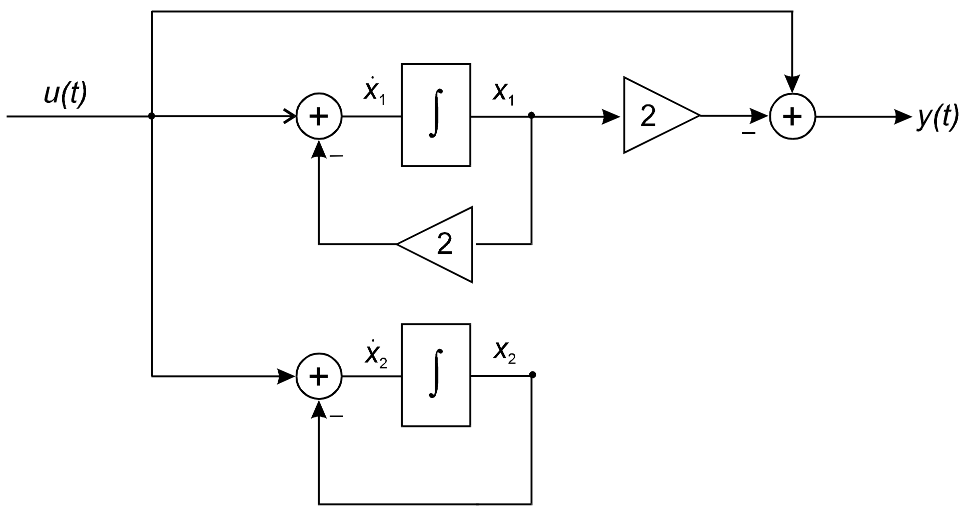
Signali i sustavi - Rješenja zadataka za vježbu (II. kolokvij)

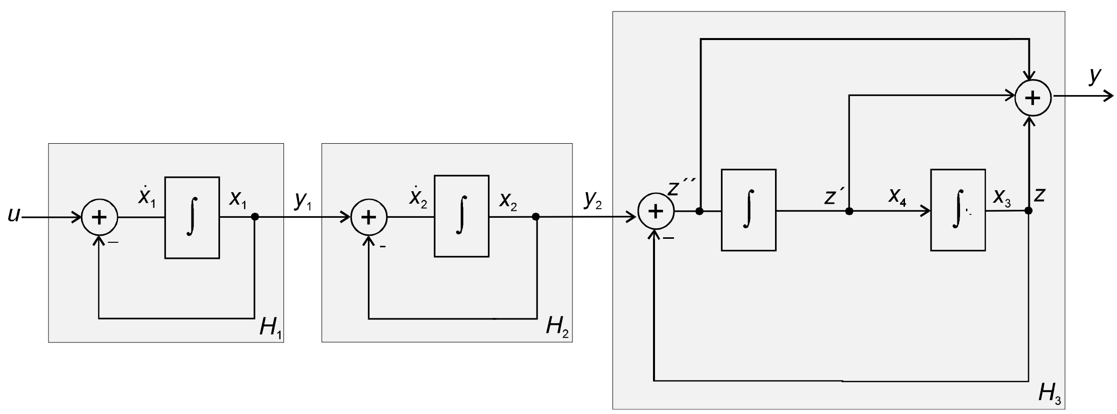
1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$



2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$



Pošto u trećoj sekciji imamo direktnu realizaciju, donja trokutasta matrica karakteristična za kaskadnu realizaciju je pokvarena (jedinica u predzadnjem retku).

3. Normalne varijable stanja:

$$H_1(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 3s + 1}$$

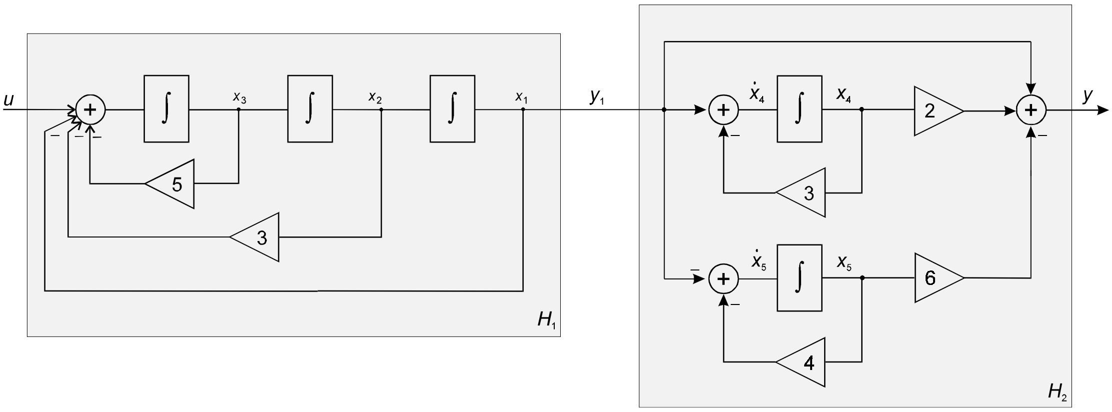
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot u$$

Kanonske varijable stanja:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cdot y_1$$

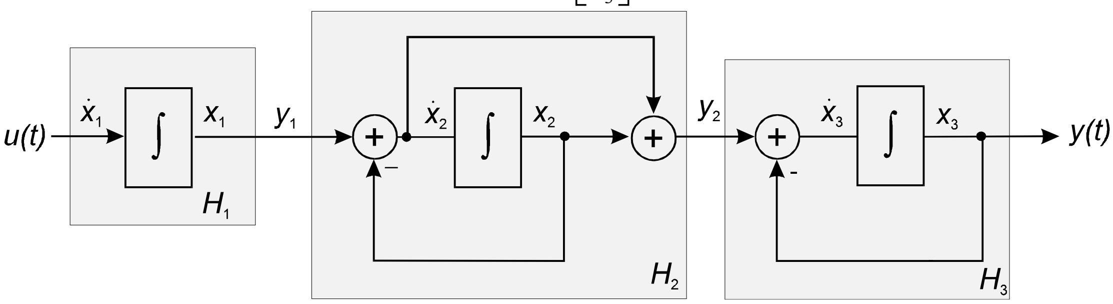
$$y(t)=\begin{bmatrix}2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\cdot y_1$$



4.

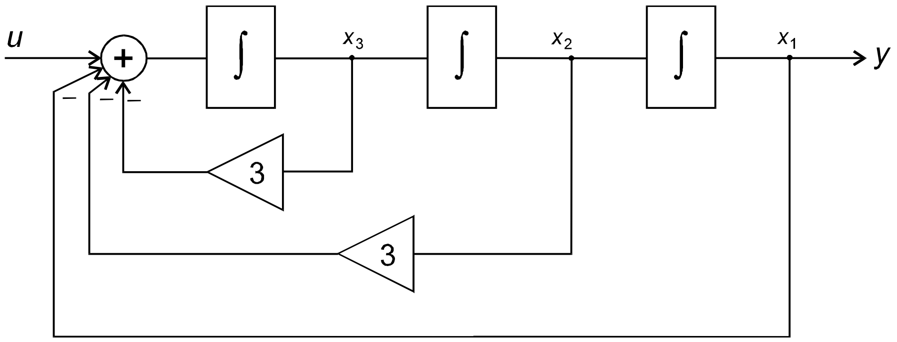
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot u$$



5. A, B, C i D direktne realizacije:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$



Matrice $A*$, $B*$, $C*$ i $D*$ paralelne realizacije:

$$A^*=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\qquad B^*=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad C^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad D^*=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

Sustav je upravljiv jer zadnjem retku Jordanova bloka u $A*$ odgovara ne-nul redak u $B*$.

Sustav je osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka u $A*$ odgovara ne-nul stupac u $C*$.

6. Zadana je paralelna realizacija iz koje se može zaključiti o upravljivosti i osmotrivosti sustava:

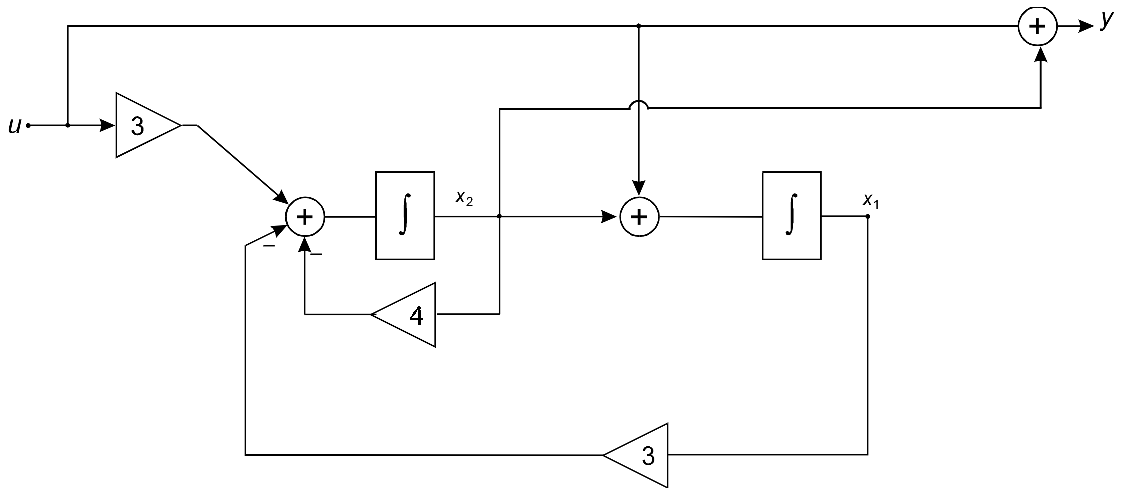
Sustav nije upravljiv jer jednostrukom polu -1 u $A*$ odgovara nul-redak u $B*$.

Sustav nije osmotriv jer jednostrukom polu -1 u $A*$ odgovara nul-stupac u $C*$.

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\qquad M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

Matrice direktne realizacije:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$



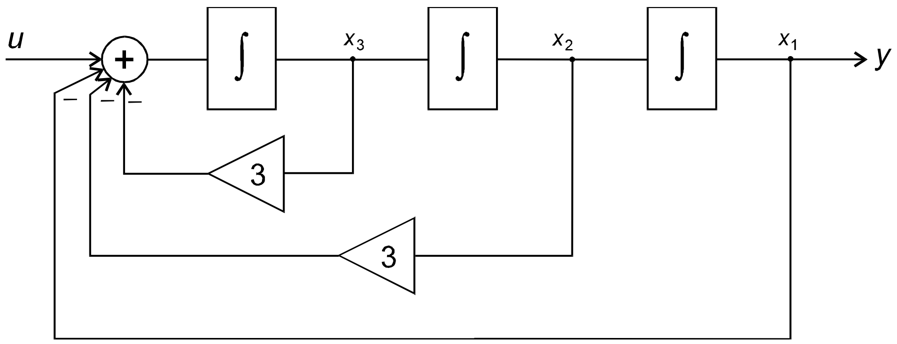
Dobivena matrica A tipična je matrica direktne realizacije, koeficijenti u zadnjem retku su različiti od 0, a do glavne dijagonale su 1.

7. ***Sustav je upravljiv*** jer zadnjem retku Jordanova bloka u A^* odgovara ne-nul redak u B^*.

Sustav je osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka u A^* odgovara ne-nul stupac u C^*.

Matrice A, B, C i D direktne realizacije:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

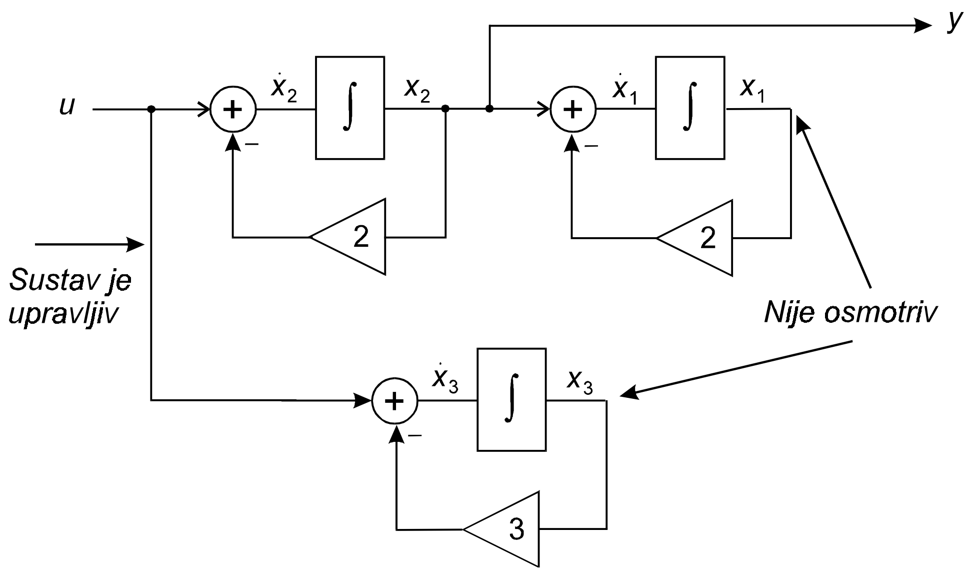


8. Matrice paralelne realizacije:

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^* = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Sustav je upravljiv jer jednostrukom polu -3 u A^* odgovara ne-nul redak u B^* i zadnjem retku Jordanova bloka (za dvostruki pol u -2) odgovara ne-nul redak u B^*.

Sustav nije osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka u A^* odgovara nul-stupac u C^*. Isto tako i jednostrukom polu u A^* odgovara nul-stupac u C^*.



Iz nacrtane paralelne realizacije se vidi da smo dobro zaključili o upravljivosti i osmotrivosti sustava: Sustav je ***upravljiv*** jer ulaz djeluje na sve varijable stanja, a ***nije osmotriv*** jer x_1 i x_3 nisu spojeni na izlaz.

9. Matrice A^*, B^*, C^* i D^* paralelne realizacije:

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadana je paralelna realizacija iz koje se može zaključiti o upravljivosti i osmotrivosti sustava:

Sustav je upravljiv jer jednostrukom polu -2 u A^* odgovara ne-nul-redak u B^* i zadnjem retku Jordanova bloka (za dvostruki pol -1) odgovara ne-nul redak u B^*.

Sustav nije osmotriv jer prvom stupcun Jordanova bloka u A^* odgovara nul-stupac u C^* (iako jednostrukom polu -2odogvara ne-nul stupac).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice A, B, C i D direktne realizacije:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

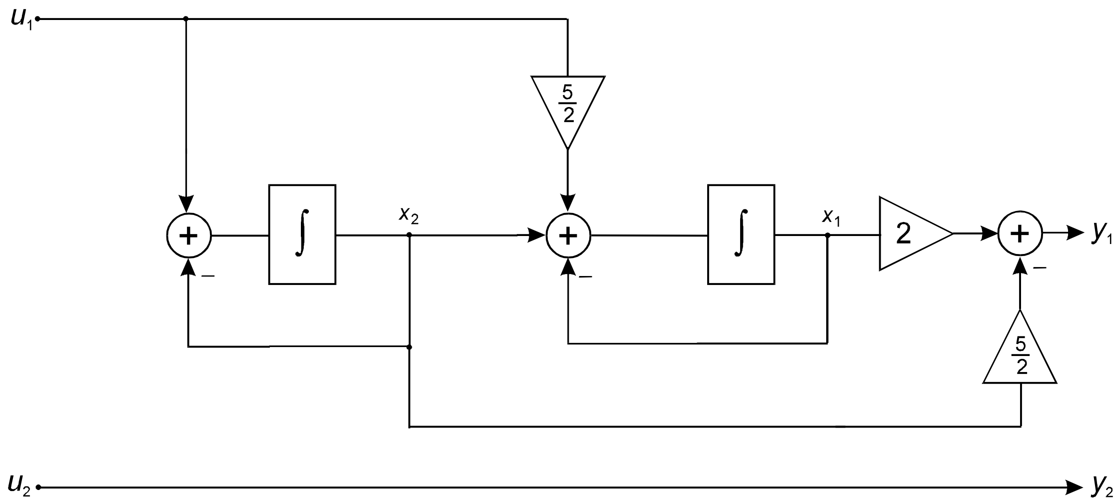
10. Moguća kombinacija:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustav je upravljiv jer zadnjem retku Jordanova bloka u A^* odgovara ne-nul redak u B^*.

Sustav je osmotriv jer prvom stupcu Jordanova bloka u A^* odgovara ne-nul stupac u C^*.



Iz paralelne realizacije vidimo da sa ulazom djelujemo na sve varijable, odnosno sa izlaza vidimo sve varijable, pa je sustav ***upravljiv*** i ***osmotriv*** (potvrda gornjeg zaključka).

11. Impulsni odziv sustava:

$$h(t) = \left[2e^{-t} - \delta(t) \qquad 4e^{t} + 3e^{-t} + \delta(t) \right]$$

12. Impulsni odziv sustava:

$$h(t) = \delta(t) + e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

Dif. jednadžba: $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u''(t) + 4u'(t) + 5u(t)$

13. Impulsni odziv sustava:

$$h(t) = \left[-3e^{-t} + 6e^{-2t} \qquad 2e^{-t} - e^{-2t} + \delta(t) \right]$$