \cdot (v_B - v) = -D_{BA} \cdot \frac{dc_B}{dy}$$

Iz jednadžbe (202) nadalje slijedi:

$$\begin{aligned} v_A \cdot c_A - v \cdot c_A &= -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} \\ v_A \cdot c_A - (N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c} &= -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} \\ v_A \cdot c_A &= -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} + (N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c} \end{aligned}$$

te konačno:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy} + (N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c} \quad (203)$$

gdje je:

$-D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dy}$ - fluks tvari uzrokovan difuzijom, odnosno koncentracijskim gradijentom

$(N_A + N_B) \cdot \frac{c_A}{c}$ - fluks tvari uzrokovan gibanjem mase fluida (smjese)

Izraz se može riješiti ukoliko je poznat odnos između molnih flukseva komponenata A i B.

Razlikuju se dva granična slučaja:

1. *Ekvimolarna protustrujna difuzija* ($N_A + N_B = 0$)
2. *Jednokomponentna difuzija* tj. difuzija komponente A kroz nepokretnu (inertnu) komponentu B. ($N_B = 0$)

6.1.1.1. Ekvimolarna protustrujna difuzija

Ovaj tip prijenosa tvari temelj je proučavanja toplinskih separacijskih procesa kod kojih stalno dolazi do prijenosa tvari kroz granicu faza u oba smjera (npr. destilacija). U uvjetima ekvimolarne difuzije vrijedi:

$$N_A + N_B = 0 \quad N_A = -N_B$$

Za svaku jedinicu mase komponente A koja prolazi (difundira) kroz graničnu površinu, prolazi difuzijom kroz tu istu površinu jedinica mase komponente B u suprotnom smjeru. Netto fluks tada je jednak 0. Zbog pojednostavljenja promatra se idealiziran slučaj difuzije. Uz adijabatske uvjete i pod pretpostavkom da su molarne topline isparavanja iste $c_A = c_B = c$, $dc_A = dc_B = 0$, $D_{AB} = D_{BA}$.

Opći oblik jednadžbe sada se može pisati:

$$N_A = -D \cdot \frac{dc_A}{dy} \quad (203)$$

U stacionarnim uvjetima uz uvjet da nema generacije tvari (ne postoji kemijska reakcija) vrijedi:

$$N_{A,ulaz} = N_{A,izlaz} = \text{konstantno}$$

Integriranjem jednadžbe (203) uz granične uvjete:

$$y = y \quad c_A = c_A$$

$$y = y_1 \quad c_A = c_{A1}$$

$$y = y_2 \quad c_A = c_{A2}$$

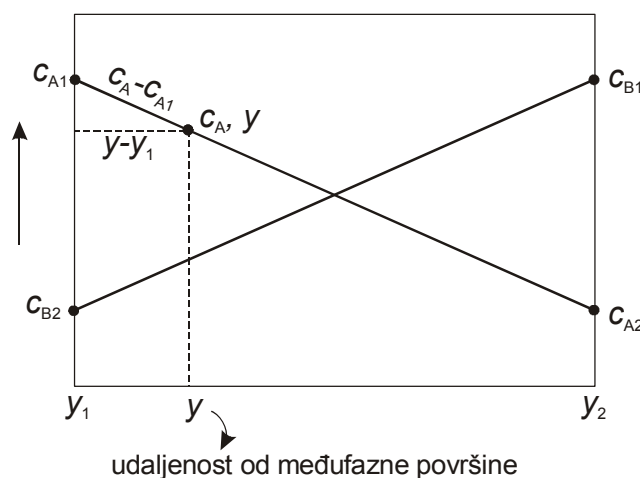
možemo pisati:

$$N_A = -D \cdot \frac{c_{A2} - c_{A1}}{y_2 - y_1} = -D \cdot \frac{\Delta c}{\Delta y}$$

ili

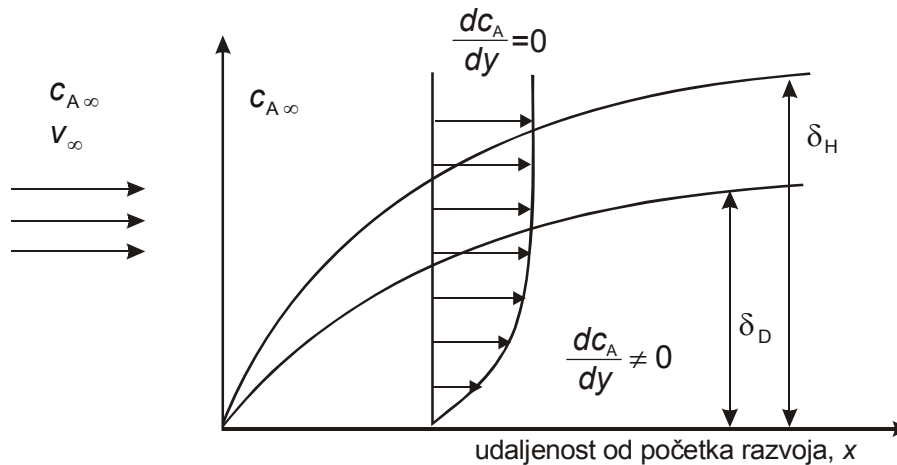
$$N_A = \frac{D}{\delta_D} \cdot (c_{A1} - c_{A2}) \quad (204)$$

Raspodjela koncentracija je linearna. Komponente A i B difundiraju s istim molarnim brzinama u suprotnom smjeru.



Slika 6.1

Vrijednost Δy na kojoj se uspostavlja koncentracijski gradijent naziva se **difuzijski granični sloj** (δ_D) ili **koncentracijski granični sloj** (δ_C). Izvan difuzijskog graničnog sloja nema koncentracijskog gradijenta, što znači da je koncentracija u masi fluida konstantna i obično se označava sa $c_{A\infty}$.



Slika 6.2

Difuzijski granični sloj koji se formira neposredno uz granicu faza, predstavlja glavni otpor prijenosu tvari. Granica faza ne predstavlja otpor, ali je važan geometrijski faktor. Ako postoji gibanje fluida uz graničnu površinu, prijenos tvari kroz difuzijski sloj odvija se difuzijom.

Za prijenos tvari u plinovima, umjesto koncentracije mogu se koristiti parcijalni tlakovi:

$$c_A = \frac{p_A}{R \cdot T} \quad \left(pV = nRT \quad c = \frac{n}{V} \right)$$

Dobiva se *Fickov zakon za idealne plinove*:

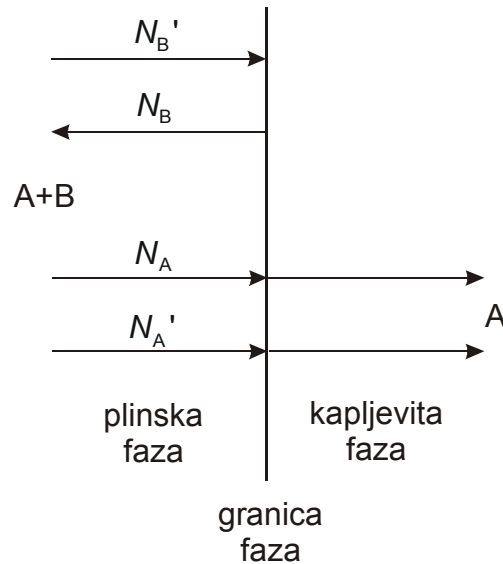
$$N_A = -\frac{D}{RT} \cdot \frac{dp_A}{dy} \quad (205)$$

odnosno:

$$N_A = \frac{D}{RT\delta_D} \cdot (p_{A1} - p_{A2}) \quad (206)$$

6.1.1.2. Jednokomponentna difuzija

Ovaj fenomen javlja se kod selektivne apsorpcije ili ekstrakcije komponente A iz smjese A i B. (Npr. apsorpcija NH_3 u vodi iz smjese zraka i NH_3). Promatra se gibanje smjese komponenata A i B brzinom v uz granicu faza.



Slika 6.3

N_A, N_B - difuzijski fluks

N_A', N_B' - fluks uslijed gibanja

Kroz granicu faza prolazi samo komponenta A. Komponenta B ne prolazi kroz granicu faza već recirkulira unutar svoje prvobitne faze. Otpor prijenosu tvari javlja se neposredno uz granicu faza, a to je difuzijski granični sloj.

Komponenta A do granice faza dolazi difuzijom.

Difuzijski fluks:
$$N_A = -D \cdot \frac{dc_A}{dy}$$

Fluks uzrokovan gibanjem:
$$N_A' = v_A \cdot c_A$$

Ukupni fluks komponente A:
$$N_{A,uk} = N_A + N_A'$$

Potrebno je izraziti fluks uzrokovan gibanjem, N_A' .

Budući da je $v_A = v_B = v$

$$v_A = \frac{N_A'}{c_A} = v_B = \frac{N_B'}{c_B}$$

fluks uzrokovan gibanjem možemo pisati i kao:

$$N_A' = v_B \cdot c_A$$

odnosno

$$N_A' = N_B' \cdot \frac{c_A}{c_B} \quad (207)$$

Ukupni fluks kroz granicu faza komponente B:

$$N_B + N_B' = 0 \quad N_B = -N_B'$$

Fluks komponente A difuzijom jednak je fluksu komponente B difuzijom u suprotnom smjeru:

$$N_A = -N_B \quad N_A = N_B'$$

pa se jednadžba (207) može pisati na sljedeći način:

$$N_A' = N_A \cdot \frac{c_A}{c_B} \quad (208)$$

Ukupni fluks komponente A sada se može izraziti na sljedeći način:

$$N_{A,uk} = N_A + N_A' = N_A + N_A \cdot \frac{c_A}{c_B} = N_A \cdot \left(1 + \frac{c_A}{c_B}\right) = N_A \cdot \left(\frac{c_B + c_A}{c_B}\right)$$

$$N_{A,uk} = -D_A \cdot \frac{dc_A}{dy} \cdot \frac{c}{c_B} \quad (209)$$

Jednadžba (209) predstavlja *Stephanov zakon difuzije*. Integriranjem dobijemo:

$$N_{A,uk} = \frac{D \cdot \bar{c}}{\delta_D \cdot \bar{c}_B} \cdot (c_{A1} - c_{A2}) \quad (210)$$

\bar{c} - ukupna srednja molna koncentracija

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2}{2} \quad c_1 = c_{A1} + c_{B1} \quad c_2 = c_{A2} + c_{B2}$$

$$\bar{c}_B = c_{B,ARITM} = \frac{c_{B1} + c_{B2}}{2} \quad \text{ili} \quad \bar{c}_B = c_{B,LM} = \frac{c_{B2} - c_{B1}}{\ln \frac{c_{B2}}{c_{B1}}}$$

Koncentracija komponente A se mijenja, a koncentracija inertne komponente B, iako ne prolazi kroz granicu faza, također se mijenja budući da se koncentracija komponente A u prvobitnoj smjesi smanjuje.

Za plinove jednadžba ima sljedeći oblik:

$$N_A = -\frac{D \cdot P}{RT_{GF} \delta_D \cdot p_{B,LM}} \cdot \Delta p_{A,LM} \quad (211)$$

gdje je

P - ukupni tlak smjese

$\Delta p_{A,LM}$ - pokretačka sila aktivne komponente

$p_{B,LM}$ - logaritamska srednja vrijednost parcijalnih tlakova inertne komponente na ulazu i izlazu.

$$p_{B,LM} = \frac{p_{B,ulaz} - p_{B,izlaz}}{\ln \frac{p_{B,ulaz}}{p_{B,izlaz}}}$$

6.1.2. Konvektivni prijenos tvari

Konvektivni prijenos tvari uključuje prijenos između fluida u gibanju u površine ili između dva relativno nemješljiva fluida u gibanju. Ovaj način prijenosa ovisi i o transportnim svojstvima i o hidrodinamičkim karakteristikama gibanja fluida. Kao i kod prijenosa topline razlikuju se dva načina gibanja fluida, te se razlikuje:

- prijenos tvari prisilnom konvekcijom – gibanje fluida je uzrokovano narinutom silom
- prijenos tvari prirodnom konvekcijom – gibanje fluida je uzrokovano razlikom lokalnih gustoća otopine koje su nastale razlikom lokalnih koncentracija.

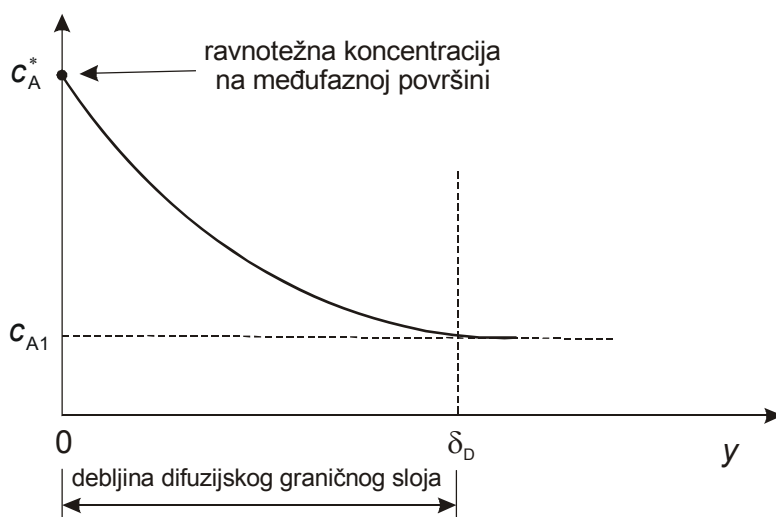
Kinetička jednadžba za konvektivni prijenos tvari analogna je Newtonovom zakonu za prijenos topline konvekcijom:

$$N_A = K_C \cdot \Delta c_A \quad (212)$$

gdje je: N_A fluks tvari, gustoća toka tvari,
 K_C koeficijent prijenosa tvari, m s^{-1} .

6.1.2.1. Koeficijent prijenosa tvari

Analogno teoriji graničnog sloja pri prijenosu topline, *Lewis* i *Whitman* uveli su pojam difuzijskog graničnog sloja kod prijenosa tvari koji predstavlja glavni otpor prijenosu tvari.

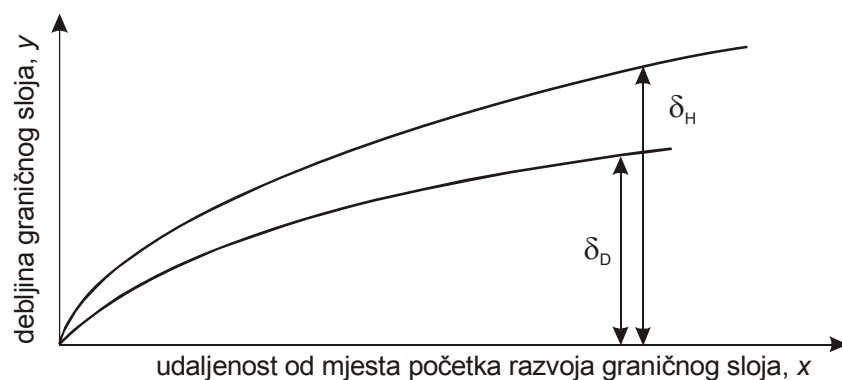


Slika 6.3 Raspodjela koncentracija unutar difuzijskog graničnog sloja

Difuzijski granični sloj postoji unutar hidrodinamičkog graničnog sloja, a njihove debljine se odnose prema izrazu *Polhausena*:

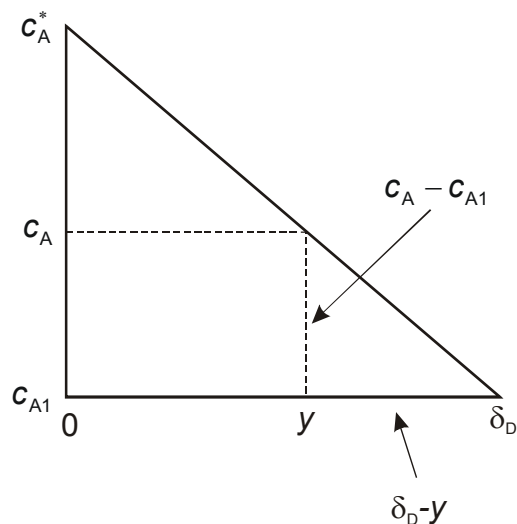
$$\frac{\delta_H}{\delta_D} = Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad \text{Schmidtova značajka.}$$



Slika 6.4

Na udaljenosti $y = \delta_D$, koncentracija se izjednačuje s onom u masi fluida c_{A1} . Raspodjela koncentracija dobiva se analizom slike 6.3. Promjena koncentracije na slici 6.3 može se aproksimirati s trokutom.



Iz sličnosti trokuta:

$$\frac{c_A - c_{A1}}{c_A^* - c_{A1}} = \frac{\delta_D - y}{\delta_D - 0}$$

$$\frac{c_A - c_{A1}}{\delta_D - y} = \frac{c_A^* - c_{A1}}{\delta_D} \cdot D$$

$$D \cdot \frac{\partial c_A}{\partial y} = \frac{D}{\delta_D} \cdot (c_A^* - c_{A1})$$

$$D \cdot \frac{\partial c_A}{\partial y} = K \cdot (c_A^* - c_{A1}) \quad (213)$$

U jednadžbi (213) K je koeficijent prijenosa tvari a predstavlja odnos između difuzijskog koeficijenta i debljine difuzijskog graničnog sloja. Na taj način vidi se da na vrijednost koeficijenta prijenosa tvari, te nadalje i na fluks tvari utječu hidrodinamički uvjeti gibanja. Promjenom hidrodinamičkih uvjeta, koji su izraženi

Re-značajkom, mijenja se debljina hidrodinamičkog graničnog sloja, a istovremeno i debljina difuzijskog graničnog sloja, te tako i vrijednost koeficijenta prijenosa tvari. Koeficijent prijenosa tvari je potrebno definirati za uvjete u kojima se odvija prijenos tvari, a definiranje ovisi i o tome da li se radi o plinskoj ili kapljevitoj fazi.

Za ekvimolarnu protustrujnu difuziju:

- za kapljevine $K_c = \frac{D}{\delta_D}$
- za plinove $K_p = \frac{D}{RT\delta_D}$

Za difuziju komponente A kroz inertnu komponentu B:

- za kapljevine $K_c = K_c \cdot \frac{c_B}{c_{B,LM}} = \frac{D}{\delta_D} \cdot \frac{c_B}{c_{B,LM}}$
- za plinove $K_p = K_p \cdot \frac{P}{p_{B,LM}} = \frac{D}{RT\delta_D} \cdot \frac{P}{p_{B,LM}}$

6.1.2.2. Prijenos tvari pri gibanju fluida (prisilna konvekcija)

Ukoliko se prijenos tvari odvija bez kemijske reakcije i u području niskih koncentracija, proučavanja se temelje na zakonitostima prijenosa topline. Dimenzijskom analizom izvedene su analogne bezdimenzijske kriterijalne jednadžbe koje povezuju sljedeće bezdimenzijske značajke:

Scherwoodova značajka

$$Sh = \frac{K \cdot d}{D} \quad \frac{\text{ukupno prenesena količina tvari}}{\text{količina tvari prenesena difuzijom}}$$

Schmidtova značajka

$$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\eta}{\rho \cdot D} \quad \frac{\text{difuzivnost količine gibanja}}{\text{difuzivnost tvari}}$$

Grashoffova značajka

$$Gr_m = \frac{\beta \cdot g \cdot l^3 \cdot \Delta c}{\nu^2} \quad \frac{\text{silu uzgona uzrokovana lokalnom gustoćom}}{\text{molekularno trenje}}$$

Graetzova značajka

$$Gz_m = \frac{D \cdot x}{\nu \cdot d^2} \quad \begin{array}{l} \text{ukazuje na duljinu puta} \\ \text{na kojem se odvija prijenos tvari} \end{array}$$

Fourierova značajka

$$Fo_m = \frac{D \cdot t}{d^2} \quad \text{bezdimenzijsko vrijeme}$$

Zbog analogije s prijenosom topline, često se u literaturi Sh , Sc i ostale značajke nazivaju *Nusselt maseni* ($Nu_M = Sh$), odnosno *Prandtl maseni* ($Pr_M = Sc$).

Opći oblik bezdimenzijskih korelacija:

- za prisilnu konvekciju $Sh = K \cdot Re^m \cdot Sc^n$
- za prirodnu konvekciju $Sh = K \cdot Gr^m \cdot Sc^n$

Za područje niskih koncentracija, vrijednosti eksponenata odgovaraju eksponentima iz jednadžbi za prijenos topline, ali uz ograničenje da *Reynoldsova* i *Schmidtova* značajka odgovaraju *Reynoldsovoj* i *Prandtllovoj* kod prijenosa topline.

Kod plinova $Sc \approx Pr$.

Kod kapljevina je najčešće $\left(Sc = \frac{\nu}{D} \right) \gg \left(Pr = \frac{\nu}{a} \right)$ jer je $D \ll a$.

Vrijednosti eksponenata ovise o hidrodinamičkim uvjetima i o geometrijskim karakteristikama sustava:

$m = \frac{1}{3}$ - za laminarnu ulaznu zonu u cijevi

$m = 0,5$ - optjecanje oko kugle

$m = 0,8$ - turbulentno strujanje kroz cijev

$n = \frac{1}{3}$ - eksponent na Sc -značajci isti je kao i kod prijenosa topline $\left(Pr^{\frac{1}{3}} \right)$

U prvom dijelu razvoja difuzijskog graničnog sloja, slika strujnica nije konstantna. Strujni tok se razvija te se i koeficijent prijenosa tvari mijenja ovisno o debljini hidrodinamičkog i difuzijskog graničnog sloja. Zbog toga za svaki položaj x (udaljenost od početka razvijanja difuzijskog graničnog sloja) postoji određeni lokalni koeficijent prijenosa tvari $(K_{lok})_x$. U proračunu se zato uzima srednja vrijednost koeficijenta prijenosa tvari, \bar{K} . Kolika je dužina tog područja razvoja toka ovisi o uvjetima strujanja. Kod laminarnog strujanja je često duža jer se debljina laminarnog graničnog sloja stalno povećava. Kod turbulentnog strujanja, laminarni podsloj je kod visokih vrijednosti Reynoldsove značajke praktički konstantan pa je i koeficijent prijenosa tvari konstantan.

Za prijenos tvari sa stijenke u fluid koji se turbulentno giba ($2 \cdot 10^3 < Re < 10^5$, $Sc > 0,7$) vrijedi sljedeća korelacija:

$$Sh = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{0,33}$$

koja izuzetno podsjeća na *Dittus Boelterovu jednadžbu* za prijenos topline ($Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33}$).

Primjenom navedene korelacijske jednadžbe omogućava se procjena koeficijenta prijenosa tvari $\left(K = \frac{Sh \cdot D}{d} \right)$ na temelju poznatih hidrodinamičkih uvjeta uz uvjet geometrijske, dinamičke i termičke sličnosti sustava.

7. ANALOGIJA PRIJENOSA KOLIČINE GIBANJA, KOLIČINE TOPLINE I KOLIČINE TVARI

U kolegiju *Prijenos tvari i energije* uglavnom se proučavaju fenomeni prijenosa u tekućinama koje se gibaju laminarno ili turbulentno. Iz teorije o prijenosu količine gibanja zna se da je, bez obzira na stupanj turbulencije (visoki Re), tik uz stijenku uvijek prisutan i molekularni fluks (*Von Karman*).

Dakle, uvijek su prisutni i molekularni i vrtložni mehanizmi prijenosa količine gibanja, a to je slučaj i kod prijenosa topline i tvari. Budući da nije moguće utvrditi koliki je udio u prijenosu jednim ili drugim mehanizmom, pri proučavanju fluksa koriste se empirijski (eksperimentalno utvrđeni) koeficijenti proporcionalnosti tj. koeficijenti prijenosa (transportni koeficijenti). Često se u dosadašnjim razmatranjima ukazivalo na sličnosti između prijenosa količine gibanja i topline. U svim slučajevima analitički izrazi slijede osnovnu zakonitost što je navedeno već na početku poglavlja 3:

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y} = \text{transportni koeficijent} \cdot \frac{\text{pokretačka sila}}{\text{otpor}}$$

Molekularni mehanizam

Moguće je izvesti egzaktno analitičke izraze.

- fluks količine gibanja $\tau = -\nu \cdot \frac{d(v\rho)}{dy}$
- fluks količine topline $q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dy} = -a \cdot \frac{d(\rho c_p T)}{dy}$
- fluks količine tvari $N_A = -D \cdot \frac{dc_A}{dy}$

Vrtložni mehanizam

Kod vrtložnog mehanizma ta zakonitost također postoji, međutim otpor prijenosu je ugrađen u vrijednost transportnog koeficijenta u vidu utjecaja okoline, odnosno hidrodinamičkih uvjeta koji utječu na debljinu graničnog sloja koji predstavlja glavni otpor prijenosu. Ta se općenita zakonitost može pisati u obliku:

$$\Phi = \kappa' \cdot \Delta$$

pri čemu κ' u svojoj vrijednosti obuhvaća i fizikalna svojstva tvari i utjecaj uvjeta strujanja.

- fluks količine gibanja $\tau = f \cdot \frac{\bar{v}^2 \rho}{2}$
- fluks količine topline $q = \alpha \cdot \Delta T$
- fluks količine tvari $N_A = K \cdot \Delta c_A$

Postavlja se pitanje, s obzirom na analogne zakonitosti, da li se poznavanjem vrijednosti jednog transportnog koeficijenta mogu procijeniti vrijednosti drugih transportnih koeficijenata.

7.1. Reynoldsova analogija

Reynolds (1874.) je proučavao mogućnost izračunavanja koeficijenta prijelaza topline na temelju poznavanja faktora trenja. Princip *Reynoldsove analogije* temelji se na proporcionalnosti zbivanja neposredno uz stijenku i u masi fluida.

Toplinski fluks sa fluida na stijenku (ostvareni): $\alpha \cdot (T_f - T_s)$

Fluks količine gibanja (ostvareni):

$$\tau = f \cdot \frac{\bar{v}^2 \rho}{2}$$

f predstavlja Fanningov faktor trenja i
odnosi se s faktorom trenja: $f = \frac{\xi}{4}$

Raspoloživa količine topline fluida
(maksimalno moguća toplota koju fluid
može predati stijenci)

$$q = \rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)$$

Raspoloživa količina gibanja
(maksimalno moguća – kinetička
energija izražena po jedinici volumena fluida):

$$\bar{v}^2 \rho$$

$$\frac{\text{ostvareni fluks topline na stijenci}}{\text{raspoloživa količina topline fluida}} = \frac{\text{ostvareni fluks količine gibanja na stijenci}}{\text{raspoloživa količina gibanja fluida}}$$

$$\frac{\alpha \cdot (T_s - T_f)}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)} = \frac{f \cdot \frac{\bar{v}^2 \rho}{2}}{\bar{v}^2 \rho}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p} = \frac{f}{2} = St} \quad (214)$$

U jednadžbi (214)

$$f = \frac{\xi}{4} \quad - \text{Fanningov faktor trenja}$$

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha \cdot \Delta T}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot \Delta T} \quad - \text{Stantonova značajka}$$

Analogija se također može primjeniti i na prijenos tvari i količine gibanja:

$$\frac{\text{ostvareni fluks tvari}}{\text{raspoloživi fluks tvari}} = \frac{\text{ostvareni fluks količine gibanja na stijenci}}{\text{raspoloživa količina gibanja fluida}}$$

$$\frac{K \cdot (c_{A1} - c_{A2})}{\bar{v} \cdot (c_{A1} - c_{A2})} = \frac{f \cdot \bar{v}^2 \rho}{2}$$

$$\boxed{\frac{K}{\bar{v}} = \frac{f}{2} = St' = St_M} \quad (215)$$

$$St' = St_M = \frac{Sh}{Re \cdot Sc} \quad - \text{maseni Stantonov broj}$$

Reynoldsova analogija dakle glasi:

$$\boxed{St = St' = \frac{f}{2}}$$

ili cjelovitije:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p} = \frac{K}{\bar{v}} = \frac{\tau}{\rho \cdot \bar{v}^2}}$$

Nedostaci (ograničenja) Reynoldsove analogije:

Pretpostavlja da su vrijednosti $Pr = 1$, $Sc = 1$ što znači da su debljine hidrodinamičkog, toplinskog i difuzijskog graničnog sloja jednake, a to je slučaj samo kod plinova. Na taj način ne uzima u obzir udio molekularnog mehanizma prijenosa (unutar graničnog sloja) i vrtložnog mehanizma prijenosa.

Ova analogija je primjenjiva samo za slučajeve kad nema otpora oblika. Područje primjenjivosti je ograničeno na tok između paralelnih površina ili u cijevi.

7.2. Prandtl-Taylorova analogija

Uzima u obzir činjenicu da Prandtlova značajka nije uvijek jednaka jedinici ($Pr \neq 1$) što znači da debljine hidrodinamičkog, toplinskog i difuzijskog graničnog sloja nisu jednake. Djelomično uzima u obzir udio molekularnog i vrtložnog mehanizma.

Temelji se na Reynoldsovoj analogiji, a pri izvođenju se uzima u obzir univerzalna raspodjela brzina.

$$St = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2} \cdot (Pr - 1)}} \quad (216)$$

Uzme li se da je vrijednost Prandtlove značajke jedinica, dobiva se Reynoldsova analogija.

Za prijenos tvari vrijedi:

$$St' = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2} \cdot (Sc - 1)}}$$

Također, za vrijednost $Sc = 1$ dobiva se Reynoldsova analogija.

7.3. Von-Karmanova analogija

Predstavlja proširenje Prandtlove analogije. Također pri izvođenju uzima u obzir univerzalnu raspodjelu brzina te obuhvaća i prijelazno područje.

$$St = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2} \cdot \left\{ Pr - 1 + \ln \left[1 + \frac{5}{6} \cdot (Pr - 1) \right] \right\}}} \quad (217)$$

Uzme li se da je vrijednost Prandtlove značajke jedinica, opet se dobiva Reynoldsova analogija.

Za prijenos tvari vrijedi:

$$St' = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2} \cdot \left\{ Sc - 1 + \ln \left[1 + \frac{5}{6} \cdot (Sc - 1) \right] \right\}}}$$

Za vrijednost $Sc = 1$ dobiva se Reynoldsova analogija.

7.4. Chilton-Colburnova analogija

Na jednostavan način se korigira Reynoldsova analogija množenjem lijeve strane s $Pr^{\frac{2}{3}}$, odnosno $Sc^{\frac{2}{3}}$. Vrlo se često koristi u inženjerskoj praksi. Uvodi tzv. *j-faktor* (j_H i j_D) koji predstavlja faktor prijenosa topline (tvari).

$$\boxed{St \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = j_H = \frac{f}{2}} \quad (218)$$

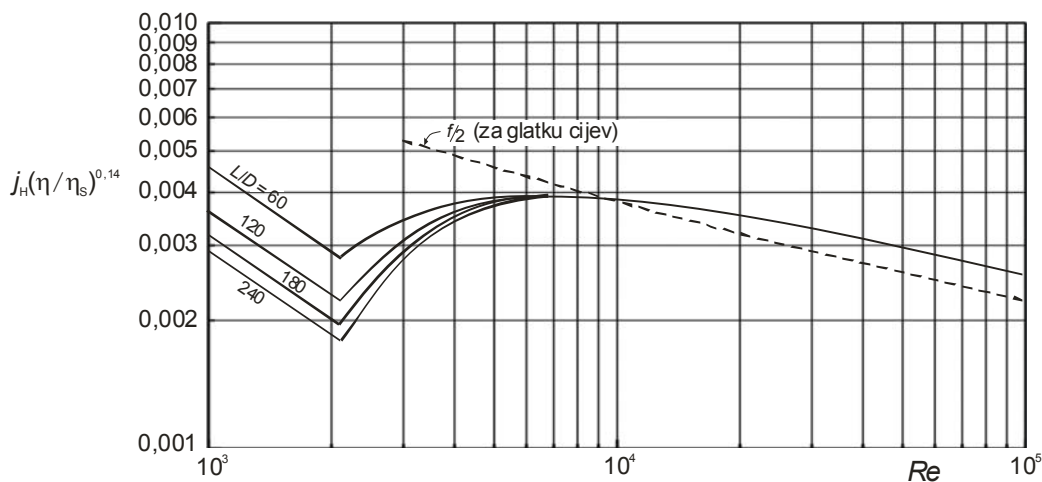
odnosno:

$$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = j_H$$

Za primjer ravne cijevi eksperimentalno je dobiveno: $j_H = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$.

Eksperimentalno je također utvrđeno da se utvrđena zakonitost podudara s ovisnosti faktora trenja o Re -značajci (Moodyjev dijagram) što se vidi na slici 7.1. Ovisnost j_H

o Re potrebno je korigirati s $\left(\frac{\eta_f}{\eta_s}\right)^{0,14}$ u slučajevima kada se radi o velikim razlikama u viskoznosti fluida uz stijenku i viskoznosti u masi fluida.



Slika 7.1 Ovisnost j_H o Re -značajci

Sada se može pisati:

$$St \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = j_H = \frac{f}{2} = \frac{\xi}{8} = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$$

$$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$$

$$\boxed{Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}} \quad (219)$$

Jednadžba (219) poznata je pod nazivom *Dittus-Boelterova* jednadžba (izvedena je ranije dimenzijskom analizom u poglavlju 5.2. Konvekcija), a vrijedi za glatku cijev i u području $10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$, te za odnos $\frac{l}{D} > 50$.

Analogija se može primjeniti i za prijenos tvari pa vrijedi sljedeća jednadžba:

$$\boxed{St' = \frac{Sh}{Re \cdot Sc^{\frac{1}{3}}} = j_D = \frac{f}{2} = \psi \cdot Re^{-n}} \quad (220)$$

odnosno za ravnu cijev:

$$St' = \frac{Sh}{Re \cdot Sc^{\frac{1}{3}}} = j_D = \frac{f}{2} = \frac{\xi}{8} = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$$

te se konačno dobiva bezdimenzijska korelacijska jednadžba za prijenos tvari vrtložnim mehanizmom:

$$\boxed{Sh = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{\frac{1}{3}}} \quad (221)$$

Na temelju predloženog može se izvesti opći zaključak da ovakav jedinstveni pristup proučavanjima prijenosa količine gibanja, prijenosa toplinske energije i prijenosa tvari, omogućuje bolje razumijevanje, povezivanje i izvođenje zakonitosti u procesima kemijske procesne industrije.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. OPĆI ZAKON OČUVANJA	2
3. MEHANIZMI PRIJENOSA	6
3.1. MOLEKULARNI MEHANIZAM PRIJENOSA	6
3.2. VRTLOŽNI MEHANIZAM PRIJENOSA	8
4. PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA	10
4.1. ZAKONI OČUVANJA PRI GIBANJU FLUIDA	16
4.1.1. <i>Zakon očuvanja mase</i>	16
4.1.2. <i>Zakon očuvanja količine gibanja</i>	17
4.1.3. <i>Zakon očuvanja energije</i>	18
4.2. PROTJECANJE	22
4.2.1. <i>Vrste strujanja</i>	22
4.2.2. <i>Laminarno strujanje</i>	23
4.2.2.1. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju između dvije paralelne ploče	24
4.2.2.2. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju u horizontalnoj cijevi	26
4.2.2.3. Gubitak energije pri laminarnom strujanju u horizontalnoj cijevi	28
4.2.3. <i>Turbulentno strujanje</i>	29
4.2.3.1. Teorija graničnog sloja	33
4.2.3.2. Univerzalna raspodjela brzina pri turbulentnom gibanju	35
4.2.3.3. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev kružnog presjeka	37
PRINCIP SLIČNOSTI	38
DIMENZIJSKA ANALIZA	41
4.2.3.4. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev koja nije kružnog presjeka	45
4.2.4. <i>Protjecanje kroz cjevovod</i>	46
4.3. OPTJECANJE	47
4.3.1. <i>Ukupni otpor čvrstog tijela pri optjecanju</i>	48
4.3.2. <i>Brzina gibanja čestica (fluida)</i>	52
4.4. STRUJANJE U MIJEŠALICI	54
4.5. STRUJANJE KROZ SLOJ ČESTICA	57
4.5.1. <i>Strujanje kroz uske pore</i>	60
4.5.2. <i>Strujanje kroz široke pore</i>	61
5. PRIJENOS TOPLINSKE ENERGIJE	63
5.1. KONDUKCIJA	64
5.1.1. <i>Stacionarno provođenje topline kroz jednoslojni zid</i>	65
5.1.2. <i>Stacionarno provođenje topline kroz višeslojni zid</i>	67

5.1.3.	<i>Kondukcija kroz zakrivljene (cilindrične) površine</i>	69
5.1.4.	<i>Nestacionarna kondukcija</i>	70
5.1.4.1.	<i>Analitička rješenja pri nestacionarnoj kondukciji</i>	72
5.1.4.2.	<i>Raspodjela temperatura u tijelu</i>	73
5.1.4.3.	<i>Zagrijavanje (hlađenje) tijela konačnih dimenzija</i>	75
5.1.4.4.	<i>Zagrijavanje (hlađenje) polubeskonačnog tijela</i>	78
5.2.	KONVEKCIJA	80
5.2.1.	<i>Prijenos topline pri laminarnom toku u cijev</i>	84
5.2.2.	<i>Prijenos topline pri turbulentnom toku u cijev</i>	87
5.2.3.	<i>Prijenos topline u miješalicama</i>	88
5.2.4.	<i>Prijelaz topline pri optjecanju</i>	90
5.2.5.	<i>Prolaz topline</i>	90
5.3.	RADIJACIJA (TOPLINSKO ZRAČENJE)	94
5.3.1.	<i>Prijenos topline između dvije ravne ploče</i>	97
5.3.2.	<i>Zračenje u zatvorenom prostoru</i>	99
5.3.3.	<i>Intenzifikacija i zaštita od toplinskog zračenja</i>	100
5.3.4.	<i>Toplinsko zračenje plinova</i>	101
5.3.5.	<i>Složeni prijenos topline zračenjem i konvekcijom</i>	102
5.3.6.	<i>Prijenos topline pri promjeni agregatnog stanja</i>	103
5.3.6.1.	<i>Vrenje kapljevina</i>	103
5.3.6.2.	<i>Kondenzacija pare</i>	105
6.	PRIJENOS TVARI	106
6.1.	PRIJENOS TVARI DIFUZIJOM	107
6.1.1.	<i>Prijenos tvari difuzijom u stacionarnim uvjetima</i>	108
6.1.1.1.	<i>Ekvimolarna protustrujna difuzija</i>	109
6.1.1.2.	<i>Jednokomponentna difuzija</i>	111
6.1.2.	<i>Konvektivni prijenos tvari</i>	113
6.1.2.1.	<i>Koeficijent prijenosa tvari</i>	113
6.1.2.2.	<i>Prijenos tvari pri gibanju fluida (prisilna konvekcija)</i>	115
7.	ANALOGIJA PRIJENOSA KOLIČINE GIBANJA, KOLIČINE TOPLINE I KOLIČINE TVARI	117
7.1.	REYNOLDSOVA ANALOGIJA	118
7.2.	PRANDTL-TAYLOROVA ANALOGIJA	120
7.3.	VON-KARMANOVA ANALOGIJA	120
7.4.	CHILTON-COLBURNOVA ANALOGIJA	121