

Mehanika

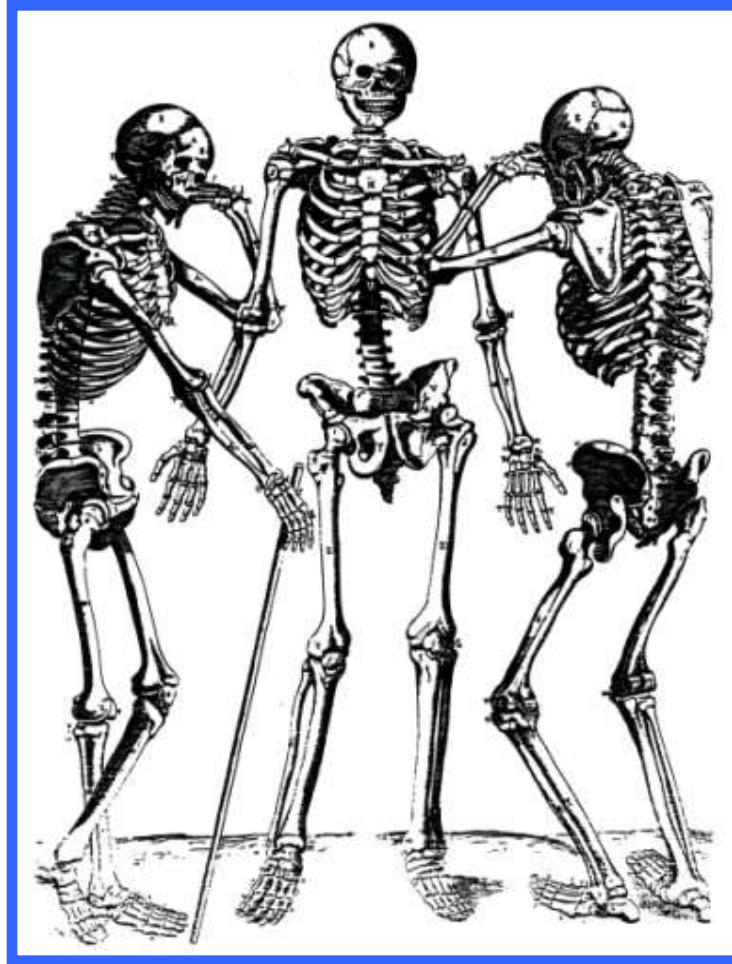
dr.sc. Robert Beuc

Fizika

Studij Fizioterapije



Mehanika



- Gibanje
- Jednoliko pravocrtno gibanje
- Jednoliko promjenljivo pravocrtno gibanje
- Slobodni pad
- Kružno gibanje
- Mirovanje s obzirom na pomicanje
- Uvjeti mirovanja s obzirom na rotaciju
- Sile na poluzi
- Sile na kosini
- Trenje
- Rad
- Snaga
- Energija
- Tlak

Mehanika proučava ponašanja tijela, te njihovo međudjelovanje.

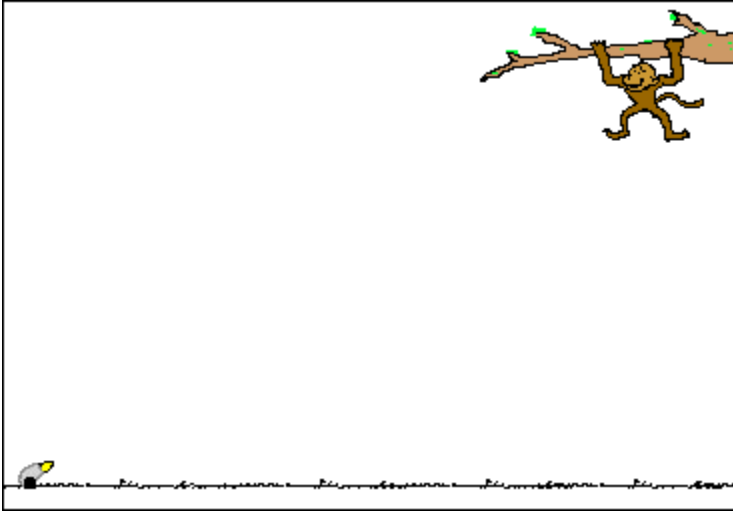
Područja mehanike su:

- ❑ **Statika** proučava mirovanje tijela
- ❑ **Kinematika** proučava gibanje tijela bez obzira na uzroke gibanja
- ❑ **Dinamika** proučava međudjelovanje tijela, te uzroke gibanja.

S obzirom na vrstu tvari koju proučava, mehanika se razvrstava na:

- ❑ Mehanika **čvrstih** tijela
- ❑ Mehaniku **tekućina** (kapljevina i plinova)
- ❑ Mehaniku **elastičnih i plastičnih** tijela

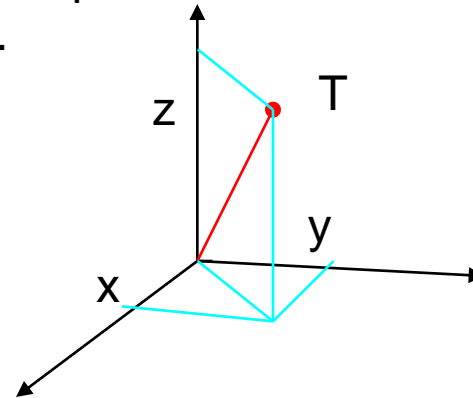
Gibanje



Gibanje je mijenjanje položaja tijela s obzirom na usporednu točku tijekom nekog vremenskog razdoblja.

Svako gibanje ili mirovanje tijela ustanovljava se *relativno* prema *mirnom* tijelu.

Gibanje se promatra u nekom koordinatnom sustavu.



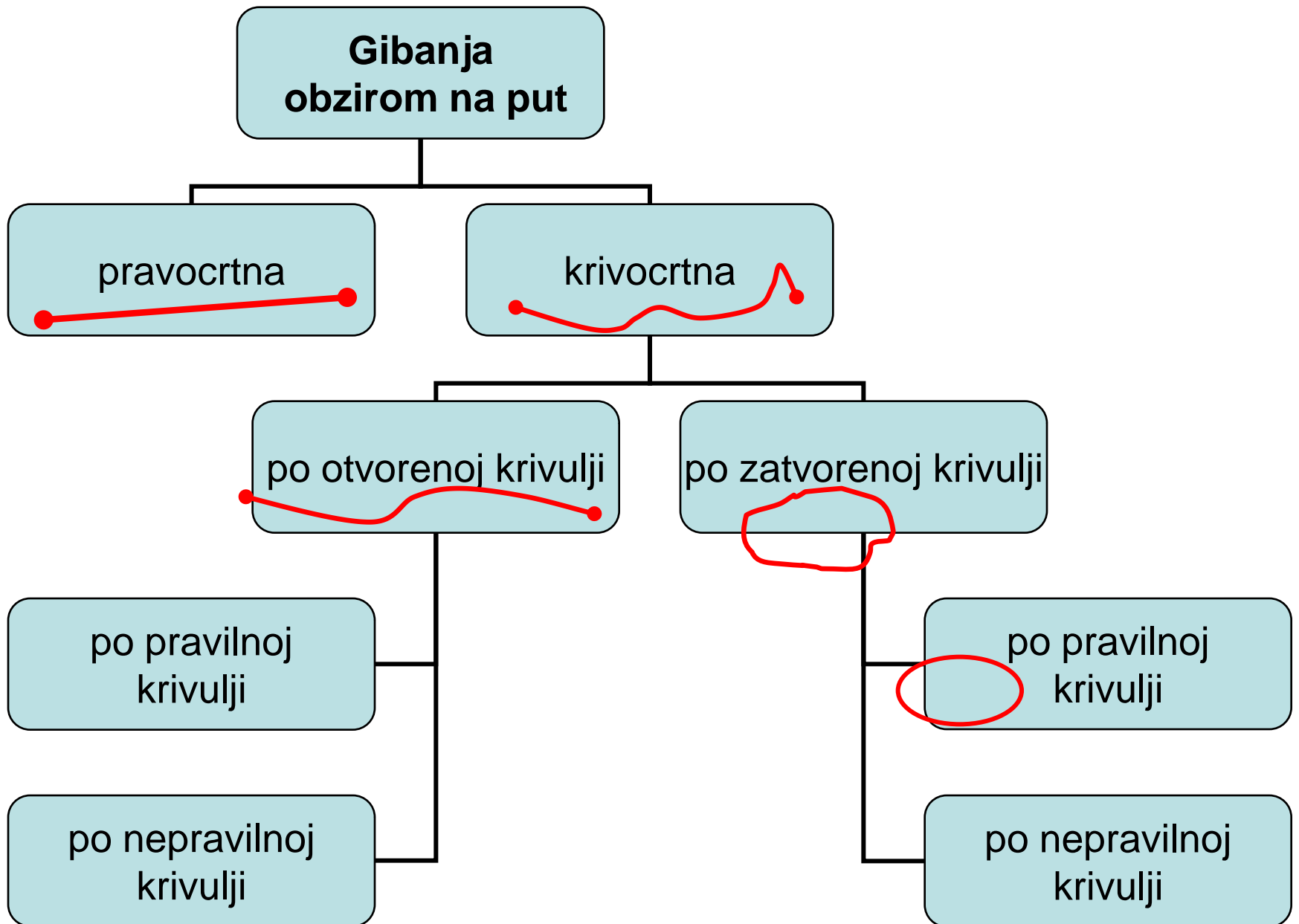
Tijekom gibanja tijelo prolazi kroz neprekinuti niz točaka u prostoru koji nazivamo **PUT**.



put **s** vrijeme **t**

Položaj tijela tijekom gibanja je funkcija vremena $s = s(t)$

Položaj tijela u trenutku t_i je s_i $s_i = s(t_i)$

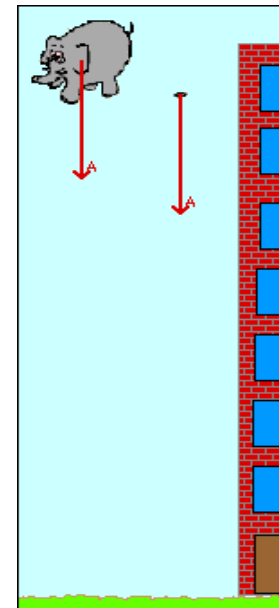




Gibanja u vremenu

periodična

neperiodična



Gibanja s obzirom na brzinu

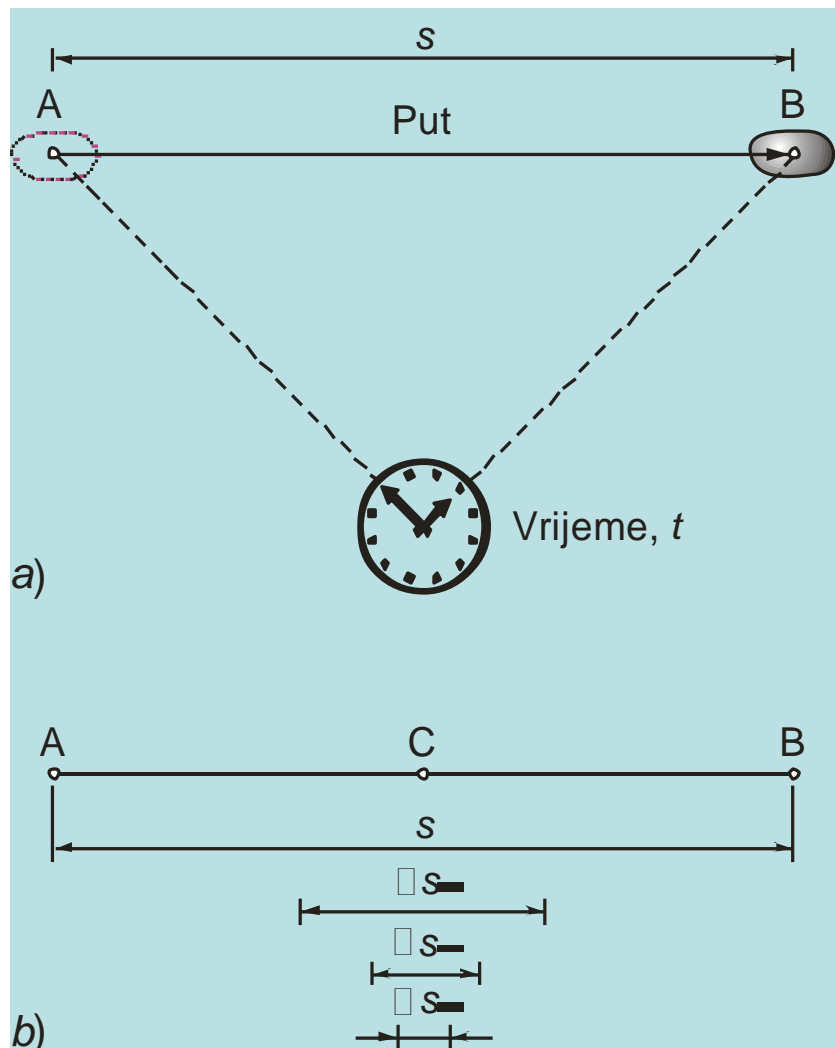
konstantna brzina

promjenljiva brzina

Konstantno ubrzanje

Promjenljivo ubrzanje

Pravocrtno gibanje



U vremenskom razmaku Δt tijelo prijeđe put Δs

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$$

Na intervalu puta brzina je određena omjerom:

$$v_i = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Big|_i \quad \text{Jedinica m/s , km/h}$$

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \Big|_i = \frac{ds}{dt} \Big|_i$$

Limes **lim**, **derivacija** puta po vremenu

Kraće pisano, brzina u trenutku t je:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Brzina tijela je također funkcija vremena

$$v = v(t)$$

Brzina tijela u trenutku t_i je v_i

$$v_i = v(t_i)$$

Srednja brzina gibanja

$$\bar{v} = \frac{s}{t}$$



t je trajanje gibanja,
a s je ukupno preavljeni put

Ako je u svim dijelovima puta brzina ista, gibanje je **jednoliko pravocrtno**.

Pri **jednolikom** gibanju vrijedi $v = \bar{v}$

Jednadžba koja opisuje gibanje

$$s(t) = s_p + v \cdot (t - t_p)$$

$$s_i - s_p = v \cdot (t_i - t_p)$$

$$s = s_k - s_p \quad t = t_k - t_p$$

$$s = v \cdot t \quad v = \frac{s}{t} \quad t = \frac{s}{v}$$

Jednoliko promjenljivo pravocrtno gibanje

Promjena brzine u vremenu je **ubrzanje** ili **akceleracija**

$$a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \Big|_i = \frac{dv}{dt} \Big|_i = \frac{d^2 s}{dt^2} \Big|_i \quad \text{kraće} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

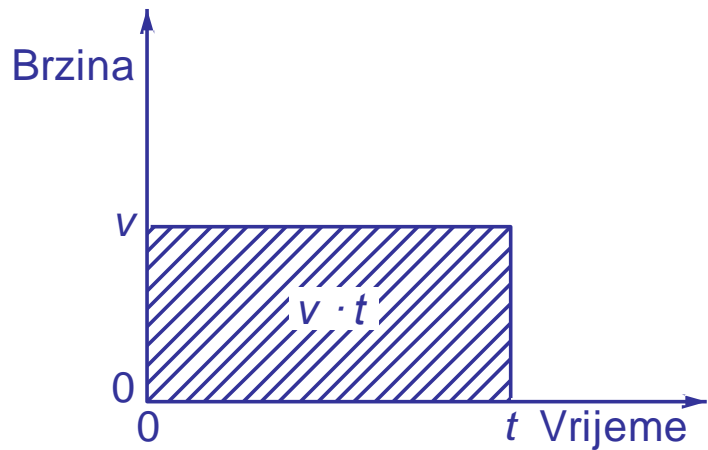
Ubrzanje je općenito funkcija vremena **$\mathbf{a}=\mathbf{a(t)}$** . Ako je ubrzanje tijekom pravocrtnog gibanja isto, gibanje je jednoliko promjenljivo.

Mjerna jedinica ubrzanja **$\mathbf{m/s^2}$**

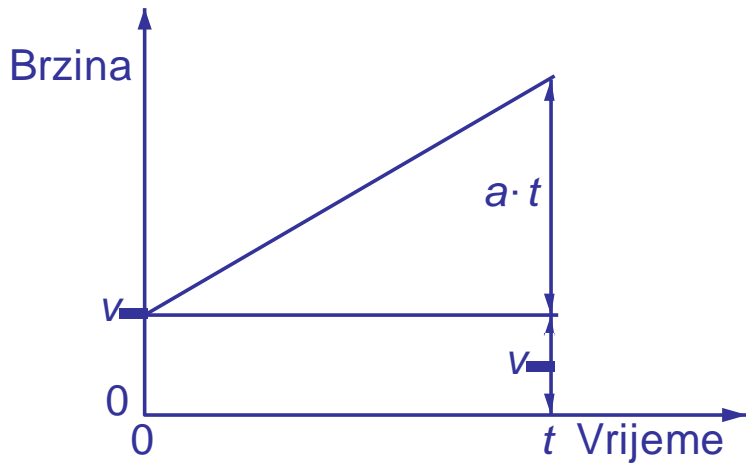
$$v(t) = v_p + a \cdot (t - t_p)$$

Ako je početna brzina **$\mathbf{v_p=0}$** , tada je nakon vremena **\mathbf{t}** brzina jednaka

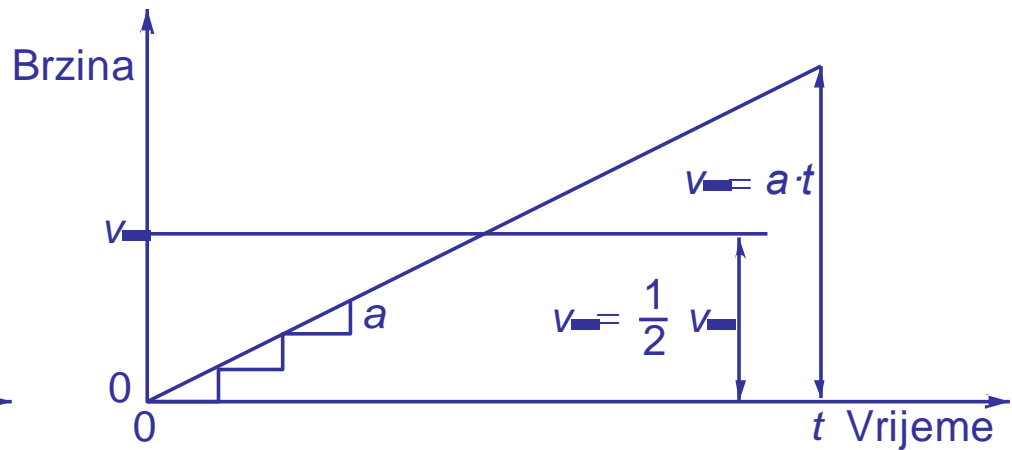
$$v = a \cdot t$$



$$s = v \cdot t \quad a)$$



$$v = v_p + a \cdot t \quad c)$$



$$v_k = a \cdot t \quad b) \quad \bar{v} = \frac{1}{2} a \cdot t$$

$$s = \bar{v} \cdot t$$

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

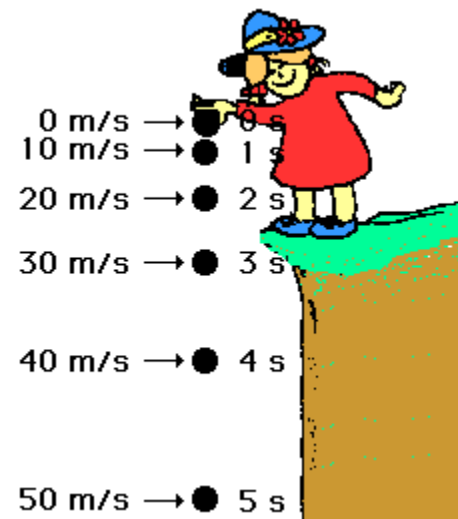
Slobodni pad



Galileo Galilei 1564-1642

visina $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

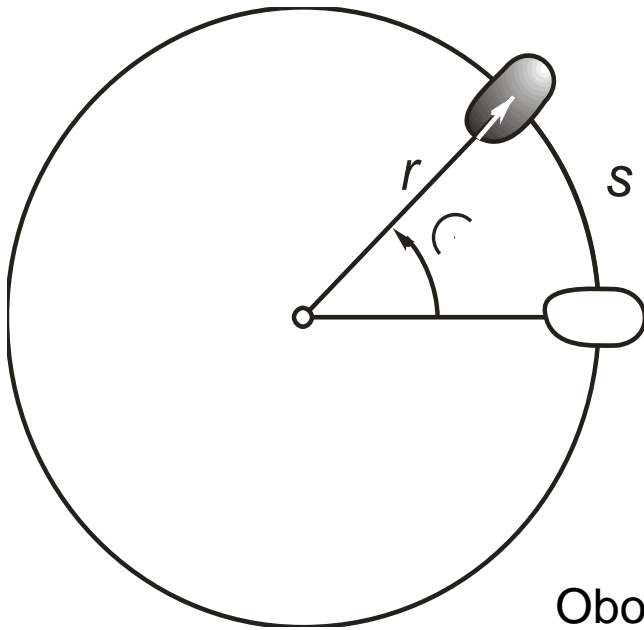
konačna brzina $v_k = \sqrt{2gh}$



vrijeme $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Gravitacijsko ubrzanje
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Kružno gibanje



Periodično gibanje

Period je trajanje jednog obilaska **T** (s)

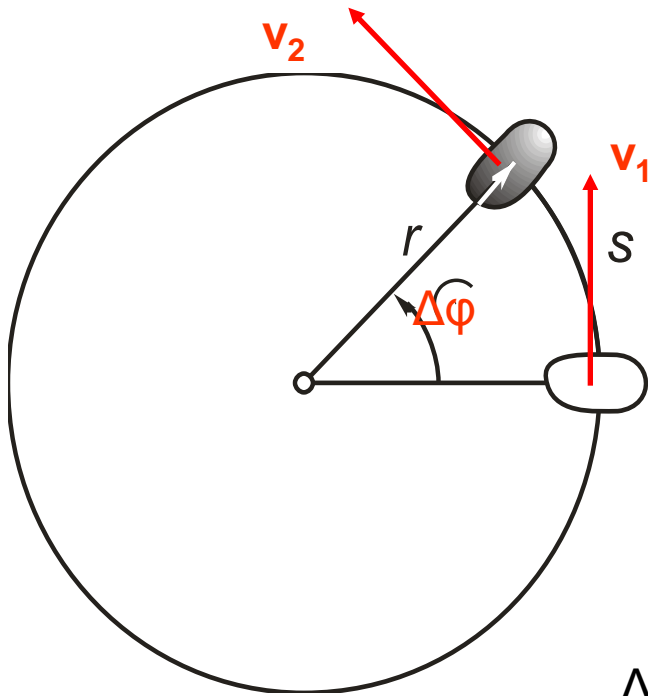
Frekvencija ili čestota **f** je recipročna vrijednost perioda

$$f = \frac{1}{T}$$

Jedinica herc (**Hz=s⁻¹**)

Obodna brzina $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Srednja obodna brzina $\bar{v} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

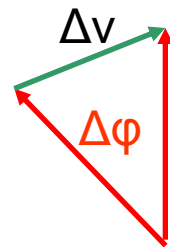


Kutna brzina $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Srednja kutna brzina $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$

Srednja obodna i kutna brzina vezane su relacijom:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \cdot r$$



$$\Delta v = v \cdot \Delta\varphi$$

Obodno ubrzanje $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \omega$

Kutno ubrzanje $a_k = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Jednoliko kruženje, kutno ubrzanje $\mathbf{a_k=0}$

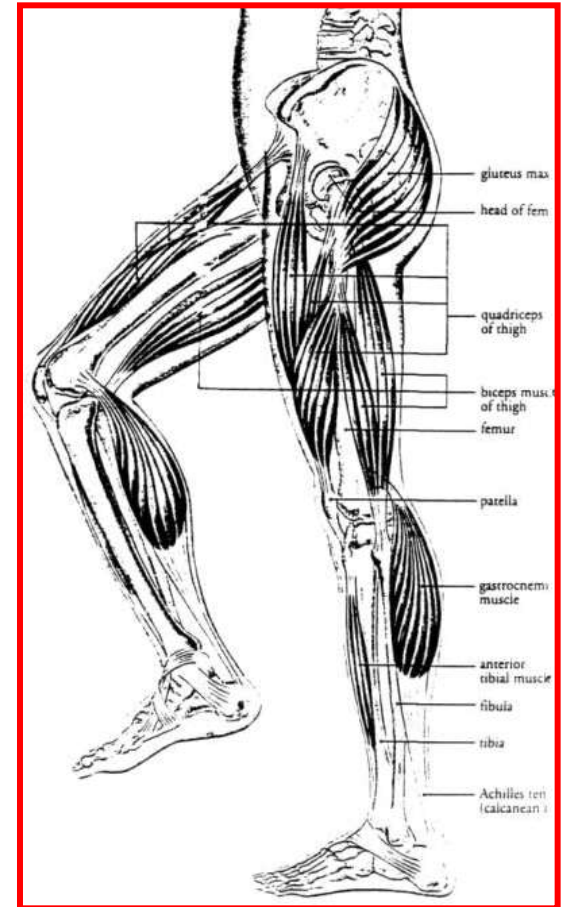
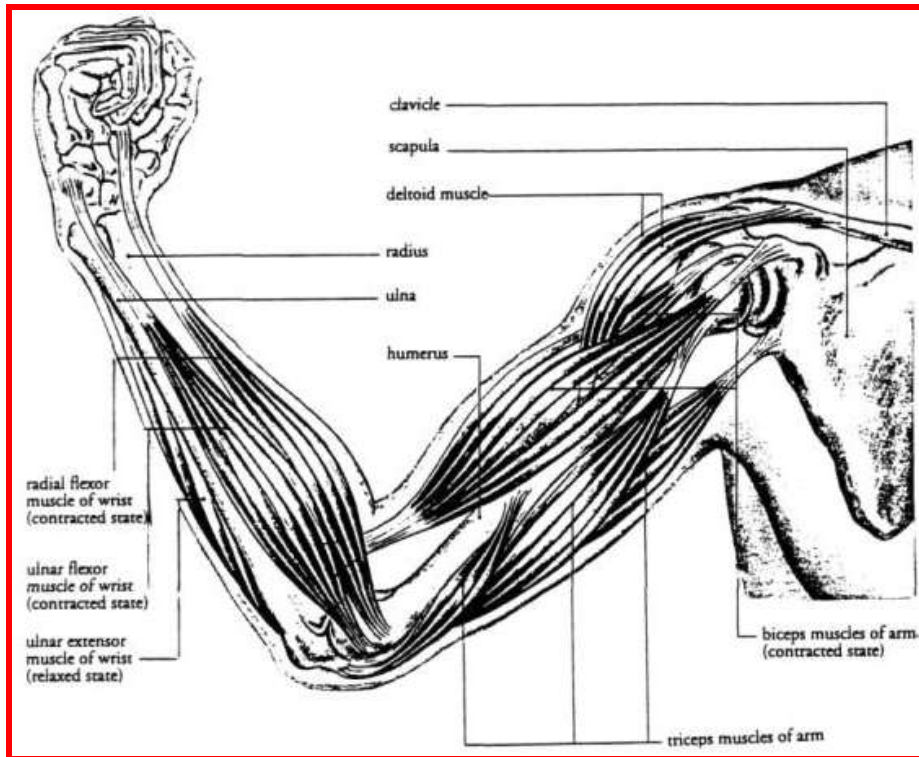
Obodna brzina $v = \bar{v} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

Kutna brzina $\omega = \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$

$$v = \omega \cdot r$$

Obodno ubrzanje $a = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$

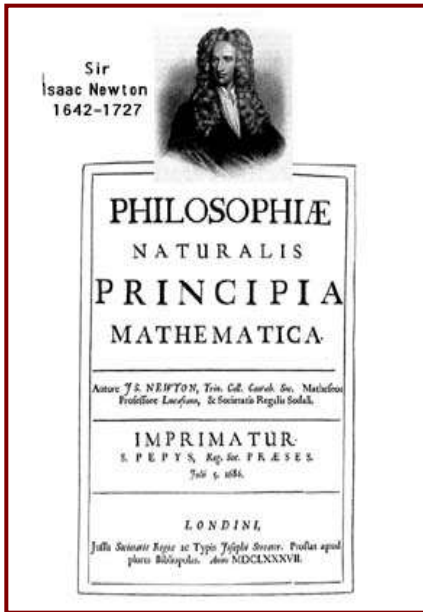
Sile, skelet, stabilnost tijela



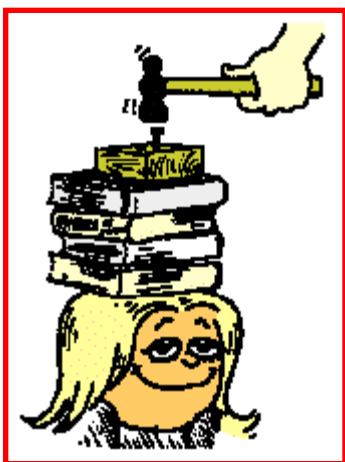
Newtonovi zakoni

1. Newtonov zakon

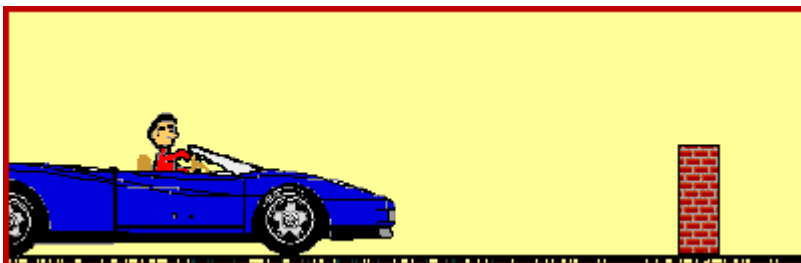
Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu dok ga vanjske sile ne prinude da to stanje promijeni.



- Svojstvo tijela: **ustrajnost** ili **inercija**
- Mjera ustrajnosti tijela – **masa**
- Jedinica mase je kilogram, gram,...
- Razlikujemo dvije vrste mase:
 - **troma** masa
 - **teška** masa
- Produkt brzine v i mase m se naziva **veličina gibanja** p (jedinica kg m/s). Koristi se i naziv nalet i impuls



$$p = m \cdot v$$



2. Newtonov zakon

Promjena veličine gibanja s vremenom razmjerna je sili koja ju je uzrokovala i u smjeru je djelovanja te sile .

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$$

Drugi iskaz zakona: Sila masi daje ubrzanje.

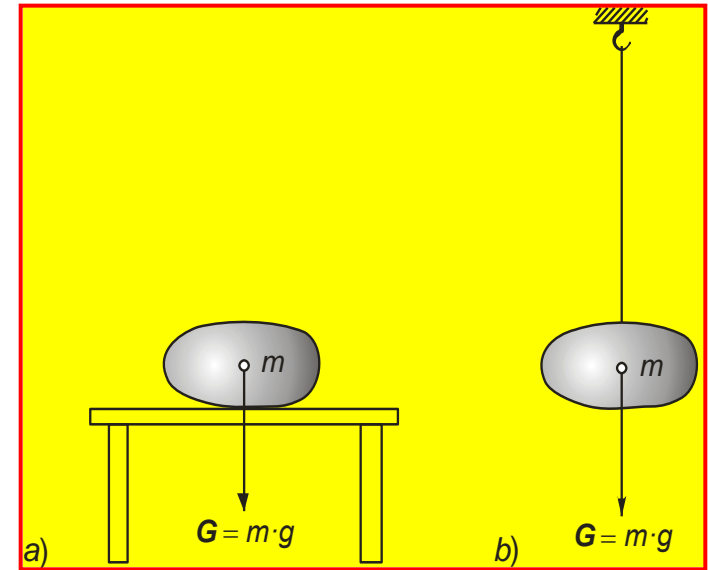
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Sila **F** i ubrzanje **a** su vektori istog smjera.

Jedinica za silu je njutn, $N = \text{kg m/s}^2$.

Gravitacijska sila

- Sila kojom tijelo u gravitacijskom polju tlači podlogu ili napinje objesište naziva se **težinom** tijela
- Gravitacijsko ubrzanje $g=9,80665 \text{ m/s}^2$ ili $g=9,81 \text{ m/s}^2$
- Tijelo mase $m=1 \text{ kg}$ ima težinu $G=mg=1 \cdot 9,81 \text{ kg m/s}^2 = 9,81 \text{ N}$
- Ne miješati pojmove masa i težina !

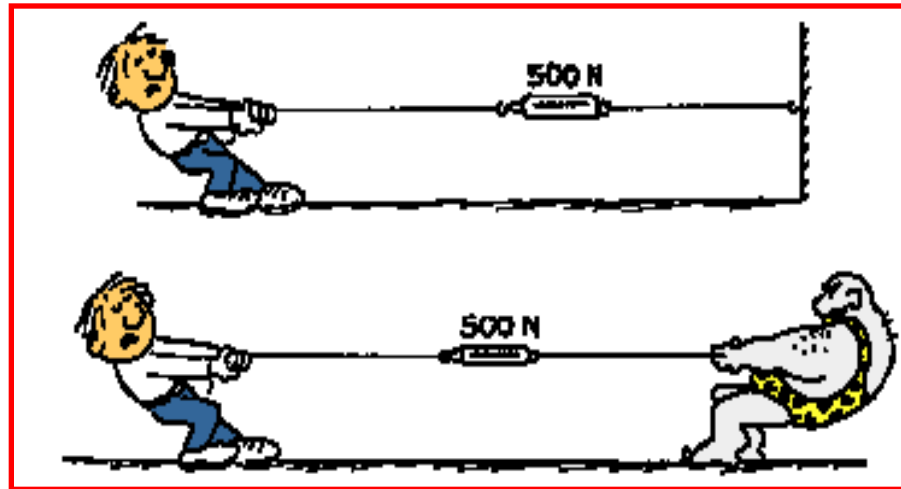


$$\vec{G} = m \vec{g}$$

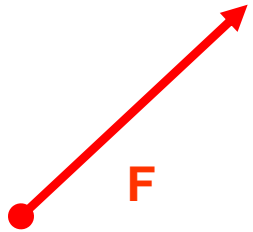
3. Newtonov zakon

Sila akcije je uvijek jednaka sili reakcije, uzajamna djelovanja dvaju tijela su uvijek međusobno jednaka i suprotnog smjera.

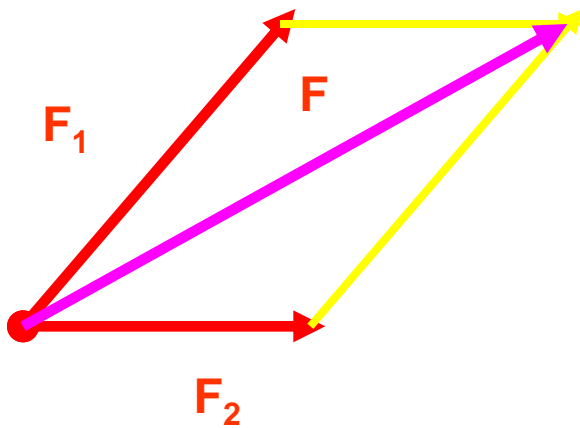
$$\vec{F}_a = -\vec{F}_r$$



Zbrajanje sila, (vektora)

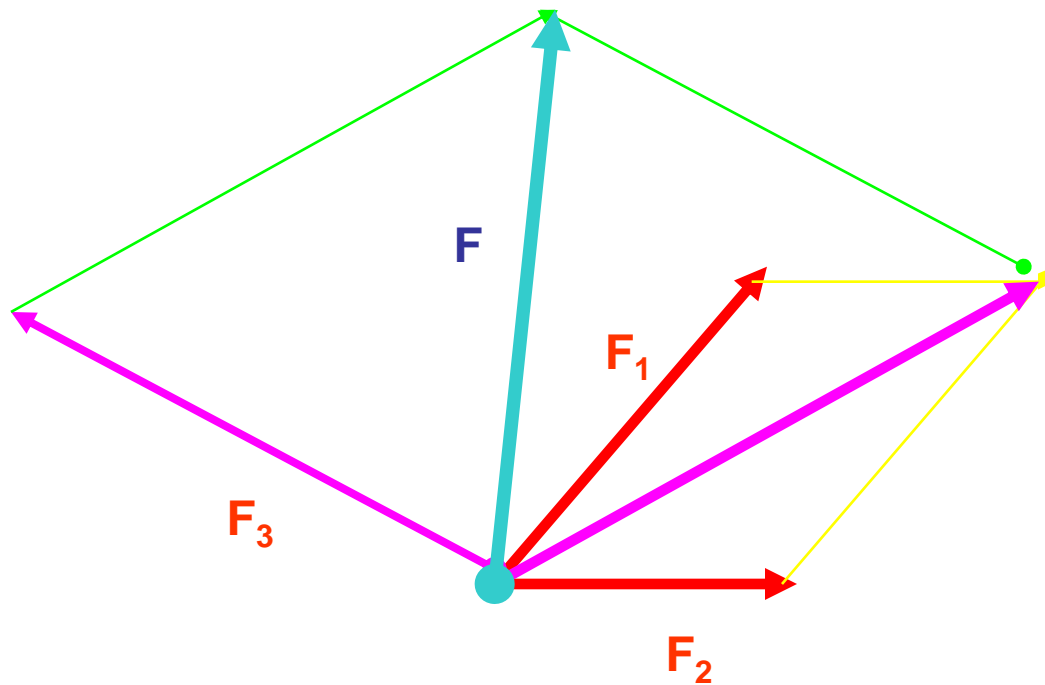


- Sila **F** je vektor koji ima hvatište, smjer i iznos
- Paralelogram sila

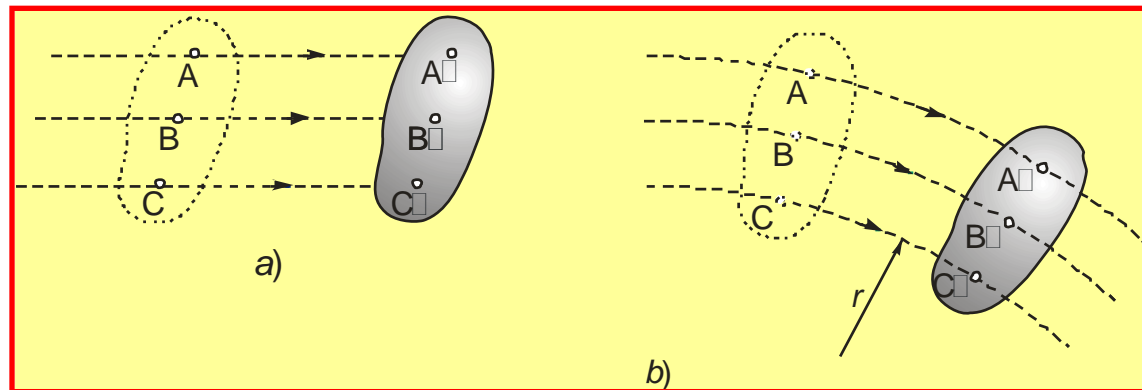


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

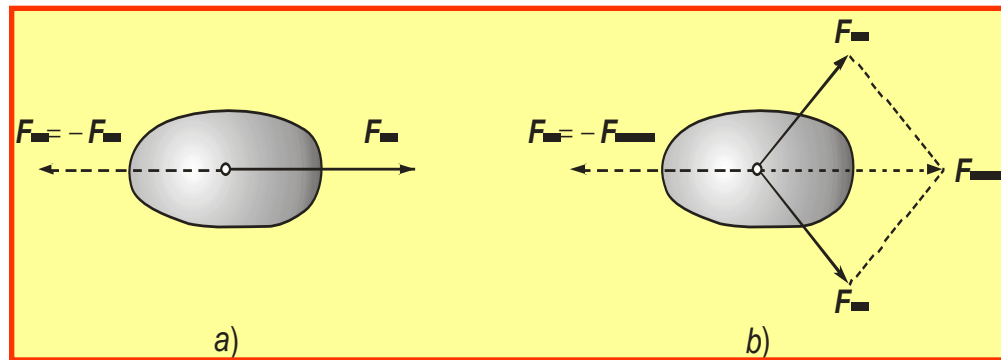


Slobode gibanja



- **Pomicanje ili translacija;** točke tijela se gibaju po paralelnim pravcima
- **Okretanje ili rotacija;** točke tijela se gibaju po koncentričnim kružnicama
- Sva gibanja su složena od pomicanja i okretanja
- U trodimenzionalnom prostoru postoji 6 osnovnih gibanja, 3 neovisne translacije i 3 rotacije

Mirovanje s obzirom na pomicanje



$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \dots = 0$$

Tijelo se ne pomiče ako su sile koje djeluju na njega u **ravnoteži**, tj. ako je njihov vektorski zbroj jednak nuli

Glavna sila koja djeluje na ljudsko tijelo je gravitacijska sila

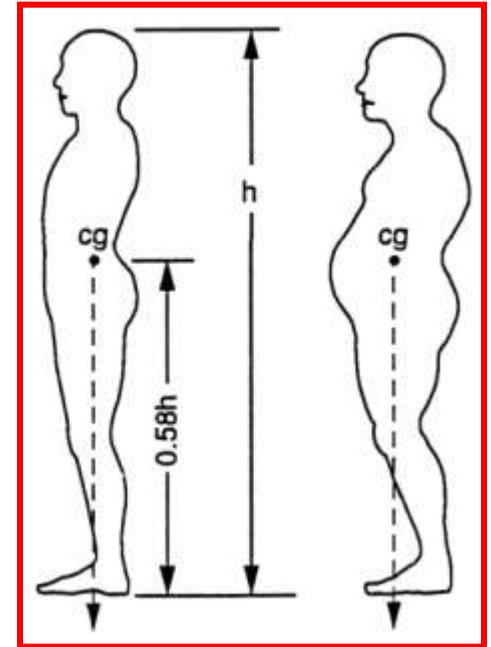
(W = težina)



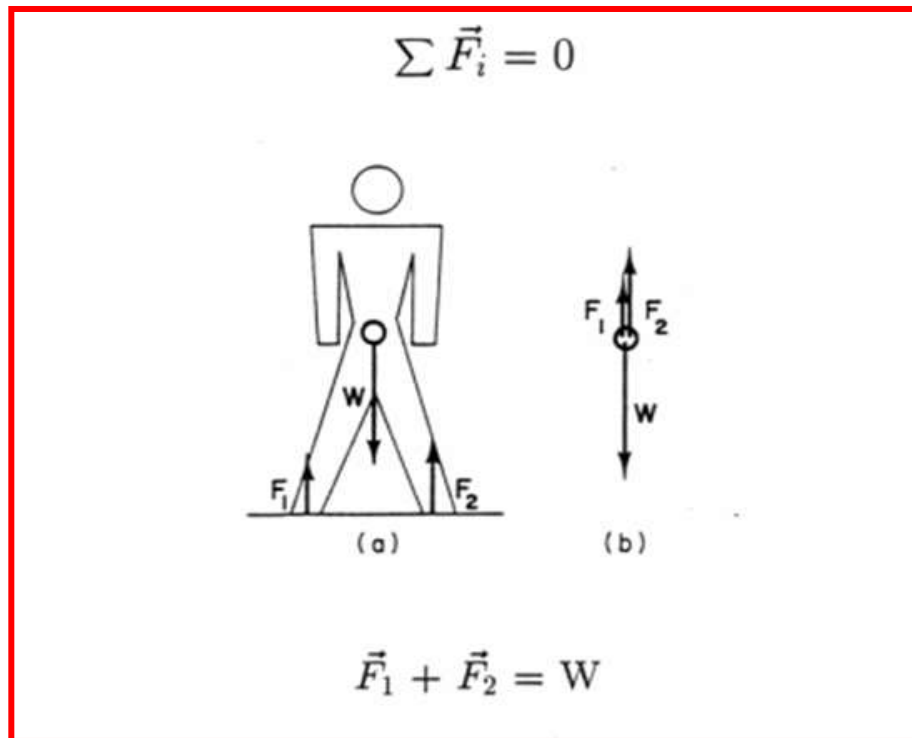
$W = m \cdot g$

Stabilnost tijela u odnosu na gravitacijsku silu omogućava struktura kostiju ljudskog kostura!

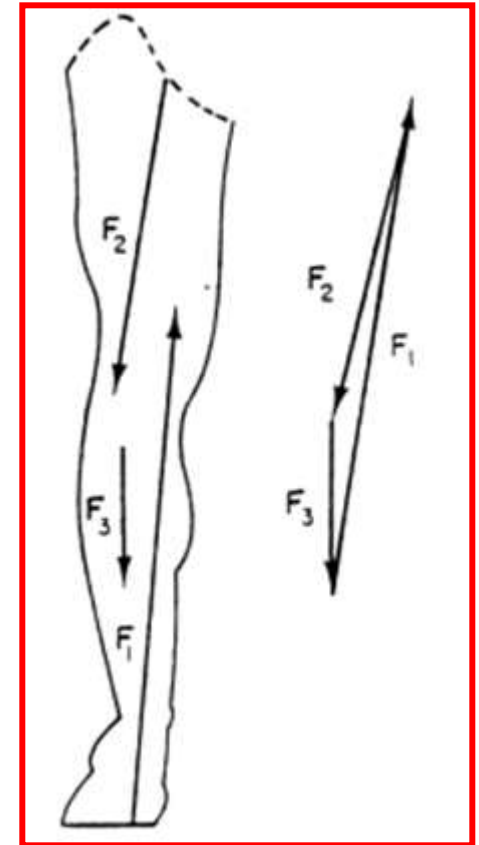
Gravitacijska sila W djeluje na težište T tijela!



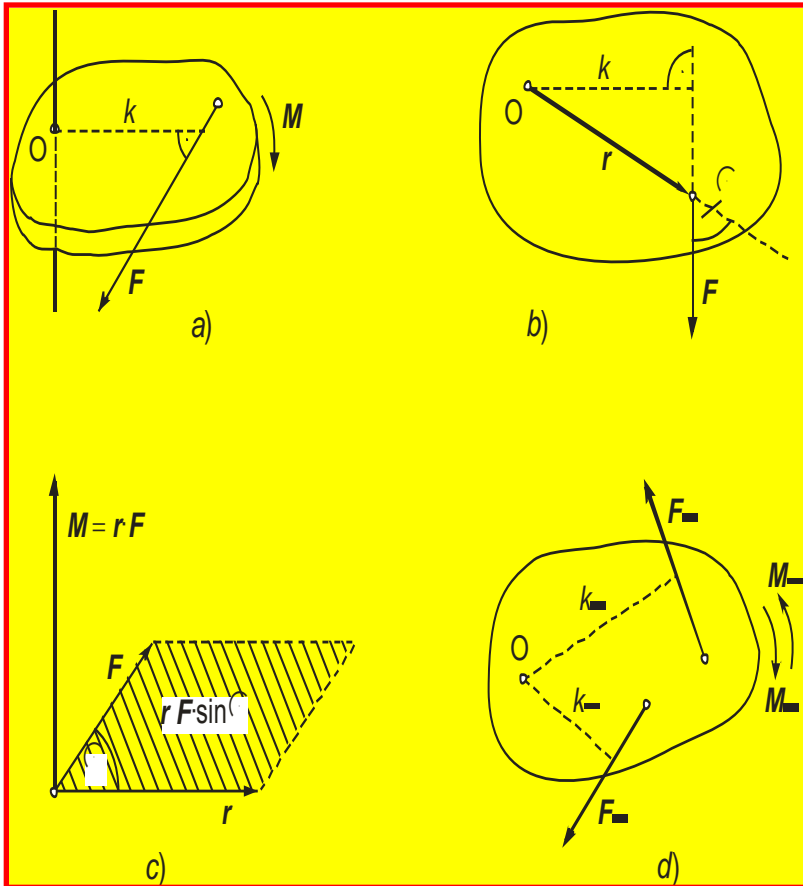
T ovisi o raspodjele mase u tijelu. Da bi se održala ravnoteža, T mora biti smješteno između stopala. Ako su stopala daleko, mora se uzeti u obzir horizontalna sila F_x .



Da bi se održala ravnoteža vektorska suma svih sila u težištu tijela **T** mora biti nula!



Mirovanje obzirom na okretanje

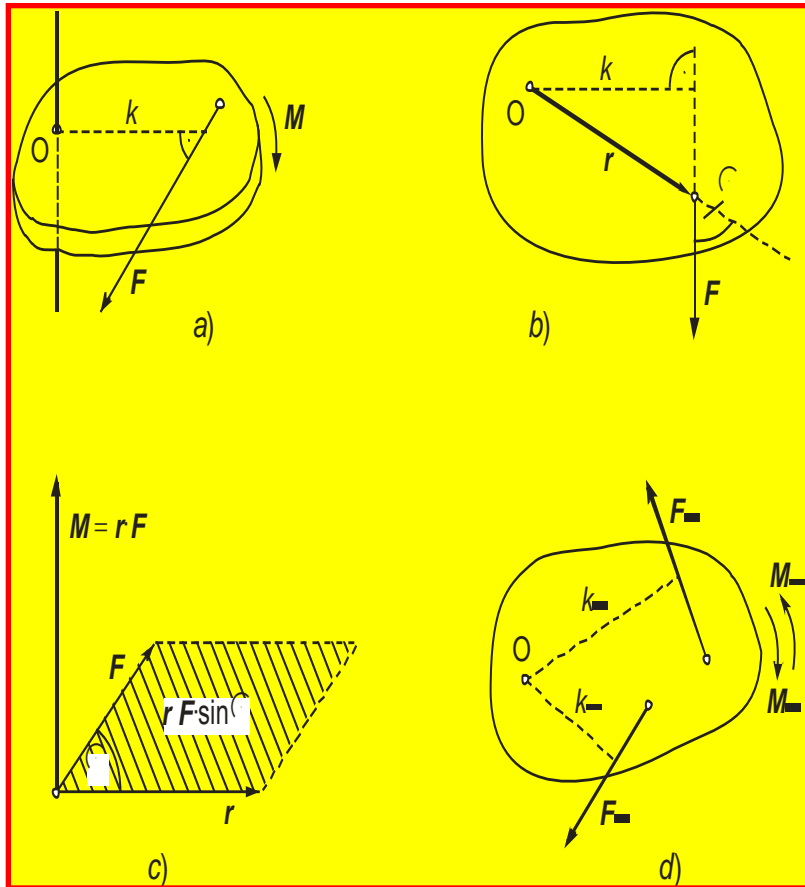


- Okretanje koje uzrokuje sila ovisi o sili ali i o njenoj udaljenosti od okretišta (**kraku sile**).
- Fizikalna veličina koja opisuje okretanje oko osi naziva se moment sile **M**, koji je jednak umnošku sile **F** i kraka sile **k**

$$M = F \cdot k$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = rF \sin \varphi$$



- Moment sile **M** je vektorska veličina određena vektorskim umnoškom vektora udaljenosti **r** i sile **F**.
- Osim vrijednosti **M** ima i smjer koji je okomit na smjer vektora **r** i **F**.
- Iznos momenta sile je:
- Krak sile **k = r sin φ**
- Ako su sila **F** i vektor udaljenosti **r** okomiti onda je krak sile **k = r**

Uvjeti mirovanja s obzirom na rotaciju

- Sila ili rezultanta više sila prolazi okretištem
- Momenti sila koje djeluju na tijelo međusobno se poništavaju

$$M_2 = k_2 F_2$$

$$M_1 = k_1 F_1$$



$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$$

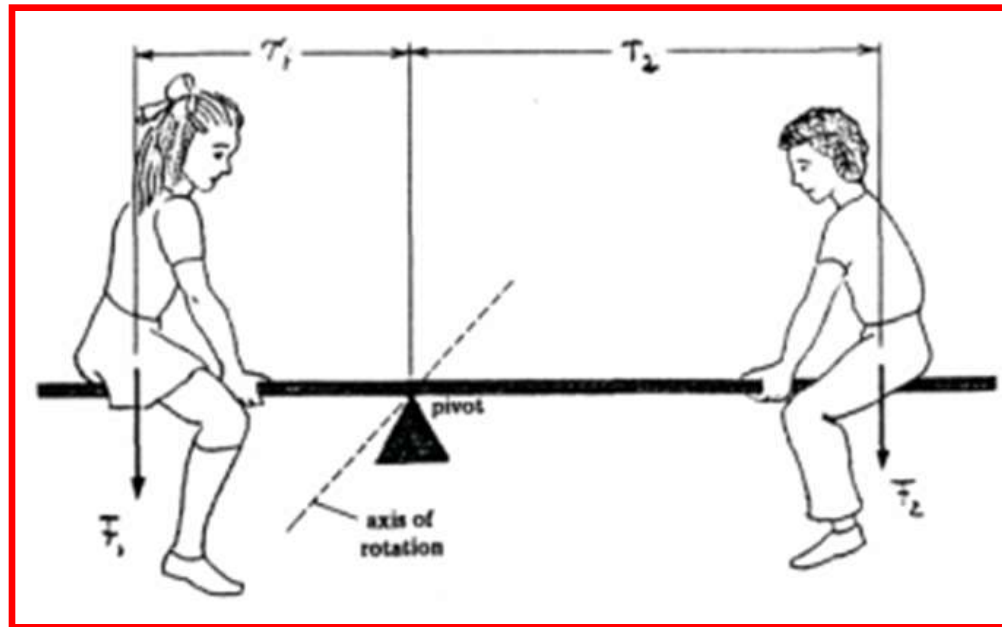
Ravnoteža dva momenta, dviju sila

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

Općeniti uvjet; zbroj momenata svih sila koje djeluju na tijelo jednak je nuli.

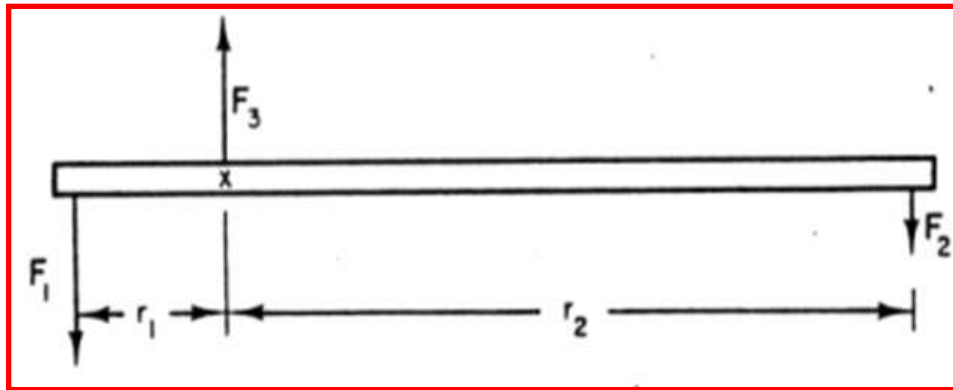
Tijelo se pokreće silama mišića koje nastaju stezanjem i rastezanjem mišićnog tkiva. Mišićne sile kontroliraju pokrete tjelesnih ekstremiteta.

Većina mišićnih sila koristi polugu



Poluga je tijelo učvršćeno samo jednom osi u **okretištu** oko koje se može okretati

Sile na poluzi



Uvjeti mirovanja obzirom na pomicanje

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Uvjeti mirovanja obzirom na okretanje

$$M_1 = M_2$$

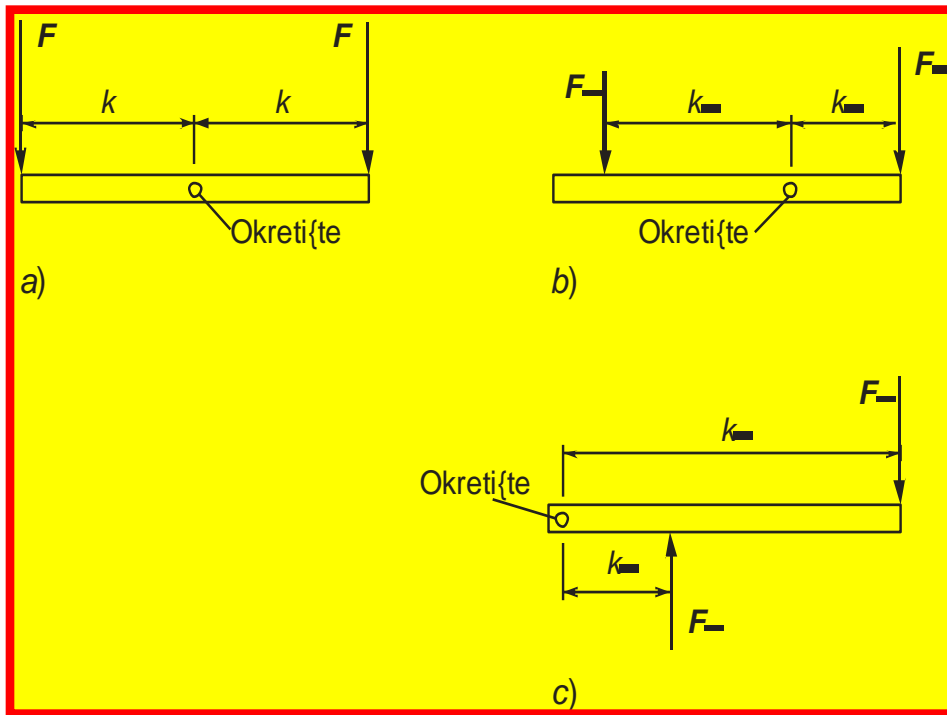
$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$

$$k_1 F_1 = k_2 F_2$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

Omjer aktivne sile (opterećenje) F_A i pasivne sile F_B (reakcije koja uravnotežuje aktivnu silu) naziva se učinkovitost ili efikasnost poluge η .

$$\eta = \frac{F_A}{F_P} = \frac{k_P}{k_A}$$

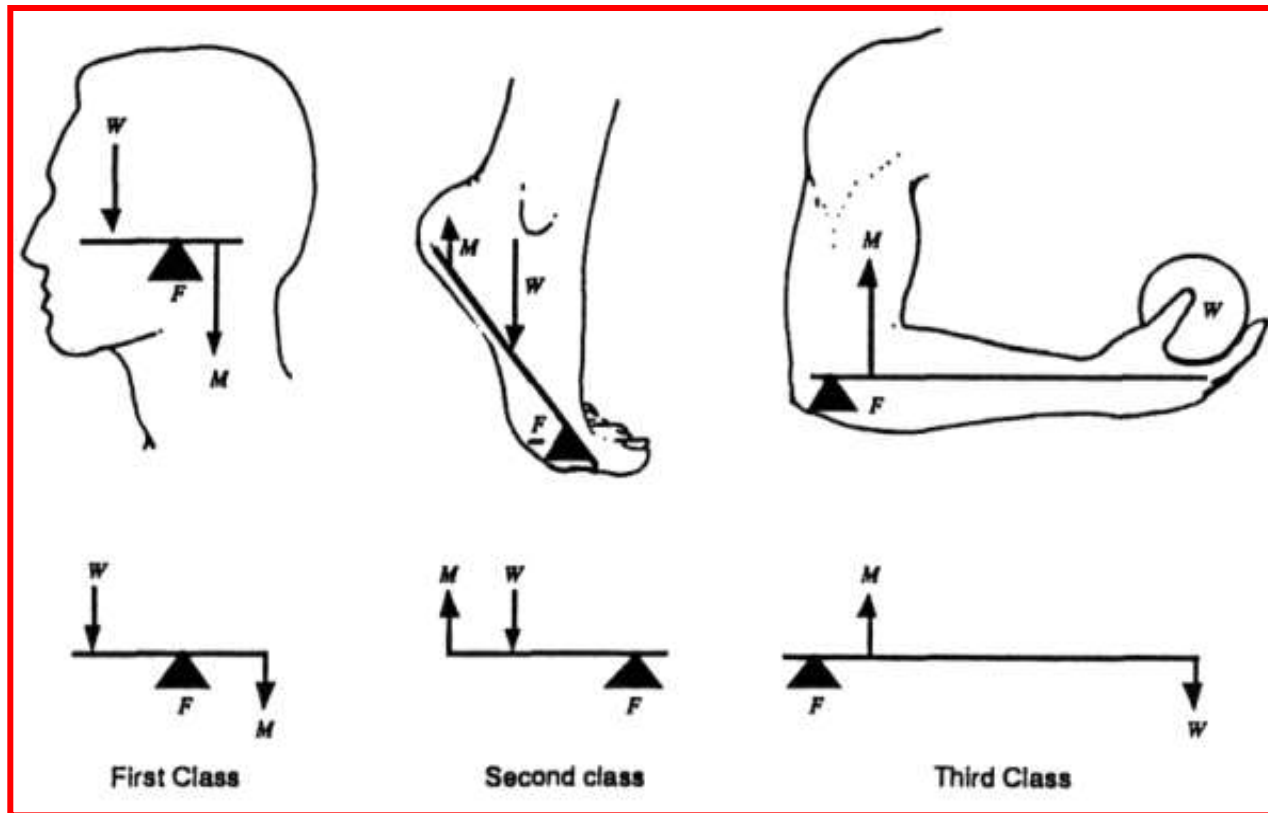


- a) Dvokraka poluga jednakih krakova
- b) Dvokraka poluga različitih krakova
- c) Jednokraka poluga

Razvrstavanje poluga prema rasporedu sila i učinkovitosti η

1. Razred: dvokraka poluga, $k_A > k_P$, $\eta < 1$
2. Razred: jednokraka poluga, $k_A < k_P$, $\eta > 1$
3. Razred: jednokraka poluga, $k_A > k_P$, $\eta < 1$

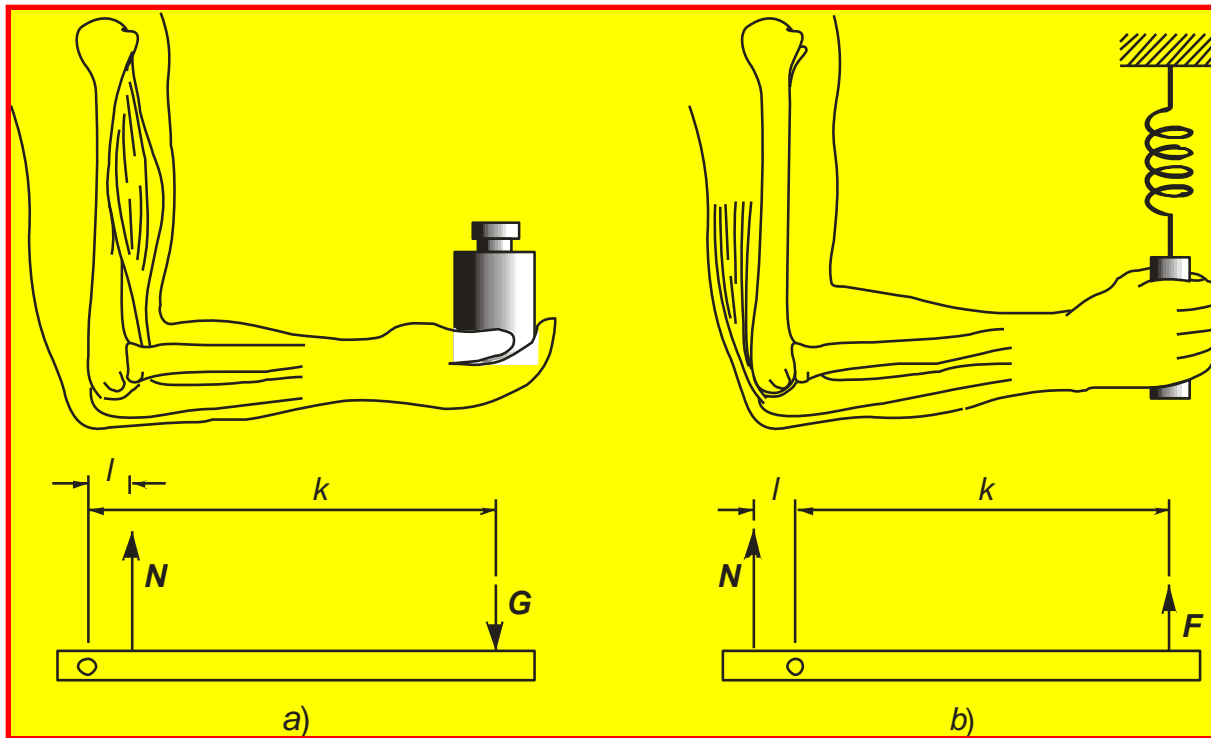
Tri primjera sistema poluge, W je primijenjena težina, F je sila koja održava točku oslonca sistema poluge i M je sila mišića.



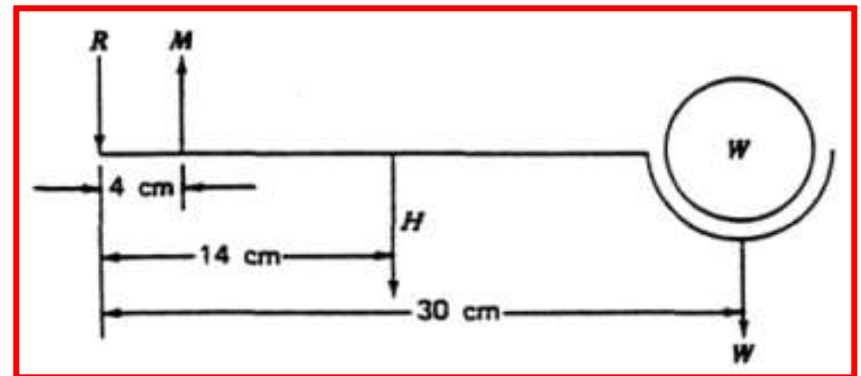
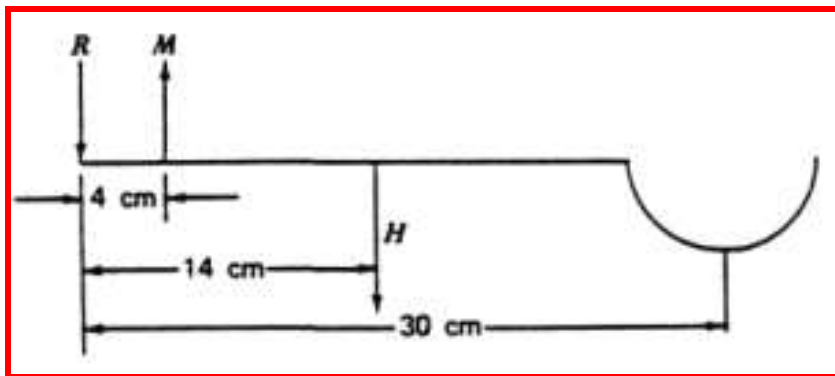
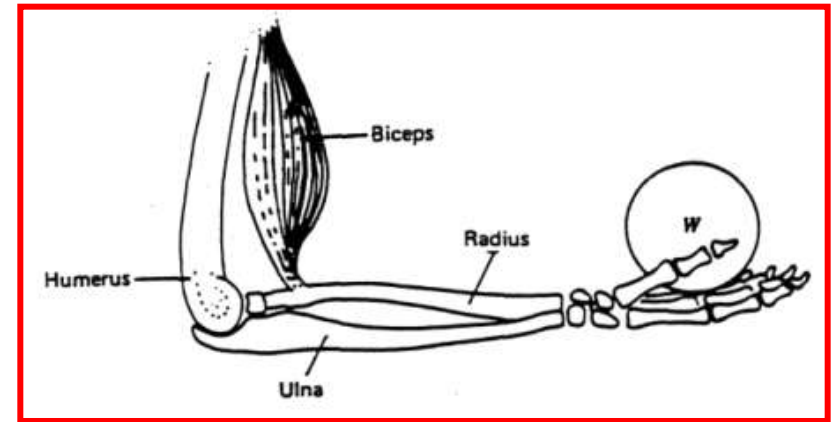
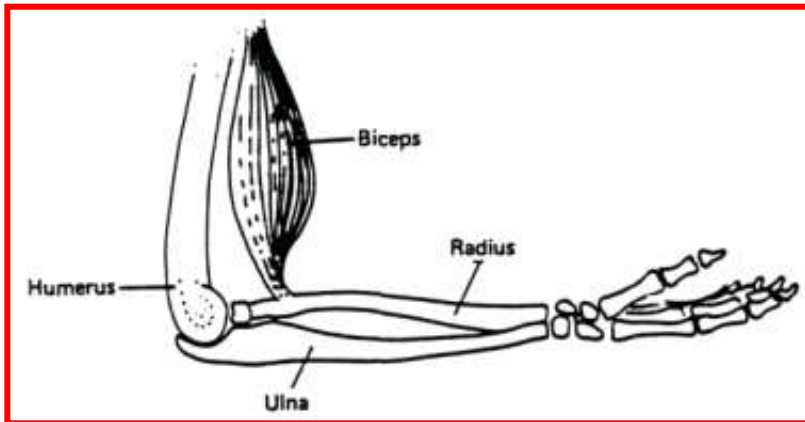
Podlaktica kao

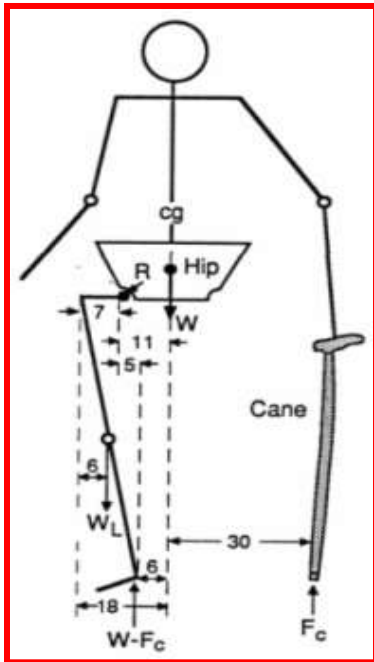
a) Dvokraka poluga

b) Jednokraka poluga



Biceps svojom kontrakcijom sila M podiže podlakticu i savladava težinu podlaktice H u njenom težištu i eventualni teret u dlanu W .





a cane is needed to support body in the case of an affected hip
the cane is beneficial if used on the opposite side

assume abductor muscle is severed:

$$\Rightarrow \sum_i \tau_i = -3/7 \cdot W + 11 \cdot W = 10.6 \cdot W$$

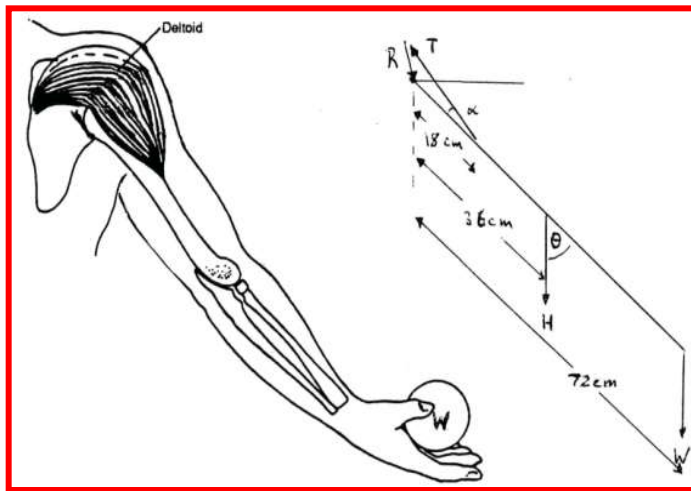
the torque at the head of the femur for an 80 kg person (one leg up):

$$\tau \approx 848 \text{ Nm}$$

with cane a percentage x of the body weight is supported:

$$\Rightarrow \sum_i \tau_i = 10.6 \cdot (W - xW) - 30 \cdot xW$$

$$x \approx 1/4$$



$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times \vec{T} + \vec{r}_2 \times \vec{H} + \vec{r}_3 \times \vec{W} = 0$$

$$r_1 \cdot T \cdot \sin \alpha - r_2 \cdot H \cdot \sin \theta - r_3 \cdot W \cdot \sin \theta = 18 \text{ cm} \cdot T \cdot \sin \alpha - 36 \text{ cm} \cdot H \cdot \sin \theta - 72 \text{ cm} \cdot W \cdot \sin \theta = 0$$

$$T = (1/18 \text{ cm}) \cdot (36 \text{ cm} \cdot H + 72 \text{ cm} \cdot W) \cdot (\sin \theta / \sin \alpha) \text{ using the same force parameters as in the previous example}$$

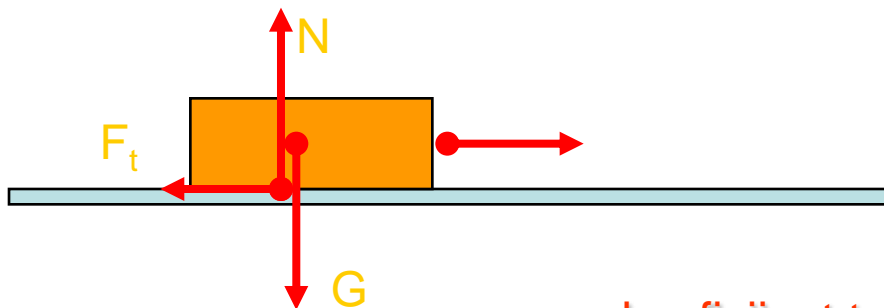
$$\Rightarrow T = (1/18 \text{ cm}) \cdot (36 \cdot 68 \text{ Ncm} + 72 \cdot 45 \text{ Ncm}) \cdot (\sin \theta / \sin \alpha) = 316$$

$$\text{N} \cdot (\sin \theta / \sin \alpha)$$

Trenje se javlja između površine koja se giba i mirujuće površine:

$$F_t = \mu_k N$$

N je sila okomita na površinu

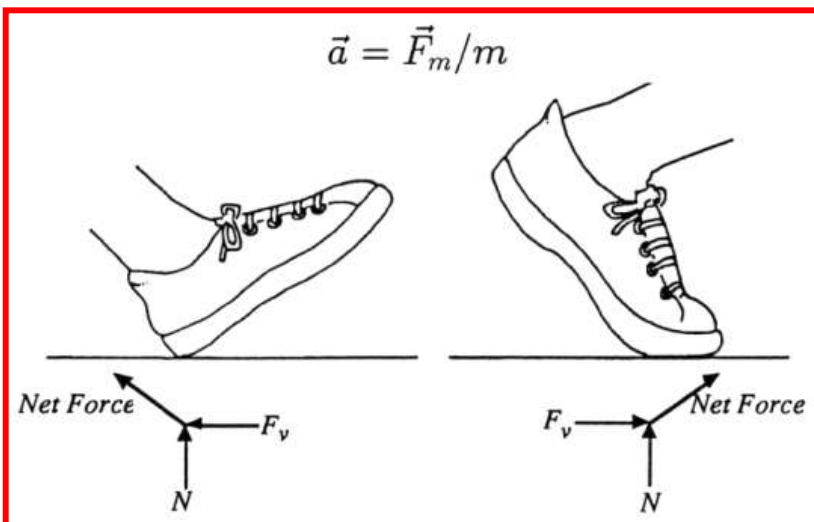


μ_k koeficijent trenja:

guma: $\mu_k \approx 0.8$

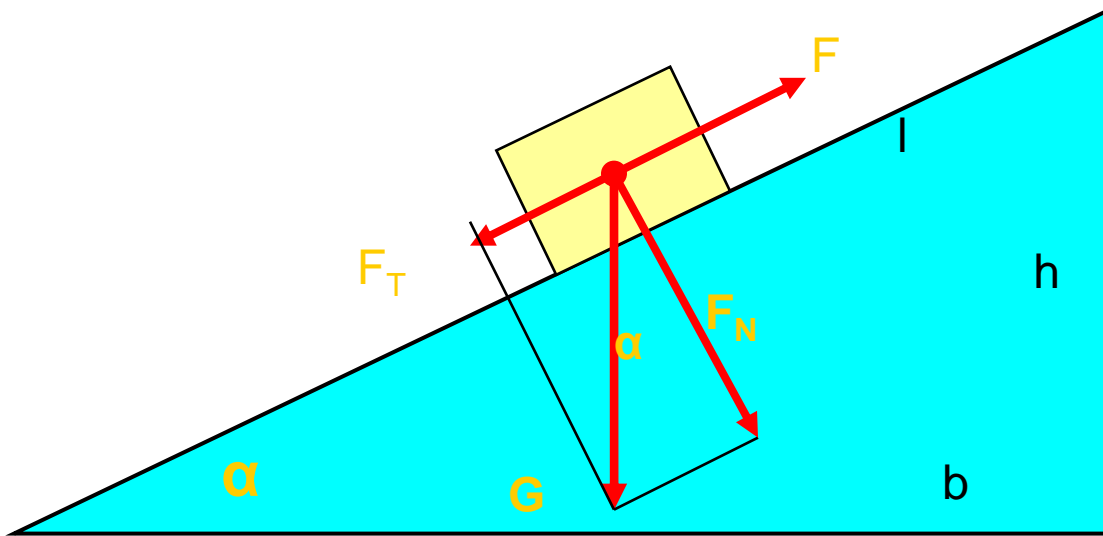
zglobovi kosti: $\mu_k \approx 0.003$

$$\vec{a} = \vec{F}_m / m$$



Ubrzanje pri kretanju može biti uzrokovano trenjem, mišićni silama ili vanjskim silama (n. pr. sudarom sa zidom).

- Sile na kosini
- normalna komponenta F_N i tangencijalna komponenta F_T



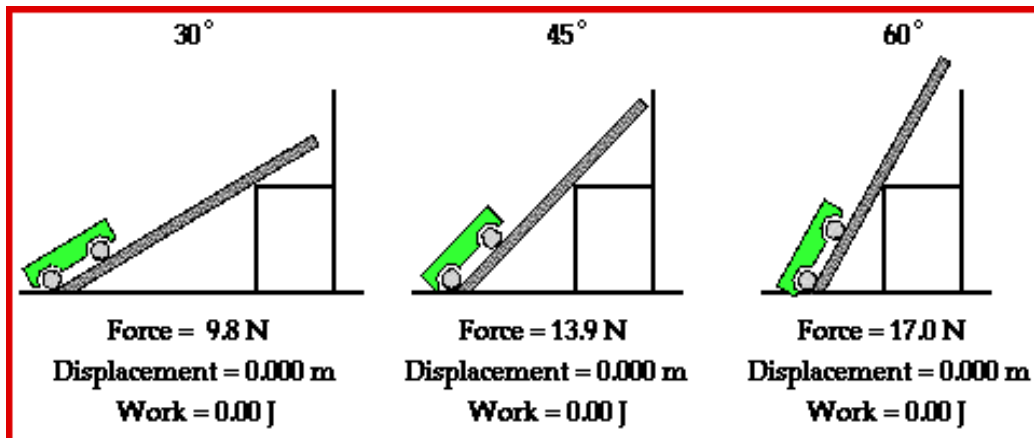
$$F_N = G \cos(\alpha) = G \frac{b}{l}$$

$$F_T = G \sin(\alpha) = G \frac{h}{l}$$

Tijelo je u ravnoteži kada je:
 $F = - F_T$

□ Rad na kosini

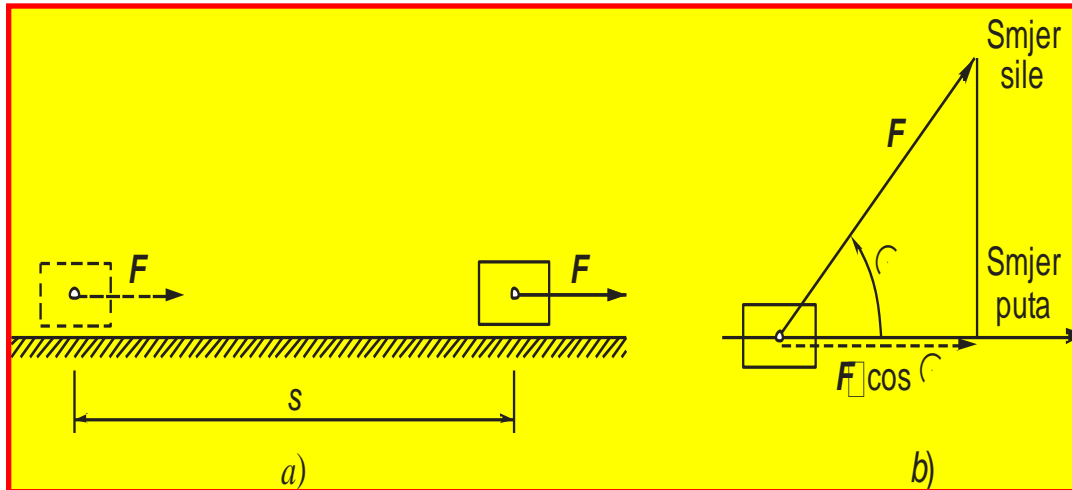
$$W = F \cdot s \cdot \cos(\varphi)$$



Rad, snaga, energija

- Da bi pomaknuli neko tijelo iz točke **A** u točku **B** moramo uložiti **rad**. **Rad W** je jednak umnošku primijenjene sile **F** i prijeđenog puta **s**.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



- smjer sile i put su paralelni

$$W = F \cdot s$$

- Smjer sile i put zatvaraju neki kut φ

$$W = F \cdot s \cdot \cos(\varphi)$$

- Jedinica je njutnmetar, džul (J=N m)

- **Snaga P** je rad izvršen u jedinici vremena. Snaga se određuje omjerom rada W i vremena t potrebnog da se rad izvrši. Jedinica snage je džul u sekundi, vat ($W=J/s$).

$$P = \frac{W}{t}$$

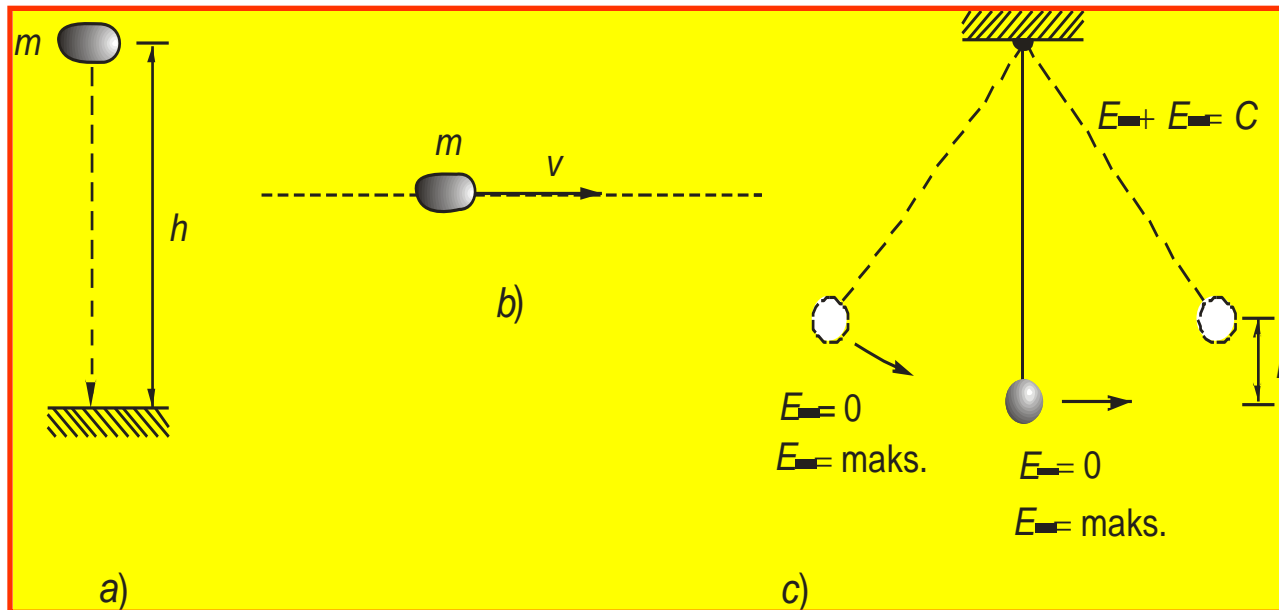
- Sposobnost obavljanja rada naziva se **energija**
- Jedinica za energiju je ista kao i za rad (džul J)
- **Energija** je jedno od svojstava materije. Neuništiva je, te može prelaziti iz jednog oblika u drugi.
- Energija u prirodi:
 - Mehanička
 - Toplinska
 - Električna
 - Nuklearna
 - Svjetlosna

Mehanička energija pojavljuje se u dva oblika:

- ❑ Potencijalna energija E_p (energija položaja, oblika, obujma)
- ❑ Kinetička energija E_k (energija gibanja)

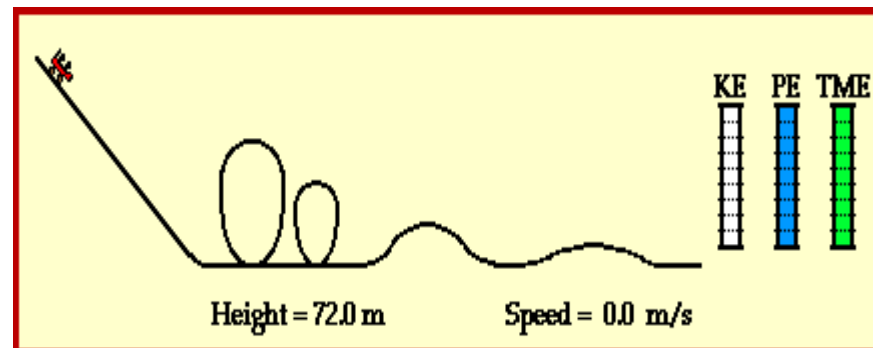
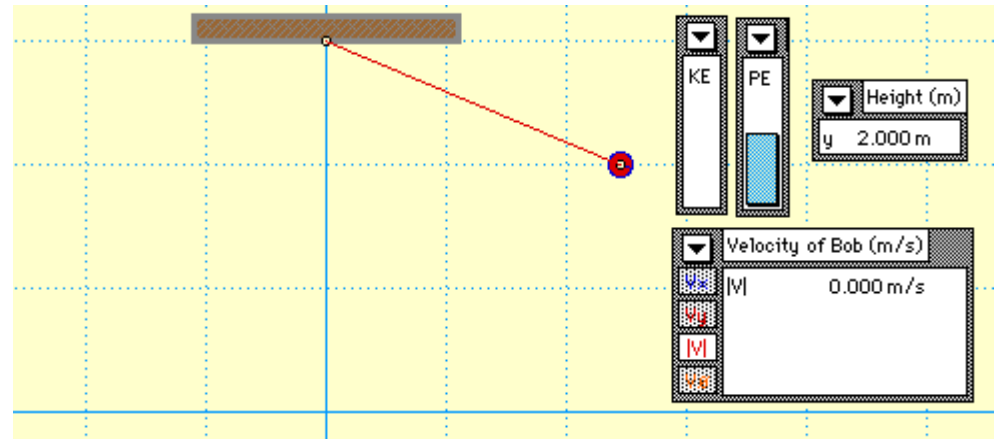
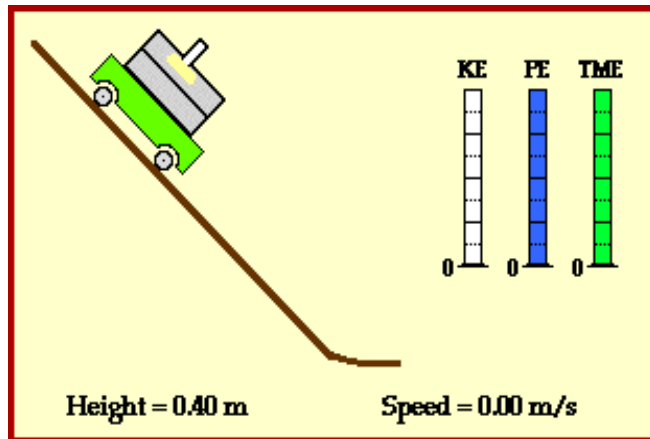
$$E_p = mgh$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$



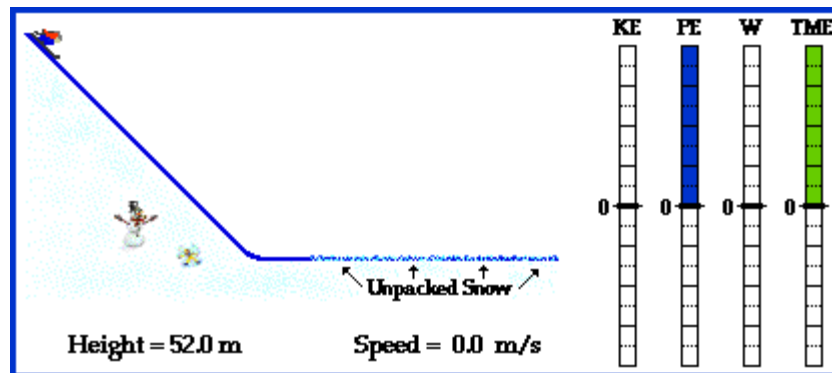
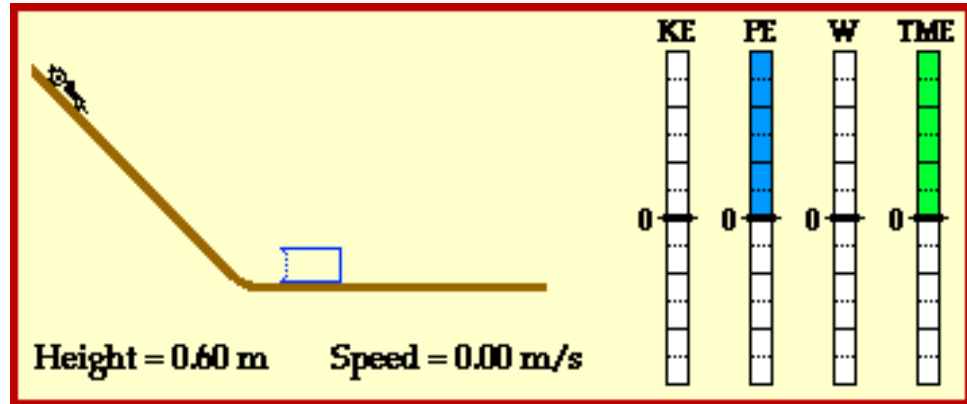
Unutar zatvorenog sustava zbroj potencijalne energije E_p i kinetičke energije E_k je stalan i jednak ukupnoj energiji sustava E .

$$E = E_p + E_k$$



Još neki primjeri sačuvanja energije

$$E = E_p + E_k + W$$



- Neke sile nemaju hvatište u jednoj točki nego djeluju na plohu
- Tlak p je omjer sile F i ploštine plohe S na koju ta sila djeluje.
- Jedinica za tlak je njutn po četvornom metru , paskal ($\text{Pa}=\text{N}/\text{m}^2$). Dopusštene jedinice $\text{bar}=10^5\text{Pa}$, milimetar žive $\text{mmHg}=133,322 \text{ Pa}$

$$p = \frac{F}{S}$$





To je sve o mehanici,
**a ako itko želi znati
više
neka pogleda dolje
spomenuti web**

Ilustracije i ideje uglavnom posuđene iz slijedećih izvornika:

Jakobović, Z.: Fizika i elektronika - odabrana poglavlja za studije Visoke zdravstvene škole. Zagreb: Visoka zdravstvena škola, 1997.

<http://www.physicsclassroom.com/>

<http://www.nd.edu/~nsl/Lectures/mphysics/index.htm>