Signali i sustavi - Rješenja zadataka za vježbu (III. kolokvij)

1.

$$H(z) = \frac{z+2}{z^3} \qquad H_1(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$$

$$h_1(k) = \delta(k) - \delta(k-2)$$

2.

$$Y(z) = \frac{z^3-2}{z(z^2-1)} \qquad H_1(z) = \frac{2z-1}{z-1} \qquad H(z) = 1$$

$$u(k) = 2\delta(k-1) - \frac{1}{2}\cdot 1^k + \frac{3}{2}\cdot(-1)^k$$

3.

$$H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-4}\cdot\frac{1}{1-z^{-3}} + 2z^{-5}\cdot\frac{1}{1-z^{-3}}$$

$$y(k) = \delta(k) + 0\cdot\delta(k-1) + 0\cdot\delta(k-2) + 0\cdot\delta(k-3) + 1\cdot\delta(k-4) + 3\cdot\delta(k-5) + \ldots$$

Prvih pet uzoraka:

$$y(k) = [1,0,0,0,1]$$

4.

$$h_2(k) = \{\underline{0}, \delta(k-1), 0, \delta(k-3), 0, \delta(k-4), \ldots\}$$

$$s_3(k) = \delta(k) - \delta(k-1)$$

5.

$$h(k) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 3\left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geq 1 \end{cases}$$

$$y(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot(1+3k)$$

6.

$$u(k)=-\delta(k)+2^k s(k)$$

7.

$$a_1=3 \qquad a_2=2$$

Prisilni odziv:

$$y_{pris.}(k)=2\cdot(-1)^k-\frac{7}{2}\cdot(-2)^k+\frac{5}{2}\cdot(k+1)\cdot(-2)^k$$

8.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z-1}{(z+1)^2}$$

Pobuda za željeni odziv:

$$u(k)=\delta(k)+\delta(k-1)-\delta(k-2)-\delta(k-3)$$

9. Jednadžbe stanja i izlazna jednadžba u matričnom obliku:

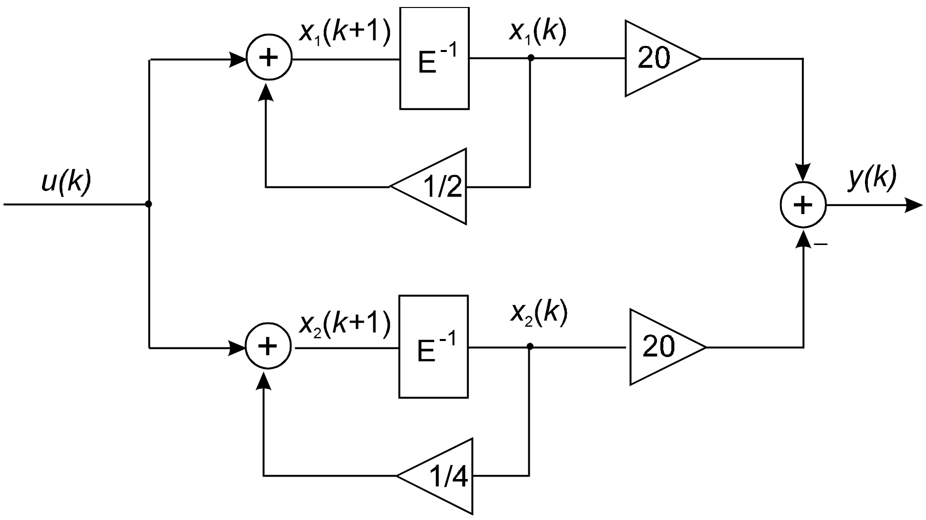
$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}20&-20\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}\cdot u(k)$$

Sustav je upravljiv jer jednostrukim polovima u A^* odgovaraju ne-nul retci u B^*.

Sustav je osmotriv jer jednostrukim polovima u A^* odgovaraju ne-nul stupci u C^*.

Isto se vidi na simulacijskom blok-dijagramu:



10. Partikularno rješenje dif. jednadžbe:

$$y_p(k) = \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{6} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{k\pi}{6}$$

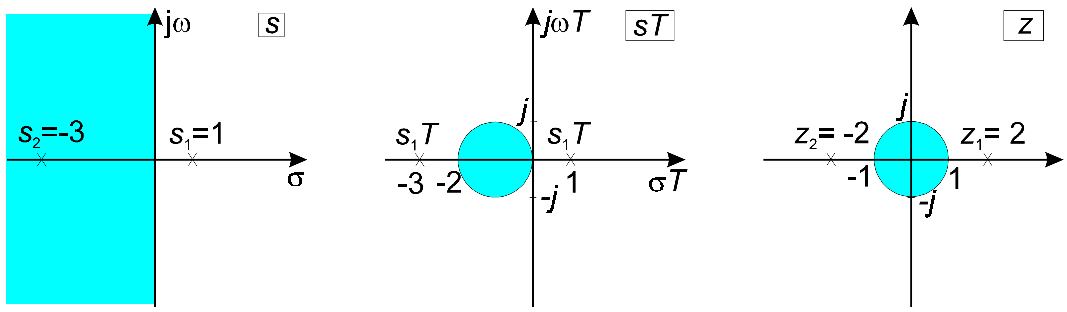
Ukupni odziv:

$$y(k) = \left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(-1)^k + \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{6} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\cos\frac{k\pi}{6} \qquad k \geq 0$$

11. Impulsni odziv sustava:

$$h(k) = -\frac{1}{4}\delta(k) + \frac{1}{4}\cdot(2)^k - \frac{1}{4}\cdot(-2)^k$$

Stabilnost:



Kontinuirani sustav je *nestabilan* jer ima pol $s_1 = 1$ u desnoj poluravnini.
Polovi s_1T i s_2T su van područja stabilnosti Eulerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan*.
Diskretni sustav je *nestabilan* jer su polovi z_1 i z_2 van jedinične kružnice u Z-ravnini.

Za $T = 1/3$

$$s_1 \cdot T = \frac{1}{3}$$

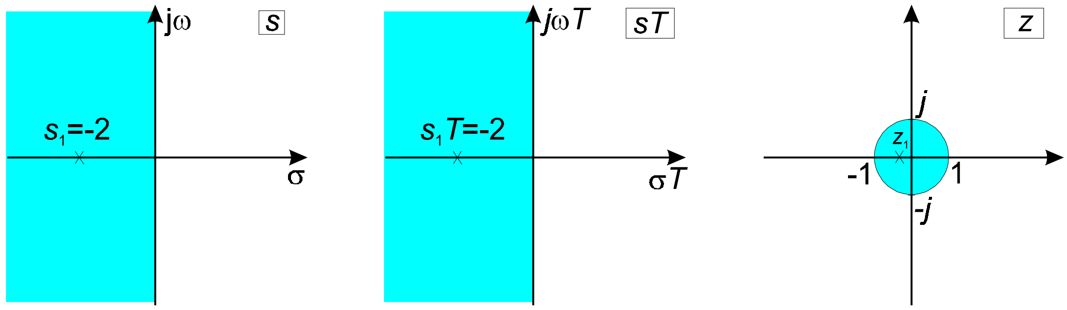
$$s_2 \cdot T = -1$$

$s_1 T$ nije upao u područje stabilnosti Eelerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan.*

12. Impulsni odziv sustava:

$$h(k) = 3\delta(k) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Stabilnost:

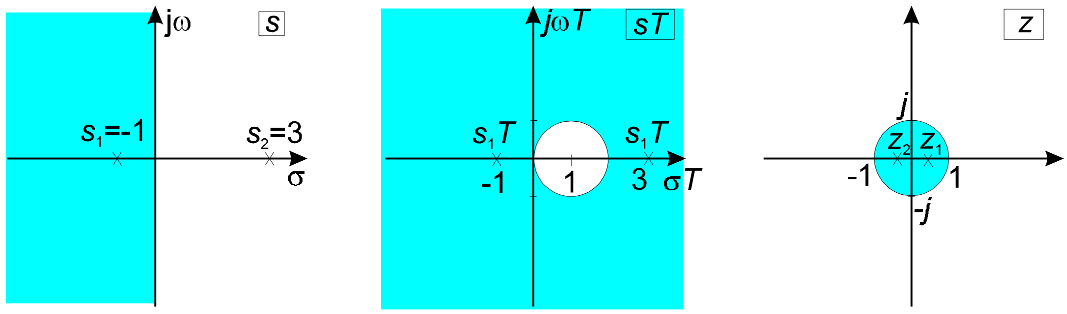


Kontinuirani sustav je *stabilan* jer se pol s_1 = -2 nalazi u lijevoj poluravnini.
Bilinearna transformacija preslika lijevu poluravninu u jediničnu kružnicu u *Z*-ravnini, pa će diskretni sustav biti *stabilan*.

13. Impulsni odziv sustava:

$$h(k) = -\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]$$

Stabilnost:



Kontinuirani sustav je *nestabilan* jer se pol s_2 = 3 nalazi u desnoj poluravnini.
Polovi $s_1 T$ i $s_2 T$ su unutar područja stabilnosti obrnutog Eulera, pa ćemo od nestabilnog kontinuiranog sustava dobiti *stabilni* diskretni sustav.

Potvrda onoga što smo ranije zaključili: Diskretni sustav je *stabilan* jer su polovi z_1 i z_2 unutar jedinične kružnice u Z-ravnini.

14. a)

$$H(z) = \frac{2z}{z - \frac{1}{e^T}}$$

b)

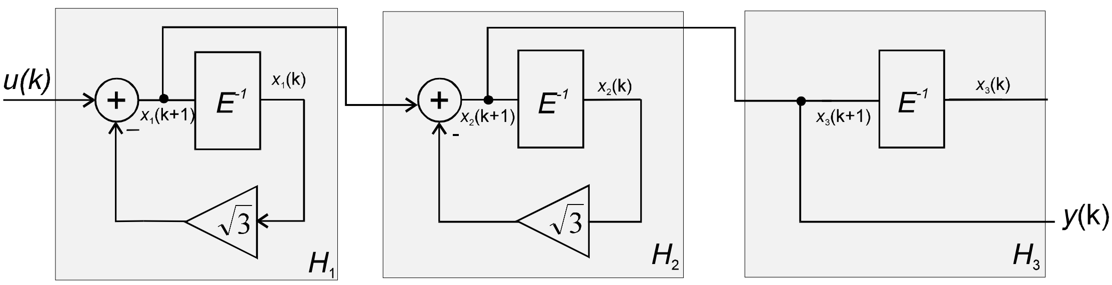
$$h(kT) = \frac{-2T}{2-T}\delta(k) + \frac{8T}{4-T^2} \cdot \left(\frac{2-T}{2+T}\right)^{kT}$$

15. Kaskadna realizacija:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

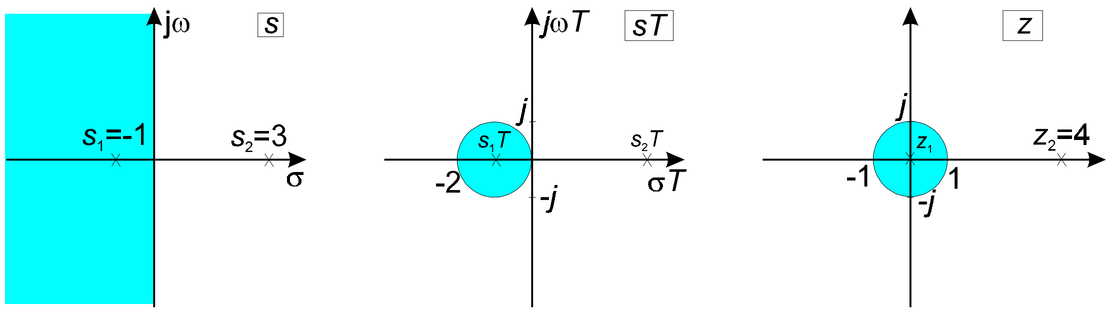
$$y(k) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + [1] \cdot u(k)$$

Simulacijski blok-dijagram:



16.

$$H(z) = \frac{1}{z(z-4)}$$



Kontinuirani sustav je *nestabilan* jer se pol $s_2 = 3$ nalazi u desnoj poluravnini.
Pol s_2T nije u području stabilnosti Eulerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan*.
Potvrda onoga što smo ranije zaključili: Diskretni sustav nije *stabilan* jer se pol z_2 nalazi van jedinične kružnice u Z-ravnini.
Za $T = 1/3$

$$s_1 \cdot T = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$s_2 \cdot T = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

s_2T pada van područja stabilnosti Eulerova algoritma, pa će diskretni sustav biti *nestabilan.*