Vježbe iz matematike 1

B. Ivanković
N. Kapetanović

8. rujna 2005.

Uvod Vježbe su tijekom dugog niza održavanja nadopunjavane. Osnovu vježbi napravila je Nataša Kapetanović, ing. matematike, a podebljao ih je mr. Božidar Ivanković.

Čitanje "Vježbi iz matematike 1" zahtijeva paralelno korištenje udžbenika "Matematika 1" kojeg je napisala prof.dr. Sanja Marušić i redovito pohađanje predavanja i vježbi kolegija "Matematike 1".

Velik broj zadataka riješen je postupno, a svaki zadatak trebao bi imati rješenje. Složeniji zadaci imaju i uputu. Skica nema, iako se radi o geometrijskim zadacima i one su ostavljene čitaocu koji ih može napraviti prema uputama za rješavanje zadataka.

Korištenje zbirke svodi se na samostalno rješavanje zadataka. Idealno vrijeme za rješavanje zadataka je na vježbama i neposredno nakon dolaska s vježbi.

Nemojte izbjegavati zadatke koji se čine laganim. Nema lakših i težih zadataka, već se dijele na zadatke koje ste riješili na one koje još niste riješili.

Ako imate poteškoća u rješavanju novih zadataka, naučite napamet rješavati zadatke koji su vam pokazani na vježbama, predavanjima ili vam ih je pokazala neka stručna osoba.

Ako ste primorani uzimati instrukcije, nastojte na instrukcije odlaziti s pripremljenim pitanjima i odmah poslije instrukcija riješite nove zadatke ili naučite napamet zadatke koje vam je pokazao instruktor.

Trudili smo se napisati zbirku bez greške. Ukoliko vam se čini da je negdje greška napravljena, bit ćemo vam zahvalni ako ćete nam to javiti. Iduće izdanje proširit ćemo s još više zadataka za samostalno rješavanje.

Sadržaj

1 Brojevi brojevnog pravca

1.1 Prirodni brojevi

Peanovi aksiomi zadaju skup prirodnih brojeva:

$$1 \in \mathcal{N}$$
$$n \in \mathcal{N} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{N}$$

Računske operacije koje se mogu definirati u $\mathcal{N}$ su zbrajanje i i množenje.

Zbrajanje prirodnih brojeva je računska operacija koja ima svojstvo asocijativnosti

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

i komutativnosti

$$a + b = b + a,$$

ali nema neutralnog elementa, jer ne postoji prirodan broj e sa svojstvom

$$a + e = e + a = a.$$

Kaže se da skup $\mathcal{N}$ ima strukturu polugrupe

Zadatak 1.1 *Zbrojite prvih 100 prirodnih brojeva.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+98+99+100 &= \\
(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots &= \\
101+\ldots 101 &= 5050.
\end{aligned}$$

U rješavanju zadatka korišteno je svojstvo komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja prirodnih brojeva.

Množenje prirodnih brojeva uz asocijativnost i komutativnost ima jedinični element. To je broj 1, jer vrijedi

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Nemoguće je za prirodni broj $a \neq 1$ naći prirodni broj c tako da vrijedi:

$$a \cdot c = c \cdot a = 1,$$

pa se kaže da množenje prirodnih brojeva nema svojstvo inverza. Tako prirodni brojevi obzirom na množenje imaju strukturu polugrupe s jedinicom.
Oduzimanje i dijeljenje ne mogu se definirati u skupu $\mathcal{N}$.

Matematička indukcija je princip kojim se dokazuju tvrdnje koje vrijede za prirodne brojeve.

Zadatak 1.2 *Dokažite da za prirodne brojeve vrijedi*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje:
Baza matematičke indukcije dokazuje da tvrdnja vrijedi za $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Ako je baza dokazana, ostaje za dokazati **korak matematičke indukcije**:
iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za n

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

dokazuje se da tvrdnja vrijedi za $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Korištenje pretpostavke indukcije sastoji se u uvrštavanju koje daje:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

a svođenje na zajednički nazivnik dokazuje tvrdnju.

Dokažite principom matematičke indukcije istinitost slijedećih tvrdnji za svaki prirodni broj n:

1. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$

2.
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

3.
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

4.
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

5.
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

6.
$$1^5 + 2^5 + \ldots n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

1.2 Cijeli brojevi

Skup cijelih brojeva, u oznaci $\mathcal{Z}$ prirodno je proširenje skupa prirodnih brojeva. Skup $\mathcal{N}$ moguće je proširiti nulom kao neutralnim elementom za zbrajanje:
$$0 + a = a + 0 = a, \quad \forall a \in \mathcal{Z}.$$
Svakom je prirodnom broju n moguće pridružiti **suprotan** broj u oznaci $-n$, tako da vrijedi:
$$n + (-n) = -n + n = 0.$$
Skup cijelih brojeva, u oznaci $\mathcal{Z}$ prirodno je proširenje skupa prirodnih brojeva:
$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \cup 0 \cup \{-1, -2, \ldots - n, \ldots\}.$$

Zbrajanje u skupu $\mathcal{Z}$ definira se kao prirodno proširenje zbrajanja prirodnih brojeva. U $\mathcal{Z}$ zbrajanje ima neutralni element i svaki cijeli broj ima inverz obzirom na zbrajanje:
$$\forall a \in \mathcal{Z} \quad \exists -a \in \mathcal{Z}, \quad a + (-a) = -a + a = 0,$$
jer vrijedi $-(-a) = a$

Oduzimanje u skupu $\mathcal{Z}$ kao računska operacija prelazi u računsku operaciju zbrajanja suprotnim brojem.

Množenje cijelih brojeva prirodno je proširenje množenja prirodnih brojeva.

Apsolutna vrijednost cijelog broja je funkcija

$$| \quad | : \mathcal{Z} \to \mathcal{N} \cup 0$$

zadana formulama:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

1.3 Racionalni brojevi

Skup racionalnih brojeva , u oznaci $\mathcal{Q}$ je skup

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, \quad m \in \mathcal{Z}, \quad n \in \mathcal{N} \right\}$$

brojeva koji se daju zapisati kao razlomci.

Konačni decimalni brojevi mogu se zapisati kao razlomci.

Zadatak 1.3 *Napišite u obliku razlomka* 3.625

Rješenje:

$$3.625 = \frac{3625}{1000} = \frac{145}{40} = \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$$

Beskonačno periodički decimalni brojevi mogu se napisati u obliku razlomaka.

Zadatak 1.4 *Napišite u obliku razlomka* $0.66\ldots = 0.\dot{6}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 0.66\ldots - 0.66\ldots &= 9 \cdot 0.66\ldots \\ 6.66\ldots - 0.66\ldots &= 9 \cdot 0.66\ldots \\ 6 &= 9 \cdot 0.66\ldots | : 9 \\ \frac{6}{9} &= 0.66\ldots \end{aligned}$$

Zadatak 1.5 *Napišite slijedeće periodičko beskonačne decimalne brojeve u obliku razlomaka:*

$$a) \quad 0.55\ldots \qquad b) \quad 0.\dot{1}\dot{8}$$
$$c) \quad 3.\dot{1}\dot{5} \qquad d) \quad 23.3\dot{4}$$

Rješenja: $a)$ $5/9$; $b)$ $2/11$ $c)$ $3\frac{5}{33}$ $d)$ $23\frac{67}{90}$.

Beskonačno decimalni brojevi koji nisu periodički, ne mogu se napisati u obliku razlomka.

Postotak je racionalan broj.

Zadatak 1.6 *Prepišite i popunite tablicu:*

postotak	12%				
decimalni zapis		0.25		2.3	π
razlomak			1		

Rješenje: prvi red: 25%, 100%, 230% i 100π%; drugi red: 0.12, 1; treći red: $\frac{6}{5}$, $\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{10}$ i π se ne može napisati kao razlomak

Zadatak 1.7 *Ako je cijena kruha u dućanu* $6,00$ *kn, a PDV je 22%, kolika je porezna osnovica, a koliko je kuna iznos PDV-a?*

Rj. Zadatak se rješava jednadžbom

$$x + 22\% \cdot x = 6,$$

gdje je x iznos porezne osnovice u kunama. Porezna osnovica je $4.92kn$ a PDV $1.08kn$.

Zadatak 1.8 *Kolika bi bila porezna osnovica, a koliki PDV u kunama, ako se stopa PDV-a za kruh iz prethodnog zadatka promijeni na 20%?*

Rj. p.o. $5kn$, PDV $1kn$.

Zadatak 1.9 *Ako je piva u pivovari* $3,00$ *kuna, a u gostionici* $10,00$ *kuna, izračunajte maržu na jednoj boci i kunski iznos PDV-a kojeg je gostioničar dužan platiti?*

Rj. Kad gostioničar plati pivo u pivovari, plati PDV $0.54kn$. Taj iznos odbija se od iznosa PDV-a kod pive u gostionici, koji iznosi $1.80kn$. Konačno, za pivo i PDV gostioničar izdvoji $3 + 1.80 - 0.54 = 4.26$ kuna. Marža je $5.74kn$, a PDV $1.26kn$ i vrijedi da je $1.26kn = 22\% \cdot 5.74kn$. Posljednja jednakost opravdava naziv PDV.

1.4 Realni brojevi. Broj e. Broj π.

Zadatak 1.10 *Samostalno riješite slijedeće zadatke:*

1. *Napišite* $2\frac{2}{3}$ *u obliku decimalnog broja.*
2. *Napišite decimalne brojeve:*
   a) $0.3333\ldots$
   b) $0.353535\ldots$
   c) $4.532323232\ldots$

   u obliku razlomaka.
3. *Konstruirajte decimalni broj koji se ne bi mogao zapisati u obliku razlomka. Koja se znamenka nalazi na* $1000.$ *mjestu u tom decimalnom broju?*

Rj.

1. $2.66\ldots$
2. (a) $1/3$
   (b) $4/11$
   (c) $4\frac{1757}{3300}$
3. jedan od mogućih je $0.12345678910111213141516171819\ldots$. Na $1000.$ mjestu ne može doći znamenka iz dopisanog četveroznamenkastog broja, jer je $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 > 1000$. Znači, na $1000.$ mjestu je znamenka nekog dopisanog troznamenkastog broja. Treba otkriti kojeg.
   Neka je x posljednji dopisani troznamenkasti broj čije su znamenke ispred $1000.$ decimalnog mjesta. Očito je $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot x \leq 1000$, pa se iz rezultata $x \leq 270$ zaključuje da je dopisano 270 troznamenkastih brojeva koji su zajedno sa jedno i dvoznamenkastim brojevima popunili $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 270 = 999$ decimalnih mjesta. Prvi troznamenkasti broj je 100, drugi je 101, a $270.$ je $100 + 270 - 1 = 369$. Znamenka dopisana na $1000.$ mjestu je 3.

Broj e

Zadatak 1.11 *Netko dobije milijun kuna i uloži ih u banku na godinu dana uz 12% godišnjih kamata. Kojom svotom raspolaže nakon godine dana?*

Rj. Ako se označi

$C_0 = 1,000.000kn$ glavnica

$p = 12\%$ godišnji postotak

$C_1 =?$ svota nakon godine dana

$C_1 = C_0 + C_0 \cdot p = C_0 \cdot (1+p)$; $C_0 = 1,120.000kn$

Zadatak 1.12 *Netko je dobio milijun kuna, ali ih je uložio na godinu dana u banku uz dogovor, da mu se mjesečno $\frac{p}{12} = 1\%$ kamata pripisuje glavnici.Kojom će svotom raspolagati na kraju godine?*

Rj. Neka je

$C_0 = 1,000.000kn$ - početna svota

$p = 12\%$ - godišnja kamatna stopa

Koncem prvog mjeseca svota na računu biti će

$$C_1 = C_0 + \frac{p}{12} \cdot C_0 = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12}).$$

Krajem drugog mjeseca:

$$C_2 = C_1 + \frac{p}{12} \cdot C_1 = C_1 \cdot (1 + \frac{p}{12}) = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12}) \cdot (1 + \frac{p}{12}) = C_0(1 + \frac{p}{12})^2.$$

Induktivno, krajem trećeg mjeseca:

$$C_3 = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12})^3,$$

a krajem godine, nakon 12 ukamaćivanja:

$$C_{12} = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{12})^{12}.$$

Uvrštavanjem podataka

$$C_{12} = 1,000.000 \cdot (1 + \frac{0.12}{12})^{12} = 1,126.825,03kn.$$

Uočiti da je povećanje u odnosu na prošli zadatak iznosom od $6.825,03kn$ vrlo solidna svota.

Zadatak 1.13 *Kolika će biti svota od milijun kuna na kraju godine, ako* $\frac{p}{360}$ *ukamaćujemo svaki dan, uz* $p = 12\%$ *godišnjeg kamatnjaka?*

Rj. Analognim razmatranjem dobiva se formula

$$C_{360} = C_0 \cdot (1 + \frac{p}{360})^{360},$$

gdje je $C_0 = 1,000.000kn$, $p = 12\%$, a broj dana u godini se u našim bankama obračunava kao 360, po ugledu na Njemačke banke. Konačna svota je $c_{360} = 1,127.474,31kn$ Uočiti da povećanje i nije drastično u odnosu na prethodni zadatak

Promatranjem tri prethodna zadatka naslućuje se postojanje granične vrijednosti za ukamaćivanja koja bi se vršila svakog trenutka.

Zadatak 1.14 *Neka je* $f : \mathcal{N} \to \mathcal{R}$ *niz zadan formulom:*

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Odredite $f(100)$, $f(10000)$, $f(1000000)$, $f(10^8)$ *zaokruženo na 5 decimala.*

Rješenje:
$f(1) = 2$, $f(10) = 2.593742$, $f(100) = 2.704813$, $f(1000) = 2.716923$, $f(10000) = 2.718145$, $f(1000000) = 2.718280$, $f(10^8) = 2.718281$

Napomena 1.1 *Zadatkom 1.14 pokazano je da za* $n > 10^6$ *vrijednost funkcije zaokružena na 5 decimala iznosi 2.71828.*

Baza prirodne eksponencijalne progresije e je realni broj čija vrijednost zaokružena na 5 decimala glasi

$$e = 2.71828$$

Zapis tvrdnje da se vrijednost broja e može po volji točno dobiti računanjem formule

$$f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$$

odabirom dovoljno velikih brojeva n je izraz:

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n}) = e,$$

gdje se oznaka $\lim_{n\to\infty}$ čita kao granična vrijednost izraza u koji se umjesto n uvrštavaju (beskonačno) veliki brojevi. Dobro je zapisati i drugi, izvedeni limes:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{n}) = \left(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{p}})^{\frac{n}{p}}\right)^{p} = e^{p}.$$

Ukamaćuje li se svota svaki trenutak, to će svota nakon godine dana **neprekidnog ili kontinuiranog** ukamaćivanja godišnjim kamatnjakom p biti:

$$\lim_{n\to\infty} C_0 \cdot (1+\frac{p}{n}) = C_0 \cdot e^{p}.$$

Broj π

Broj π je omjer opsega kruga i promjera. Broj π ne može se napisati u obliku razlomka.

Postoji formula za približni račun broja π:

$$\pi = 4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}).$$

Uzimanjem većeg broja pribrojnika postiže se veća točnost za π.

Problemski zadaci

1. U beskonačno neperiodičkom decimalnom broju

$$0.112123123412345\ldots$$

   odredite znamenku na 1000. decimalnom mjestu.

2. Izračunajte poreznu osnovicu i porez u kunama ako je konačna cijena proizvoda 133 kune, a primjenjuje se porezna osnovica od 18%.

3. Odredite poreznu osnovicu i PDV u kunama za prodajnu cijenu od 15kn i stopu PDV-a 22%. Ako je nabavna cijena proizvoda bila $4kn$, izračunajte maržu u kunama i konačni iznos plaćenog PDV-a

4. Cijena automobila u salonu je 14000, dok je cijena u tvornici 8000. Porez na dodanu vrijednost neka je 25%. Kolika je čista dobit u eurima, a koliki je iznos poreza koji je trgovac automobilima platio? Provjerite da li dodana vrijednost (čista dobit) i vrijednost poreza zaista opravdavaju naziv poreza na dodanu vrijednost.

5. Kamata na "minus" kod American Expressa je 22% godišnje. Račun koji treba platiti ima iznos $4000kn$.

   (a) Na koju svotu račun naraste nakon godinu dana neprekidnog ukamaćivanja?

   (b) Koliki je iznos kamata koje bi platili da smo dva mjeseca dužni 4000 kuna, a ukamaćivanje je kontinuirano?

   (c) Koliki bi bio iznos računa, a kolike kamate nakon 5 godina neprekidnog ukamaćivanja?

6. Principom matematičke indukcije dokažite:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rješenja.

1. Prvih 45 decimala popunjeno je tako da je svaki put dopisivana po jedna znamenka:

$$0,1|12|123|123412345\ldots 123456789\ldots$$

U slijedećem koraku dopunjava se 11 znamenaka, jer se dopisuje prethodni slog s pripisanim dvoznamenkastim brojem:

$$0.112123\ldots 123456789|12345678910\ldots.$$

Nadalje, sve dok se ne bi dopisalo postepeno svih devedeset dvoznamenkastih brojeva, popunilo bi se:

$$\begin{aligned} 11+13+15++17\cdots+11+89\cdot 2 &= \\ 11+11+2+11+2\cdot 2+11+3\cdot 2+\cdots+11+89\cdot 2 &= \\ 90\cdot 11+2\cdot(1+2+3+\cdots+89) &= \\ 990+2\cdot\frac{89\cdot 90}{2} &\geq 1000, \end{aligned}$$

što dovodi do zaključka da je tisućito dopunjavanje unutar sloga koji završava dopisivanjem dvoznamenkastog broja. Zadatak je naći pretposljednji slog koji se dopisuje u cijelosti i svodi se na nejednadžbu za $n \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} 45+11+13+15+\cdots+11+(n-1)\cdot 2 &\leq 1000 \\ 45+11+11+1\cdot 2+11+2\cdot 2+11+3\cdot 2+\cdots 11+(n-1)\cdot 2 &\leq 1000 \\ 45+n\cdot 11+2\cdot(1+2+3+\cdots(n-1)) &\leq 1000 \\ 45+10n+n^2 &\leq 1000 \\ n &\leq 26, \end{aligned}$$

iz koje se zaključuje da je s posljednjim slogom koji se upisuje u cijelosti popunjeno ukupno 981 decimalno mjesto. Do tisućitog mjesta potrebno je upisati još 19 znamenaka:

$$1234567891011121314$$

Prema tome, na 1000. mjestu stoji znamenka 4.

2. p.o: $112,71kn$; PDV $20,29kn$.

3. Nakon prodaje, mora se platiti $1,98kn$ PDV-a, a čisti prihod-marža je $9,02kn$.

4. Marža je 4800 Eura, PDV: 1200 Eura.

5. Odgovori:

   (a) $4.984,00kn$

   (b) $149,39kn$

   (c) $12.016,66kn$.

6. Dokaz baze: $n = 1$ očito. Dokazati uz pretpostavku treba formulu:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

2 Kompleksni brojevi

Imaginarna jedinica je matematički objekt u oznaci i, za koji vrijedi:

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Riješite jednadžbe i obavezno provjerite rješenja.

1. Riješite jednadžbu: $x^2 + 1 = 0$.
2. Riješite jednadžbu: $x^2 + 9 = 0$.
3. Riješite: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Rješenja zadataka 1-3:

1. $x^2 = -1; \quad x_1 = i \quad x_2 = -i.$
   Provjera:
$$\begin{aligned} i^2 + 1 = 0 &\quad \Rightarrow \quad -1 + 1 = 0. \\ (-i)^2 + 1 = 0 &\quad \Rightarrow \quad i^2 + 1 = 0, \quad -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

2. $x^2 = -9; \quad x_1 = 3i, \quad x_2 = -3i.$
   Provjera:
$$\begin{aligned} (3i)^2 + 9 = 0 &\quad \Rightarrow \quad 9i^2 + 9 = 0 \quad 9 \cdot (-1) + 9 = 0. \\ (-3i)^2 + 9 = 0 &\quad \Rightarrow \quad 9i^2 + 9 = 0, \quad -9 + 9 = 0. \end{aligned}$$

3. Kvadratna jednadžba
$$ax^2 + bx + c$$
   rješava se algoritmom:
$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
   koji primjenjen na zadanu jednadžbu daje:
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \end{aligned}$$
   Ako je po dogovoru $i^2 = -1$, tada je $4i^2 = -16$, pa se u algoritam smije uvrstiti:
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{6 \pm 4i}{2} \\ x_{1,2} &= 3 \pm 2i, \end{aligned}$$

što daje rješenja:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3+2i \\
x_2 &= 3-2i.
\end{aligned}
$$

Provjera rješenja provodi se u duhu algebre tako da se s imaginarnom jedinicom računa kao sa bilo kojim općim brojem uz uvažavanje $i^2 = -1$:

$$
\begin{aligned}
(3+2i)^2 - 6(3+2i) + 13 &= 0 \\
9 + 12i + 4i^2 - 18 - 12i + 13 &= 0 \\
22 - 18 + 4i^2 &= 0 \\
4 + 4 \cdot (-1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Analogno se provjeri i drugo rješenje što je ostavljeno kao **obavezna** zadaća čitaocu

Zadaci:

1. Pokažite da je neprimjereno algebri zapisivati "alternativnu" definiciju: $i = \sqrt{-1}$.

   Rješenje: tada je $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-} = \sqrt{-1 \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$

2. Izračunajte potencije imaginarne jedinice i.

   Rješenje: $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i \cdot i^2 = -i, i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

3. Izračunajte
   $$i^{83} + i^{61} + 2i^{123} - i^{64}.$$

   Rješenje: $-i + i - 2i - 1 = -1 - 2i.$

2.1 Standardni zapis kompleksnog broja

Skup kompleksnih brojeva je

$$\mathcal{C} = \{a + bi, \quad a, b \in \mathcal{R}, i^2 = -1\}.$$

Zapis $z = a + ib$ naziva se **standardnim** zapisom kompleksnog broja.

Gaussova ili kompleksna ravnina je ravnina u kojoj se kompleksni brojevi poistovjećuju s točkama pravokutnog koordinatnog sustava u ravnini:

$$a + bi \mapsto T(a, b),$$

gdje je $T(a, b)$ točka u XOY ravnini. Imaginarnoj jedinici pripada točka $(0, 1)$ standardnog koodinatnog sustava.

Realni i imaginarni dio kompleksnog broja realni su brojevi:

Ako je $z = a + bi$, onda je

$$\begin{aligned} Re(z) &= a \\ Im(z) &= b \end{aligned}$$

i vrijedi

$$z = Re(z) + iIm(z).$$

Operacije u $\mathcal{C}$ su:

1. zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje
2. potenciranje
3. konjugiranje
4. računanje modula ili apsolutne vrijednosti

Jednakost kompleksnih brojeva:

$$a + bi = c + di \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c, \quad b = d$$

ili

$$z_1 = z_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad Re(z_1) = Re(z_2), \quad Im(z_1) = Im(z_2).$$

U skupu kompleksnih brojeva gubi se uređaj u smislu uspoređivanja svaka dva kompleksna broja.

Osnovne računske operacije izvode se u duhu algebre, uvažavajući definiciju i potenciranje imaginarne jedinice:

(1) zbrajanje ili oduzimanje

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

(2) množenje

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(ac + bc)$$

(3) dijeljenje

$$(a+bi):(c+di) = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

a posebno:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Zadatak 2.1 *Neka su $z = 2+4i$, $w = -3+i$ zadani kompleksni brojevi. U kompleksnoj ravnini istaknite brojeve z, w i $z \cdot w$*

Rj. $z \cdot w = -10 + 10i$.

Zadatak 2.2 *Neka je $z = 2+3i$ i $w = 3-4i$. Izračunajte:*

$$z\cdot w, \quad z+w, \quad w-z, \quad \frac{z}{w}.$$

Prikažite brojeve u Gaussovoj ravnini $\mathcal{C}$.

Rj: $18+i$; $5-i$; $1-7i$, $\frac{-6}{25} + \frac{17}{25}i$

Potenciranje kompleksnog broja zadaje se iterativno, svaku je potenciju moguće definirati preko prethodne:

$$\begin{aligned} z^0 &= 1 \\ z^{n+1} &= z^n \cdot z \end{aligned}$$

Konjugirano kompleksni brojevi analogon su suprotnih realnih brojeva. Za brojeve:

$$z = a+bi, \qquad \bar{z} = a-bi$$

se kaže da su konjugirano kompleksni brojevi. U kompleksnoj ravnini z i $\bar{z}$ smješteni su simetrično obzirom na realnu os. Očito je:

$$\begin{aligned} Re(\bar{z}) &= Re(z) \\ Im(\bar{z}) &= -Im(z) \end{aligned}$$

i vrijedi:

$$\begin{aligned} Re(z) &= \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ Im(z) &= \frac{1}{2i}(z-\bar{z}). \end{aligned}$$

Zadatak 2.3 *Dokažite da vrijedi:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $$\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\bar{z}}$$
5. $$\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$
6. $f(\bar{z}) = f(\bar{z})$ *za svaki polinom.*

Dokazivanje se ostavlja čitaocima koji imaju dovoljno algebarskog predznanja.

Apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja definira se formulom

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}.$$

Budući je

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

tada $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ima u kompleksnoj ravnini geometrijsko tumačenje udaljenosti točke broja z do 0 kompleksne ravnine. Nadalje, vrijedi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

2.2 Zadaci

Zadatak 2.4 *Odredite* $z \in \mathcal{C}$ *ako je* $4\overline{z} + z + 9i \in \mathcal{R}$ *i* $|z - 3| = 5$.

Rješavanje počinje pretpostavkom $z = x + iy$ i svodi se na nalaženje nepoznanica x i y koje zadovoljavaju uvjete zadatka. Prvi uvjet

$$4\bar{z} + z + 9i \in \mathcal{R}$$

uz pretpostavku za z prelazi u uvjet

$$4(x - iy) + x + iy + 9i = 5x + i(9 - 3y) \in \mathcal{R}$$

koji je ispunjen samo ako je $9-3i=0$, odakle se doznaje da je $y=3$, a $z=x+3i$ se uvrštava u drugi uvjet:

$$\begin{aligned}
|z-3| &= 5\\
|x-3+3i| &= 5\\
\sqrt{(x-3)^2+3^2} &= 5|^2\\
(x-3)^2 &= 25-9
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
x-3=4 & ili & x-3=-4\\
x_1=7 & & x_2=-1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= 7+3i\\
x_2 &= -1+3i
\end{aligned}$$

Zadatak 2.5 *Neka je $f(z)=2+z+3z^2$. Izračunajte (z) i $f(\overline{z})$, ako je $z=3+2i$.*

Rješavanje se provodi uvrštavanjem:

$$f(3+2i)=2+3+2i+3((3+2i)^2=5+2i+3(9+12i-4)=20+38i.$$

Budući za svaki polinom vrijedi $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$, ti je $f(3-2i)=20-38i$. Ostavlja se čitaocu obavezno provjeriti posljednju jednakost

Zadatak 2.6 *Odredite sve kompleksne brojeve za koje vrijedi: $z^2=\overline{z}$.*

Rješenje se ponovo traži u obliku $z=x+iy$. uvjet

$$z^2x^2+2ixy-y^2=x^2-y^2+i\cdot 2xy=x-iy$$

daje sistem dvije jednadžbe za x i y:

$$\begin{cases} x^2-y^2=x\\ 2xy=-y\end{cases}$$

Druga jednadžba ima dvije mogućnosti. Ako je $y=0$, tada je

$$\begin{aligned}
x^2 &= x\\
x_1 &= 0\\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

i prva dva rješenja su $z_1=0$ i $z_2=1$. Druga jednadžba sistema zadovoljena je i za $x=-1/2$. Tada prva jednadžba daje

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}-y^2 &= -\frac{1}{2}\\
-y^2 &= -\frac{1}{4}\\
y_1 &= \frac{1}{2}\\
y_2 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

i ostala dva rješenja su

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Zadatak 2.7 *Naći geometrijsko mjesto točaka u $\mathcal{C}$ za koje vrijedi:*

a) $-3 \leq Re(z) \leq 1$

b) $z \cdot \overline{z} = 1$

c) $|z - 2 - i| \leq 9$

d) $|z| \leq Rez \quad + 1$

e) $Rez + Imz = 1$

Rješenja podzadataka:

1. Pruga omeđena pravcima $x = -3$ i $x = 1$.
2. Kružnica sa središtem u ishodištu i polumjerom 1, jer je
$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = 1$$
zadani uvjet.
3. Kružnica sa središtem u točki $T(2,1)$ polumjera 3, što slijedi iz zapisa $z = x + iy$ uvrštenog u uvjet:
$$\begin{aligned} |z - 2 - i| &= 9 \\ |x - 2 + iy - i| &= 9 \\ \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} &= 9 \quad |^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 9, \end{aligned}$$
koji prelazi u eksplicitnu jednadžbu navedene kružnice.
4. Točke ravnine unutar parabole okrenute prema pozitivnom kraju osi OX, s tjemenom u $(-\frac{1}{2}, 0)$, koja os OY siječe u $(0,1)$ i $(0,-1)$. Rješenje izlazi iz uvjeta:
$$\begin{aligned} |z| &\leq Re(z) + 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &\leq x + 1 \\ x^2 + y^2 &\leq x^2 + 2x + 1 \\ y^2 &\leq 2x + 1. \end{aligned}$$
Rješenje nejednadžbe s dvije nepoznanice moguće je jedino geometrijski predočiti. Transformacijom nejednakosti u jednakost dobiva se jednadžba krivulje u koordinatnoj ravnini
$$y^2 = 2x + 1.$$

Krivulja u ovom slučaju je parabola. Parabola dijeli ravninu na dva područja. Jedno područje sadrži točke koje zadovoljavaju nejednadžbu. Provjera se izvodi izabirom točke koja se nalazi na jednom od područja i uvrštavanjem koordinata odabrane točke u nejednadžbu. Ovdje se može odabrati $T(3,0)$, što daje $0^2 \leq 2 \cdot 3 + 1$, istinitu tvrdnju. Tako je rješenje navedeno na početku opravdano.

5. Točke ravnine omeđene pravcem $y + x = 1$ koje se nalaze s one strane pravca s koje je ishodište:

$$\begin{aligned} Re(z) + Im(z) &< 1 \\ x + y &< 1. \end{aligned}$$

Rješavanje nejednadžbe svodi se na crtanje pravca $y = -x + 1$ i uvrštavanjem ishodišta $(0,0)$ u nejednadžbu.

Zadatak 2.8 *Pokazati da je $|z| = 1$, ako je*

$$z = \frac{r+i}{r-1},$$

gdje je $r \in \mathcal{R}$.

Dokaz se provodi algebarski uvrštavanjem $r = a + bi$:

$$|z| = |\frac{r+i}{r-i}| = \frac{|r+i|}{|r-i|} = \frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} = 1$$

2.3 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Trigonometrijske funkcije računaju se za vrijednosti kuteva. Kutevi se mogu mjeriti u stupnjevima, u radijanima ili u gradima.

Stupnjevi su najstarija mjera za kuteve. Potiču iz Mezopotamije i vezani su za mjerenje vremena. Najstariji način mjerenja vremena je suncem. Na pijesku se nacrta jednakostraničan trokut u čijem je vrhu zaboden štap. Smatra se da je prva jedinica za vrijeme bio interval potreban sjeni štapa da se pomakne s jedne stranice na drugu. Stupnjevi su neprikladni, jer se računaju u heksagezimalnom sustavu u kojem je za prvi okrugli broj veći od 10 izabran broj 60. Primjer mjere: $\alpha = 36^0 24' 40''$.

Radijani mjere kut duljinom luka jedinične kružnice sa središtem u vrhu kuta. Kutevi se zato u matematici predočavaju kao točke jedinične kružnice sa središtem u ishodištu. Kružnica se naziva **trigonometrijskom**. Primjer mjere i oznake kuta: $x = 2$ ukazuje da se taj kut mjeri u radijanima. Vrijednosti kuta u radijanima mogu se nanositi na brojevni pravac.

Preračunavanje u stupnjeve važno je samo iz pedagoško-psiholoških razloga proizašlih iz školskih trauma koje su prouzročili kutevi od $\pi/4$, $3\pi/2\ldots$. Tako je

$$x = 2 = 2 \cdot \frac{180^0}{\pi} = 114^0 35' 30''$$

Gradi se upotrebljavaju u građevinarstvu. Nalaze se na prometnim znakovima ispred uzbrdica i nizbrdica. Mjere kuteve između 0 i pravog kuta i jednaki su sinusu kuta. Izražavaju se u postocima: $k = 12\%$.

Sinus kuta x je ordinata točke koja je na trigonometrijskoj kružnici pridružena kutu x i vrijedi:

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Kosinus kuta je apscisa točke koja pripada kutu x na trigonometrijskoj kružnici i vrijedi:

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Po Pitagorinom poučku:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Tangens kuta definira se formulom:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Modul kompleksnog broja u oznaci r računa se po formuli:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

gdje je $z = a + bi$ standardni oblik kompleksnog broja.

Argument kompleksnog broja je kut u oznaci φ koji spojnica $\overline{0z}$ zatvara s pozitivnim smjerom **Realne osi**.

Zapis u trigonometrijskom obliku sada je:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Vrijedi i da je

$$tg\varphi = \frac{b}{a},$$

ali radi postojanja više rješenja:

$$\varphi = \varphi_0 + k\pi\varphi = \varphi_0 + k \cdot 180^0,$$

treba nacrtati kompleksan broj u kompleksnoj ravnini.

Zadatak 2.9 *Prikažite kompleksne brojeve:*

$$z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = -2 + 3i, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}$$

u trigonometrijskom obliku.

Rješenje. Modul broja z_1:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.12.$$

Iz odnosa

$$tg\varphi_1 = \frac{4}{3}$$

dobiva se

$$\varphi_1 = tg^{-1}4 + k \cdot 180^0 = 76^o,$$

za $k = 0$, jer se z_1 nalazi se u prvom kvadrantu, pa je

$$0 \leq \varphi_1 \leq 90^o.$$

i konačno $z_1 = 4.1(\cos 76^o + i\sin 76^o)$.
Analogno,

$$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.60.$$

Slijedi račun za φ_2:

$$\begin{aligned} tg\varphi_2 &= \frac{3}{-2} \\ \varphi_2 &= tg^{-1}(-1.5) + k \cdot 180^o \\ &= -56^o + k \cdot 180^o \end{aligned}$$

Broj z_2 nalazi se u drugom kvadrantu. pa je

$$90^o \leq \varphi_2 \leq 180^o$$

i postiže se za $k = 1$:

$$\varphi_2 = -56^o + 180^o = 124^o,$$

što daje $z_2 = 3.6(\cos 124^o + i \sin 124^o)$
Uobičajenim algebarskim računanjem dobiva se $z_1 \cdot z_2 = -14 - 5i$. Modul umnoška

$$r = \sqrt{(-14)^2 + (-5)^2} = \sqrt{221} = 14.87,$$

a zbog položaja umnoška u trećem kvadrantu, dobiva se:

$$\begin{aligned} tg\varphi &= \frac{-5}{-14} \\ \varphi &= tg^{-1} 0.35714 + k \cdot 180^o \\ &= 20^o + k \cdot 180^o = 200^o, \end{aligned}$$

za izbor $k = 1$.
Potrebno je iz zapisa

$$z_1 \cdot z_2 = 14.87(\cos 200^o + i \sin 200^o)$$

uočiti da je

$$14.87 \simeq 4.12 \cdot 3.60$$

do na desetinku i da je

$$200^o = 76^o + 124^o.$$

Količnik

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+4i}{-2+3i} \cdot \frac{-2-3i}{-2-3i} = \frac{10-11i}{13} = \frac{10}{13} - \frac{11}{13}i.$$

Modul količnika

$$\rho = \sqrt{\frac{100}{169} + \frac{121}{169}} = 1.14,$$

dok je argument

$$\begin{aligned} \phi &= tg^{-1}(-1.1) + k \cdot 180^o \\ &= -48^o + k \cdot 180^o = -48^o, \end{aligned}$$

jer je količnik u četvrtom kvadrantu. Zapis količnika

$$\frac{z_1}{z_2} = 1.14(\cos(-48^o) + i \sin(-48^o))$$

pokazuje da je

$$1.14 = 4.12 : 3.60$$

na desetinku i da je

$$-48^o = 76^o - 124^o.$$

2.4 Operacije s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)] \\ &= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \end{aligned}$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku izvodi se pomoću množenja:

$$\frac{z_1}{z_2} = z \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z \cdot z_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} r_1 &= r \cdot r_2 \\ \varphi_1 &= \varphi + \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} r &= \frac{r_1}{r_2} \\ \varphi &= \varphi_1 - \varphi_2. \end{aligned}$$

Konačna formula koja opisuje dijeljenje $z_1 : z_2$ je:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Primjer 2.1 *Napisati u trigonometrijskom obliku*

$$\frac{(1+i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi) =}{1+i},$$

gdje je φ kut u radijanima.

Rješavanje zadatka mora uvažiti radijane kao mjeru za kuteve. Zato:

$$\begin{aligned} z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad & r_1 = \sqrt{1+3} = 2 \\ & tg\varphi_1 = \tfrac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \tfrac{\pi}{3} \quad (I \quad kvadrant) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\\
z_2 &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
z_3 &= 1+i, \quad r_3 = \sqrt{2}, \qquad tg\varphi_3 = 1 \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{4}\\
z_3 &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\pi 4)\\
z = \frac{z_1\cdot z_2}{z_3} &= \frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}\\
&= \frac{2[\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)]}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}\\
&= \sqrt{2}(\cos(\varphi + \frac{\pi}{12}) + i\sin(\varphi + \frac{\pi}{12})).
\end{aligned}$$

2.4.1 Potenciranje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku

Neka je

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Tada je

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi).$$

Formula se naziva Moivreovom i izlazi iz definicije potenciranja:

$$\begin{aligned}
z^{n+1} &= z^n\cdot z\\
|z^n| &= r^n\\
Arg(z^n) &= n\cdot Arg(z)
\end{aligned}$$

Zadatak 2.10 *Izračunajte*

1. $(1+i\sqrt{3})^6$
2. $(\sqrt{3}-i)^{21}$

Rješenja:

1. Koristeći se rezultatima prethodnog zadatka:

$$(1+i\sqrt{3})^6 = [2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^6 = 2^6\cdot(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3})^6 = 64$$

2. Iz trigonometrijskog zapisa kompleksnog broja:

$$\sqrt{3} - i \Rightarrow [tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}, \qquad IV \quad kvadrant]$$

slijedi, jer je $r = 2$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{21} &= [2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))]^{21} \\ &= 2^{21} \cdot (\cos(-\frac{21\pi}{6}) + i\sin(-\frac{21\pi}{6})) \\ &= 2^{21} i \end{aligned}$$

2.4.2 Korjenovanje ili radiciranje

Korjenovanje kompleksnog broja u oznaci $\sqrt[n]{z}$ je nalaženje svih onih kompleksnih brojeva w za koje vrijedi

$$w^n = z.$$

Rješavanje problema koristi trigonometrijski zapis zadanog kompleksnog broja:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

i svodi se na nalaženje modula $\rho = |w|$ i argumenta ψ nepoznatog kompleksnog broja koji bi zadovoljio jednakost:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Očito je jednakost zadovoljena ako vrijedi:

$$\begin{aligned} \rho^n = r \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \quad &\Rightarrow \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Postoji točno n **kompleksnih brojeva** w za koje vrijedi navedeno svojstvo, a oni se dobivaju po drugoj Moivreovoj formuli:

$$w = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),$$

uvrštavanjem vrijednosti za $k = 1, 2, \ldots n - 1$.

Geometrijska mjesta svih n-tih korijena su u vrhovima **pravilnog n-terokuta** upisanog u kružnicu polumjera $\sqrt[n]{r}$, u kompleksnoj ravnini.

Zadatak 2.11 *Izračunajte* $\sqrt[3]{-1}$ *i rješenja prikažite u standardnom obliku.*

Rješenja je moguće napisati iz trigonometrijskog zapisa:

$$\begin{aligned}
z &= -1 \\
r &= 1 \\
\varphi &= \pi \\
\sqrt[3]{-1} &= \sqrt{1}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}) \\
k=0 &\Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
k=1 &\Rightarrow z_2 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1 \\
k=2 &\Rightarrow z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 2.12 *Odredite* $\sqrt[4]{1}$

Rješenja: $1, i, -1, -i$.

Zadatak 2.13 *Riješite jednadžbu:* $x^6 + 64 = 0$ *i rješenja napišite u standardnom obliku.*

Rješavanje:

$$\begin{aligned}
x^6 &= -64 \\
-64 &= 64(\cos\pi + i\sin\pi) \\
x_k &= \sqrt[6]{64}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}) \\
x_0 &= \sqrt{3} + i \\
x_1 &= 2i \\
x_2 &= -\sqrt{3} + i \\
x_3 &= -\sqrt{3} - i \\
x_4 &= -2i \\
x_5 &= \sqrt{3} - i
\end{aligned}$$

Zadatak 2.14 *Skicirajte sva riješenja* $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

Rješenje se traži u trigonometrijskom obliku

$$
\begin{aligned}
z &= -8+8i\sqrt{3}\\
r &= 16\\
tg\varphi &= -\sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3}\\
\sqrt[4]{z} &= \sqrt[4]{16}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}), \quad k=1,1,2,3\\
z_0 &= \sqrt{3}+i\\
z_1 &= -1+i\sqrt{3}\\
z_2 &= -\sqrt{3}-i\\
z_3 &= 1-i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Zadatak 2.15 *Naći geometrijsko mjesto točaka:*

a)

$$2<|z|<3; \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$

b)

$$|z| \ge 1; \quad \frac{\pi}{4} < b \le \frac{\pi}{2}$$

Rješenja: nisu nacrtana, već su opisana kao dijelovi koordinatne XOY ravnine:

a) dio omeđen kružnicama $x^2+y^2=4$ i $x^2+y^2=9$, te pravcima $y=x$ i $y=\sqrt{3}x$.

b) neograničeni dio izvan $x^2+y^2=1$ i između $y=x$ i $x=0$.

Zadatak 2.16 *Ako je* $z_1=\sqrt{3}-i$, *a* $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, *napišite*

$$(\frac{z_1}{z_2})^7$$

u standardnom obliku.

Rješenje:

$$
\begin{array}{cc}
r_1 = 2 & r_2 = 1\\
tg\varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} & tg\varphi_2 = \sqrt{3}\\
\varphi_1 = \frac{11\pi}{6} & \varphi_2 = \frac{4\pi}{3}.
\end{array}
$$

Slijedi:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= 2(\cos\pi + i\sin\pi)\\
(\frac{z_1}{z_2})^7 &= 128(\cos 7\pi + i\sin 7\pi) = -128i.
\end{aligned}
$$

Zadatak 2.17 *Naći realni i imaginarni dio kompleksnog broja*

$$z = \frac{z_1}{z_2^9},$$

ako je

$$z_1 = 32(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}); z_2 = -\sqrt{3} + i.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
|z_2| &= 2 \\
tg\phi &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \phi = \frac{5\pi}{6} \\
z_2^9 &= 2^9(\cos\frac{9\cdot 5\pi}{6} + i\sin\frac{15\pi}{2}) = 2^9(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) \\
\frac{z_1}{z_2^9} &= \frac{32}{2^9}(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\pi)) = -\frac{1}{16},
\end{aligned}$$

ukazuje da je realni dio $-\frac{1}{16}$, dok je imaginarni dio jednak 0

Zadatak 2.18 *Izračunajte* z^6*, ako je* $|z+i| = \sqrt{3}$*, a* $arg(z+i) = \pi$.

Rješenje zadatka moguće je kad se uoči da podaci zadaju kompleksni broj $z+i$ u trigonometrijskom obliku:

$$z + i = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{3},$$

odakle slijedi:

$$\begin{aligned}
z &= -\sqrt{3} - 1 \\
z &= 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) \\
z^6 &= 2^6(\cos\frac{7\pi}{6}\cdot 6 + i\sin\frac{7\pi}{6}\cdot 6) = -64
\end{aligned}$$

Zadatak 2.19 *U standardnom obliku napišite sve vrijednosti kompleksnog broja*

$$z = \sqrt[3]{(1+2i)^2 + \frac{1-i}{1+i} - i^5 + i^{16}}.$$

Rješenje: počinje tako da se sa z_1 označi izraz ispod korjena:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 + 4i - 4 + \frac{(1-i)^2}{2} = -2 + 3i + \frac{1 - 2i - 1}{2} = -2 + 2i \\
|z_1| &= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
tg\varphi &= -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} \\
z_1 &= 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \\
z = \sqrt[3]{z_1} &= \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}). \\
z_0 &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1+i \\
z_1 &= \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}) \simeq -1.37+0.37i \\
z_2 &= \sqrt{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}) = 0.37-1.37i.
\end{aligned}
$$

Algebra: $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}}$

Zadatak 2.20 *Odredite kompleksne brojeve z_1 i z_2 ako je $argz_1 = \frac{\pi}{4}$, $argz_2 = \frac{\pi}{6}$, a $z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i$.*

Rješavanje je mudro započeti idejom o traženju nepoznanica u trigonometrijskom obliku i koristiti podatke:

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= r_1(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) + r_2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}r_1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}r_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_2 + i\frac{1}{2}r_2 \\
\sqrt{3}+i &= \frac{\sqrt{2}r_1 + \sqrt{3}r_2}{2} + \frac{\sqrt{2}r_1 + r_2}{2}\cdot i.
\end{aligned}
$$

Kompleksni su brojevi jednaki ako se podudaraju u realnom i imaginarnom dijelu:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}r_1 + \sqrt{3}r_2}{2} &= \sqrt{3} \\
\frac{\sqrt{2}r_1 + r_2}{2} &= 1 \\
\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\cdot r_2 &= \sqrt{3}-1 \\
r_2 &= 2 \\
r_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Konačno rješenje: $z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{3} + i.$

Zadatak 2.21 *Izračunajte vrijednost $z^{\frac{1}{6}}$ za $k = 3$, ako je*

$$z = 8(\frac{1}{2} - 2i)^3 - 46i^{26} + 52i^{35}.$$

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
z &= 8(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}i + 6i^2 - 8i^3) - 46i^2 + 52i^3 = \\
&= 1 - 12i^2 - 48 + 64i + 46 - 52i = -1 \\
z &= -1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) \\
z^{1/6} &= 1^{1/6}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}), \quad k = 0, 1, \ldots, 5 \\
k &= 3 \\
z^{1/6}_{k=3} &= 1(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}
\end{aligned}
$$

Zadatak 2.22 *Odredite realni i imaginarni dio kompleksnog broja*

$$z = (\frac{\overline{z} - z^2}{|z|^2})^3,$$

ako je $z = 1 + i\sqrt{3}$*.*

Rješenje. Neposrednim uvrštavanjem:

$$z_1 = (\frac{1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3})^2}{4})^3 = (\frac{1 - i\sqrt{3} - (1 + 2i\sqrt{3} - 3)}{4})^3 = (\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i)^3.$$

Transformacijom u trigonometrijski oblik:

$$
\begin{aligned}
r_1 = |z_1| &= \frac{3}{2} \\
tg\varphi &= -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} \\
z = z_1^3 &= \frac{27}{8}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) \\
&= -\frac{27}{8},
\end{aligned}
$$

pa je realni dio $-\frac{27}{8}$, a imaginarni je 0.

Zadatak 2.23 *U Gaussovoj ravnini $\mathcal{C}$ prikažite z^5 ako je*

$$z = \frac{2}{(1 - i)^3} + \frac{1}{2}i^2 - \frac{1}{2}i^{15}.$$

Rješenje: $z^5 = 4 - 4i$

Zadatak 2.24

$$(\sqrt[3]{z_1 \cdot z_2})_{k=2} =: \qquad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z_2 = -i.$$

Rješenje: $\cos 15^o + i\sin 15^o = -0.97 + 0.26$.

2.5 Problemski zadaci

1. Izračunajte:
$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}=$$

2. Nađite sva rješenja jednadžbe
$$(-2-5i)z^3-2i+5=0$$

3. Izračunajte sve vrijednosti izraza
$$\sqrt[3]{(\frac{3}{1-i}-i+\frac{2}{i+1})^2}$$

4. Odredite sve one kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju uvjete:
$$\begin{aligned} Arg(z^4+4) &= \frac{11\pi}{6} \\ |z^4+4|^2 &= 48 \end{aligned}$$

5. Izračunajte
$$(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5})^{15}.$$

6. Nađite kocku čiji je volumen brojčano za četiri manji od poluzbroja duljina njenih bridova.
(Uputa: jednadžba $x^3+px+q=0$ rješava se Cardanovom formulom:
$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}})$$

7. Izračunati z^6 ako je $|z+4\sqrt{2}|=4$, a $arg(z+4\sqrt{2})=\frac{7\pi}{4}$.

8. Izračunajte z^{15} ako je z kompleksan broj za koji vrijedi $9i-|z|=z-3\sqrt{3}$

9. Odrediti kompleksne brojeve z_1 i z_2 ako je
$$z_1=(\frac{i^{34}-i^{71}}{2}+\frac{2}{(1-i)^3})^6,$$
$Arg(z_2)=\frac{\pi}{4}$, a $Im(z_1-z_2)=4$.

10. Odredite sve vrijednosti kompleksnog broja

$$z = \sqrt[3]{(1-2i)^2 - \frac{1+i}{1-i} + i^5 - i^{16}}.$$

11. Riješite jednadžbu $z^4 + 8 = 8i\sqrt{3}$.

12. Odredite sve kompleksne brojeve z, sa svojstvima: $arg(\sqrt{2} \cdot z^3) = \frac{\pi}{4}$ i $|z| = 1$.

13. Riješite jednadžbu

$$(\bar{z} + i)^3 = \frac{1-i}{1+i}.$$

14. Ako je z kompleksan broj za koji vrijedi da je $z - 8i\sqrt{3} \in \mathcal{R}$ i da je $|z| = 16$. Koji sve kompleksni brojevi mogu biti $\sqrt[3]{z}$.

15. Riješite jednadžbu $z^4 + z^2 + 1 = 0$. Skicirajte dobivena riješenja u Gaussovoj ravnini.

16. Upotrebom Moivreove formule izračunajte

$$(1 + \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^6.$$

17. Skicirajte sve vrijednosti

$$\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+1}}$$

u kompleksnoj ravnini.

Rješenja problemskih zadataka

1. Koristiti trigonometrijski zapis:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) \\
z_2 &= 1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \\
z_3 &= -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) \\
z_4 &= -1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + \imath\sin 4\pi 3) \\
z_1^{20} &= \sqrt{2}^{20}(\cos\frac{20 \cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{20 \cdot 7\pi}{4}) = 2^{10}(\cos 35\pi + i\sin 35\pi) = -2^{10}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_2^{20} &= \sqrt{2}^{20}(\cos\frac{20\cdot\pi}{4}+i\sin\frac{20\cdot\pi}{4}) = 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -2^{10}\\
z_3^{15} &= 2^{15}(\cos\frac{15\cdot 2\pi}{3}+i\sin\frac{15\cdot 2\pi}{3}) = 2^{10}(\cos 10\pi + i\sin 10\pi) = 2^{15}\\
z_4^{15} &= 2^{15}\\
& -\frac{2^{15}}{2^{10}} - \frac{2^{15}}{2^{10}} = -64
\end{aligned}
$$

2. Nastavak jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
(-2-5i)z^3 &= -5+2i\\
z^3 &= \frac{-5+2i}{-2-5i}\cdot\frac{-2+5i}{-2+5i}\\
z^3 &= \frac{10-10-4i-25i}{4+25}\\
z^3 &= \frac{-29i}{29}\\
z^3 &= -i = 1\cdot(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})\\
z_k &= \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}),
\end{aligned}
$$

$z_0 = i;\quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$

3. Izraz se sređuje algebarski:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt[3]{(\frac{3}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}-i+\frac{2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i})^2}\\
&= \sqrt[3]{(\frac{3+3i}{2}-i+\frac{2-2i}{2})^2} = \sqrt[3]{\frac{2+3i+2-4i}{2})^2}\\
&= \sqrt[3]{\frac{24-10i}{4}} = \sqrt[3]{6-\frac{5}{2}i};\\
r &= \sqrt{36+\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{169}}{2} = \frac{13}{2}\\
tg\varphi &= \frac{-\frac{5}{2}}{6} = -\frac{5}{12} \Rightarrow \varphi = -22.6^o\\
& z_k = \sqrt[3]{6.5}(\cos\frac{-22.6^o+k\cdot 360^o}{3}+i\sin\frac{-22.6^o+k\cdot 360^o}{3}),\quad k=0,1,2,
\end{aligned}
$$

$z_0 = 1.85-0.24i;\quad z_1 = -0.86+1.66i;\quad z_2 = -1.26-1.38i.$

4. Podaci daju u trigonometrijskom obliku broj

$$
\begin{aligned}
z^4+4 &= \sqrt{48}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\\
&= 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 6 - 2i\sqrt{3} \\
z^4 &= 2 - 2i\sqrt{3} = 4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin\frac{(\ \pi}{-\ 3})) \\
z_k &= \sqrt[4]{4}(\cos\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}); \quad k = 0, 1, 2, 3;
\end{aligned}
$$

$z_0 = 1.4 - 0.4i$; $z_1 = 0.4 + 1.4i$; $z_2 = -1.4 + 0.4i$; $z_3 = -1.4 - 0.4i$.

5. Nakon potenciranja imaginarne jedinice dobiva se:

$$
\begin{aligned}
&(1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-i} + \frac{1}{1} + \frac{1}{i})^{15} = (1 - i)^{15} = \\
&= [\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})]^{15} \\
&= 128\sqrt{2}(\cos\frac{-15\pi}{4} + i\sin\frac{-15\pi}{4}) = 128 - 128i
\end{aligned}
$$

6. Uvjet da je volumen jednak poluzbroju bridova umanjenom za 4, uz nepoznatu duljinu brida x daje:

$$
\begin{aligned}
x^3 &= 6x - 4 \\
x^3 - 6x + 4 &= 0 \\
x &= \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}} \\
&= \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i} \\
z &= -2 + 2i = \sqrt{8}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \\
w &= -2 - 2i = \sqrt{8}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) \\
z_k &= \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2 \\
w_k &= \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2
\end{aligned}
$$

što daje

$$x = z_k + w_k \in \{2, -1 + \sqrt{3} = 0.732, -1 - \sqrt{3} = -2.8\}.$$

U obzir za duljinu brida ne može doći -2.8.

7. $z^6 = -4096i$

8. Pretpostaviti $z = x + iy$. Odmah je $y = 9$, $z = -18\sqrt{3} + 9i$. Trigonometrijski oblik:

$$
\begin{aligned}
r = \sqrt{3 \cdot 324 + 81} = 9\sqrt{13} &= 32.45 \\
tg\varphi = \frac{9}{-18\sqrt{3}} &= -0.28867 \\
\varphi &= 164^o \\
z &= 32.45(\cos 164^o + i\sin 164^o \\
z^{15} &= 2.4 \cdot 10^{22} - 4i \cdot 10^{22}
\end{aligned}
$$

9. $z_1 = 8i$, $z_2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
10. $z_0 = 0.46 + 1.72i$; $z_1 = -1.72 - 0.46i$; $z_2 = 1.26 - 1.26i$
11. $\sqrt{3} + i$; $\quad -1 + i\sqrt{3}$; $\quad -\sqrt{3} - i$; $\quad 1 - i\sqrt{3}$.
12. Iz

$$\sqrt{2} \cdot z^3 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \pi 4)$$

rješenja su

$$\begin{aligned} z_0 &= 0.97 + 0.26i \\ z_1 &= -0.71 + 0.71i \\ z_2 &= -0.26 - 0.97i \end{aligned}$$

13. $\bar{z}_0 = 0$; $\bar{z}_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; $\bar{z}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.
14. Dva su moguća kompleksna broja z koja zadovoljavaju uvjete:

$$\begin{aligned} z_1 &= 8 + 8i\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{z_1} &\in \{2.37 + 0.86i, \quad -1.93 + 1.62i, \quad -0.44 - 2.48i\} \\ z_2 &= -8 + 8i\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{z_2} &\in \{1.93 + 1.62i, \quad -2.37 + 0.86i, \quad 0.44 - 2.48i\} \end{aligned}$$

15. $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.
16. $-28 + 28i$.
17. $-0.21 - 0.20i, \quad 0.14 - 0.10i, \quad -0.10 - 0.21.$

3 Determinante

Determinante su funkcije koje kolekciji od n^2 brojeva zapisanih u tablicu s n redaka i n stupaca pridruže broj. Postupak računanja je induktivan.

Za $n = 1$ govorimo o determinanti prvog reda u oznaci

$$|a_{11}| = a_{11}$$

gdje je teško oznaku ne zamijeniti s funkcijom apsolutne vrijednosti, no determinante prvog reda se ne proučavaju.

3.1 Determinante drugog reda

Determinante drugog reda računaju se po formuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zadatak 3.1 *Izračunajte vrijednost determinante*

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Rješenje: po definiciji

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2.$$

Zadatak 3.2 *Riješite jednadžbu:*

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Rješenje se dobiva nakon razrješenja determinante, kada se jednadžba:

$$\sin x + 4\cos x = 3$$

rješava **univerzalnom trigonometrijskom supstitucijom**:

$$tgt = t \qquad \sin t = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

nakon koje se dobiva jednadžba:

$$\begin{aligned}
7t^2 - 2t - 1 &= 0 \\
t_{1,2} &= \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7} \\
tg\frac{x_1}{2} &= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{7} \qquad tg\frac{x_2}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7} \\
\frac{x_1}{2} &= 0.50047 + k\pi \qquad \frac{x_2}{2} = -0.2612 + k\pi,
\end{aligned}$$

gdje su rješenja dana u radijanima.

Riješite ***samostalno*** slijedeće zadatke:

1. Izračunajte determinantu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$
Rješenje: -2

2. Izračunajte vrijednost determinanti:
   (a)
   $$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$$
   (b)
   $$\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$$
   (c)
   $$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$$
   Rješenja: a)-1, b)-1, c)0

3. Odredite nepoznati broj x ako je
$$\begin{vmatrix} 9^{x+1} & 3^{x+2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 810$$
Rješenje: $x = 2$

4. Riješite jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log 10x \\ 2 & \log x \end{vmatrix} = 6$$

Rješenja: $x_1 = 10^4$; $x_2 = \frac{1}{100}$

5. Odredite x u radijanima tako da jednadžba bude zadovoljena:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathcal{Z}$

Determinante višeg reda računaju se Laplaceovim razvojem po i-tom retku:

$$DetA = \sum_j a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}$$

gdje je

- a_{ij} - element i-tog retka determinante
- minora M_{ij} determinanta za jedan manjeg reda koja nastaje kad iz zadane determinante isključimo i-ti redak i j-ti stupac.

3.2 Determinante trećeg reda

Determinanta trećeg reda računa se pomoću determinanti drugog reda:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

1. Izračunajte vrijednost determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Rješenje: -38

2. Riješite determinantu

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Rj: -3

3. Izračunati

$$\begin{vmatrix} 1 & z & 1 \\ 1 & z^2 & 1 \\ z^2 & 1 & z \end{vmatrix},$$

gdje je

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$$

Rješenje: $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, vrijednost determinante iznosi 3

4. Koliki je x?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Rješenje: $(x_1 = 3, x_2 = 1)$

Sarrusovim pravilom mogu se rješavati isključivo determinante trećeg reda.

Nadopišu se prva dva stupca zadane determinante:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & k & g & k \end{array}\right.$$

Zbroju umnožaka trojki brojeva smještenih dijagonalno u smjeru sjeverozapad-jugoistok:

$$aek + bfg + cdk$$

pribroje se brojevi suprotni umnošcima trojki uzetih sa suprotnih dijagonala:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdk - gec - hfa - kdb$$

Zadatak 3.3 *Nađite sva rješenja jednadžbe*

$$\begin{vmatrix} 2x^3 & 1 & 4 \\ x^3 & 1 & 2 \\ 1 & 2x^3 & 1 \end{vmatrix} = -2i.$$

Rješenje.
Sarrusovim pravilom:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2x^3 & 1 & 4 & 2x^3 & 1 \\ x^3 & 1 & 2 & x^3 & 1 \\ 1 & 2x^3 & 1 & 1 & 2x^3 \end{array}\right| = -2i$$

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2 + 8x^6 - 4 - 8x^6 - x^3 &= -2i \\ x^3 - 2 &= -2i \\ x^3 &= 2 - 2i \\ z &= 2 - 2i \\ |z| &= \sqrt{8} \\ tg\varphi &= -1 \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

$$x = \sqrt[3]{z} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3}), \quad k = 0, 1, 2$$

3.3 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Izračunajte vrijednost determinanti:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \qquad b) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \qquad d) \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix} =$$

2. Riješite determinante:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$c) \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

3. Riješite jednadžbe:

(a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

(c) $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$

(d)
$$\begin{vmatrix} \sin(x+\frac{\pi}{4}) & \sin x & \cos x \\ \sin(x+\frac{\pi}{4} & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

4. Riješite jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ x+1 & x & -3 \\ 2 & 1 & -x-2 \end{vmatrix} = 1$$

Rješenja:

1. (a) 26
   (b) -38
   (c) 7
   (d) $2a$
2. (a) -10
   (b) 144
   (c) 72
3. (a) $x_1 = 2; \quad x_2 = 3$
   (b) $x_1 = 0; \quad x_2 = -2$
   (c) $x = 2/3$
   (d) $x = \pi/6 + 2k\pi, \quad k \in \mathcal{Z}$
4. $x_1 = 1 + i; \quad x_2 = 1 - i$

3.4 Determinante četvrtog reda

Determinante četvrtog reda rješavaju se isključivo razvojem po odabranom retku ili stupcu. U [1] su detaljno dokazana svojstva determinanti

- ako se jedan redak ili stupac u determinanti pomnoži ili podijeli brojem λ, tada se vrijednost determinante poveća ili smanji λ puta
- vrijednost determinante se ne mijenja ako se jedan redak pomnožen nekim brojem doda drugom retku ili oduzme od njega
- vrijednost determinante se ne mijenja ako se jedan od stupaca pomnožen nekim brojem doda drugom stupcu ili oduzme od njega

Navedena svojstva mogu pojednostaviti ručno računanje većih determinanti.

Zadatak 3.4 *Odredite vrijednost determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Rješavanje zadatka može se pojednostaviti izlučivanjem faktora -3 iz prvog retka:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ako se prvi redak pomnoži brojem 5 i doda drugom retku, vrijednost determinante neće se promijeniti, no determinanta će imati manje elemente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Ako se, nadalje, prvi redak najprije pomnoži s -4 i doda trećem retku, a onda se opet prvi redak pomnoži sa -7 i doda četvrtom, dobiva se determinanta

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 13 & 3 & 9 \end{vmatrix},$$

podatna za razvoj po prvom stupcu, jer se dobiva samo jedan pribrojnik u razvoju:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 13 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Mudro je drugi redak pomnožen s 3 dodati prvom i oduzeti od trećeg retka

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 0 & 15 \\ 7 & 1 & 6 \\ -8 & 0 & -9 \end{vmatrix},$$

a zatim novo dobivenu determinantu razviti po drugom retku:

$$\Delta = -3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 15 \\ -8 & -9 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-126 + 120) = 18.$$

3.5 Razni zadaci izračunavanja determinanti

1. Izračunajte:
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Odredite:
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

3. Riješite:
$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Koliko ima prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi:
$$\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = 720$$

5. Dokažite
$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

6. Izračunajte Δ_1, Δ_2 i Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$$

7. Odredite nepoznanicu x za koju vrijedi

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ x & x-2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

8. Riješite jednadžbu:

$$\begin{vmatrix} \log_{2x} \frac{1}{2} & \log_x 2 \\ 1 & log_{\frac{x}{4}} 4 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Dokažite da za svaki $n \in \mathcal{N}$ vrijedi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

10. Još jedan zadatak

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = .$$

Rješenja:

1. -9
2. 18
3. 3
4. 18 uređenih parova

5. samostalno se uvjerite
6. $\Delta_1 = 40, \quad \Delta_2 = -68; \quad \Delta_3 = 20$
7. $x = 5$
8. $x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{4}$
9. Uputa: dodavati prvi redak drugom, trećem, ... i napokon posljednjem. Dobije se determinanta koja na glavnoj dijagonali ima brojeve $1, 2, 3, \ldots, n$.
10. Razviti po prvom stupcu. Rješenje: $x^n - (-y^n)$.

4 Vektori u ravnini i prostoru

4.1 Usmjerena dužina. Vektor

Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ predstavlja vektor $\vec{a}$

- svojom duljinom ili modulom: $|\vec{a}|$
- smjerom - pravcem kojem pripada $\overrightarrow{AB}$ i
- orijentacijom - okrenutosti na tom pravcu.

Jednakost vektora definira kao podudarnost u duljini, smjeru i orijentaciji.
Dvije usmjerene dužine predstavljaju jedan te isti vektor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{a}$$

ako su paralelne, iste duljine i iste orijentacije. Karakterizira ih zajedničko polovište spojnoca završetaka i početaka takovih dužina. Uobičajeno je reći da se vektor ne mijenja paralelnim pomakom.

Kolinearni vektori su paralelni.

Suprotni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju istu duljinu i smjer, ali su suprotne orijentacije:

$$\vec{a} = -\vec{b}.$$

Očito je

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Nul-vektor je vektor kojem je modul jednak nuli.

Jedinični vektor je vektor kojem je duljina jednaka 1. Reprezentanti nul vektora su točke

$$\overrightarrow{AA}, \quad \overrightarrow{TT} \ldots$$

4.2 Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom

Zbrajati se mogu vektori ako su ulančani (preko B):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Množenje vektora $\vec{a}$ skalarom λ daje vektor $\lambda\vec{a}$ koji je kolinearan početnom vektoru, orijentacije suprotne za $\lambda < 0$ i iznosa

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|.$$

Zadatak 4.1

Neka je S sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$. Izračunajte

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AS}.$$

Rješenje: je mnogo lakše ako se nacrta paralelogram. Tada iz činjenice da se dijagonale raspolavljaju slijedi da je

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{BS}$$

i da je

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}.$$

Suma iz zadatka uvrštavanjem prelazi u izraz

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC},$$

podesan za zbrajanje ulančavanjem. Rješenje:

$$\overrightarrow{AC}.$$

Množenje vektora $\vec{a}$ koji je zadan svojom duljinom $|\vec{a}|$, svojim smjerom i orijentacijom sa zadanim skalarom $\alpha \in \mathcal{R}$ definira se opisom modula, smjera i orijentacije vektora $\alpha\vec{a}$:

- duljina novog vektora

$$|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|,$$

  gdje su $|\alpha|$ i $|\vec{a}|$ poznati nenegativni brojevi

- smjer novog vektora $\alpha\vec{a}$ podudara se sa smjerom zadanog vektora $\vec{a}$

- orijentacija novog vektora jednaka je orijentaciji zadanog vektora $\vec{a}$ za slučaj $\alpha > 0$, dok je suprotna orijentaciji $\vec{a}$ za $\alpha < 0$.

Jedinični vektor $\vec{a}_0$ u smjeru vektora $\vec{a}$ dobiva se množenjem vektora $\vec{a}$ skalarom $\frac{1}{|\vec{a}|}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

Zadatak 4.2 *Dužina $\overline{AM}$ je simetrala kuta α trokuta ABC, sa stranicama $|AB| = 6$, $|BC| = 9$ i $|AC| = 11$ jediničnih duljina. Odredite skalar λ, tako da je $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BC}$ i skalar ν za koji je $\overrightarrow{CB} = \nu\overrightarrow{MC}$.*

Rješenje:
Iz geometrije srednje i osnovne škole poznato je i dostupno u boljim logaritamskim tablicama:

$$|BM| : |MC| = |AB| : |AC|,$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
|BM| : |MC| &= 6 : 11 \\
|BM| &= \frac{6}{17}|BC|, \\
\overrightarrow{BM} &= \frac{6}{17}\overrightarrow{BC} \\
\lambda &= \frac{6}{17}.
\end{aligned}$$

Analogno,

$$\overrightarrow{CM} = \frac{11}{17}\overrightarrow{CB}$$
$$\frac{17}{11}\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB}$$
$$-\frac{17}{11}\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC}$$

radi suprotne orijentacije.

4.3 Linearna kombinacija i linearna nezavisnost vektora

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori zadane duljine, smjera i orijentacije. Neka su α, β i γ zadani realni brojevi - skalari.

Linearnom kombinacijom vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ naziva se vektor dobiven množenjem svakog od vektora nekim skalarom i zbrajanjem tako dobivenih vektora:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Rezultat linearne kombinacije opet je vektor.

Linearno nezavisna kolekcija vektora je ona koja rezultira nul-vektorom samo trivijalnim odabirom skalara.

Primjer linearno zavisnih vektora su vektori $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$ paralelograma $ABCD$.

Primjer linearno nezavisnih vektora su

- vektor i kojeg reprezentira orijentirana dužina $\overrightarrow{OE_1}$
- vektor j kojeg reprezentira orijentirana dužina $\overrightarrow{OE_2}$,

gdje je

O-ishodište

E_1-točka $(1,0)$

E_2-točka $(0,1)$

pravokutnog koordinatnog sustava u ravnini.

Zadatak 4.3 *Nacrtajte pravokutnik $ABCD$ tako da je $|AB| = 2$, a $|BC| = 3$. Neka je L polovište dužine $\overline{AB}$, P polovište dužine $\overline{CD}$, M polovište $\overline{AD}$ a točke N i K su na trećinama dužine $\overline{BC}$. Ako je $\vec{AB} = \vec{a}$, a $\vec{AD} = \vec{b}$ izrazite slijedeće vektore kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:*

$\overrightarrow{AL}=$ $\overrightarrow{BN}=$ $\overrightarrow{AC}=$ $\overrightarrow{MN}=$

$\overrightarrow{AM}=$ $\overrightarrow{BK}=$ $\overrightarrow{AK}=$ $\overrightarrow{LM}=$

$\overrightarrow{PD}=$ $\overrightarrow{KN}=$ $\overrightarrow{PA}=$ $\overrightarrow{MK}=$

$\overrightarrow{CD}=$ $\overrightarrow{PC}=$ $\overrightarrow{AN}=$ $\overrightarrow{KP}=$

Rješenja redom:
$\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$, $\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\frac{1}{3}\vec{b}$, $-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$, $\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

Zadatak 4.4 *Točka T je sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Izrazite vektore $\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}$ i $\overrightarrow{TD}$ preko vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

(*Rješenje*: $\overrightarrow{TA} = -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{TC} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{TB} = \frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\overrightarrow{TD} = -\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$)

Zadatak 4.5 *Neka je T težište težišnica ABC. Odredite zbroj vektora*

$$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}.$$

Rješenje: $\vec{0}$.

Zadatak 4.6 *Stranica $\overline{AB}$ trokuta ABC podijeljena je točkama M i N na tri jednaka dijela: $|AM| = |MN| = |NB|$. Napišite vektor $\overrightarrow{CM}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$.*

Rješenje:
Ako se nacrta pregledna slika trokuta sa navedenim točkama nije teško zaključiti da je:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CB}\\
\vec{a}+\overrightarrow{AB} &= \vec{b}\\
\overrightarrow{AB} &= \vec{b}-\vec{a}
\end{aligned}$$

Budući je po uvjetima zadatka točka M na prvoj trećini dužine $\overline{AB}$ vrijedi vektorski zapis:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a}).$$

Konačno, koristeći još jednom zbrajanje vektora, izlazi rješenje:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{CM}\\
\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a}) &= \overrightarrow{CM}\\
\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a} &= \overrightarrow{CM}\\
\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b} &= \overrightarrow{CM}
\end{aligned}$$

4.4 Koordinate vektora u koordinatnom sustavu ravnine

Zadatak 4.7 *Neka je $\vec{i}$ vektor predstavljen početkom u ishodištu, a krajem u točki na apscisi s koordinatom 1. Neka je $\vec{j}$ vektor čiji je reprezentant orijentirana dužina s istim početkom i završetkom u točki na ordinati s koordinatom 1. Izrazite:*

1. *Vektor $\overrightarrow{0A}$ gdje je 0 ishodište koordinatnog sustava, a točka $A = (4,5)$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ naziva se **radijus vektorom** točke A.*

2. *Vektor $\overrightarrow{AB}$, gdje je točka $A = (2, 1)$, a točka $B = (3, 6)$.*

Rješenja zadatka

1. $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = 4\vec{i} + 5\vec{j}$.

2. Zaključivanje:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - (2\vec{i} + \vec{j}) &= \vec{i} + 5\vec{j} \end{aligned}$$

Vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ čine **bazu linearnog prostora** V^2, kojeg čine svi vektori u koordinatnoj ravnini obzirom na operaciju zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom.

Zadatak 4.8 *Vektor $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ rastavite u smjerovima vektora $\vec{a} = 2\vec{i}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.*

Rješenje se svodi na nalaženje skalara $\lambda, \nu \in \mathcal{R}$ koji zadovoljavaju jednakost:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda \cdot \vec{a} + \nu \cdot \vec{b} \\ 2\vec{i} + 6\vec{j} &= 2\lambda\vec{i} + \nu(3\vec{i} + 3\vec{j}) \\ 2\vec{i} + 6\vec{j} &= (2\lambda + 3\nu)\vec{i} + 3\nu\vec{j}. \end{aligned}$$

Radi linearne nezavisnosti vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ dobiva se izjednačavanjem koeficijanata iz komponenti sustav:

$$\begin{aligned} 2\lambda + 3\nu &= 2 \\ 3\nu &= 6 \\ \nu &= 2 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

čija rješenja daju traženu linearnu kombinaciju

$$\vec{c} = 2\vec{b} - 2\vec{a}.$$

Zadaci

1. Za zadane točke $A = (-3, 3)$, $B = (4, -1)$, $C = (-1, 0)$ odredite koordinate vektora: a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; e) $\frac{\overrightarrow{BC}}{2} - \overrightarrow{AC}$; f) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$; g) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$.

2. Zadan je četverokut s vrhovima $A = (-3, -1)$, $B = (3, -3)$, $C = (5, 1)$ i $D = (-1, 3)$. Dokažite da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, dakle da je taj četverokut paralelogram.

3. Točke $A = (-1, -4)$, $B = (6, 1)$ i $C = (4, 1)$ tri su uzastopna vrha paralelograma. Koristeći koordinatizaciju vektora u ravnini odredite koordinate četvrtog vrha D tog parelelograma.

4. Točke $A = (2, 1)$ i $B = (5, 7)$ dva su susjedna vrha paralelograma $ABCD$. Točka $S = (3, 4)$ sjecište je njegovih dijagonala. Odredite koordinate vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$, pa pomoću njih koordinate vrhova C i D tog paralelograma.

5. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Izračunajte slijedeće linearne kombinacije:
a) $\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{a}-\vec{b}$; c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; d) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; e) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$; f) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{c}$.

6. Zadani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}-\vec{j}$ i $\vec{c} = 7\vec{i}-5\vec{j}$. Prikažite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u obliku $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\alpha, \beta in \mathcal{R}$.

7. Zadane su točke $A = (-1, -1)$, $B = (0, 2)$, $C = (1, 6)$ i $D = (5, 3)$. Prikažite vektor $\overrightarrow{AD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

8. Vektor $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ rastavite u smjeru vektora $\vec{a} = 2\vec{i}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

Upute i rezultati 1-7. zadatka

1. a) $7\vec{i} - 4\vec{j}$; b) $-7\vec{i} + 4\vec{j}$; c) $\vec{0}$; d) $2\vec{i} - 3\vec{j}$; e) $-\frac{9}{2}\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j}$; f) $19\vec{i} - 9\vec{j}$; g) $21\vec{i} + \vec{j}$.
2. Vektori su jednaki ako su im jednaki koordinatni zapisi
3. $D = (-3, -4)$
4. $\overrightarrow{AS} = \vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AS} = 2\vec{i}+6\vec{j}$. Ako je $C = (x, y)$, onda je $\overrightarrow{AC} = (x-2)\vec{i}+(y-1)\vec{j}$, pa je $C = (4, 7)$. Analogno se dobije $D = (1, 1)$
5. a) $-2\vec{i} + \vec{j}$; b) $4\vec{i} + 3\vec{j}$; c) $\vec{i} + 6\vec{j}$; d) $-5\vec{i} - 4\vec{j}$; e) $-4\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$; f) $-\frac{21}{10}\vec{i} - \frac{7}{3}\vec{j}$.
6. Iz $7\vec{i}-5\vec{j} = \alpha(-2\vec{i}+\vec{j})+\beta(\vec{i}-\vec{j}) = (-2\alpha+\beta)\vec{i}+(\alpha-\beta)\vec{j}$ izlazi sustav: $-2\alpha+\beta = 7$, $\alpha - \beta = -5$, dakle $\alpha = -2$, $\beta = 3$, pa je $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.
7. $\overrightarrow{AD} = 34\overrightarrow{AB} - 14\overrightarrow{AC}$.
8. $\vec{c} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$

4.5 Duljina vektora u koordinatnoj ravnini

Duljina vektora zapisanog u pravokutnim koordinatama kao

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j}$$

računa se po Pitagorinom poučku:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

Zadatak 4.9 *Za zadane vektore $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ izračunajte: a) $|\vec{a}|$; b) $|\vec{b}|$; c) $|\vec{a} + \vec{b}|$; d) $|\vec{a} - \vec{b}|$.*

Rješenja
a) $|\vec{a}|$=5; b) $|\vec{b}|$ c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{17}$ d) $|\vec{a} - \vec{b}| = 8\sqrt{5}$.

Zadaci za samostalno rješavanje:

1. Zadan je trokut s vrhovima $A = (-2, 2)$, $B = (2, 1)$ i $C = (5, 3)$. Neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$. Odredite vektore:
   a) $|\vec{a}|\vec{c} + |\vec{c}|\vec{a}$; b) $|\vec{c}|\vec{a} - |\vec{a}|\vec{c}$.

2. Zadana je točka $A = (2, -3)$. Odredite ordinatu y točke $B = (3, y)$ tako da je $|\overrightarrow{AB} = \sqrt{5}$.

3. Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \lambda\vec{j}$, $\vec{b} = \lambda\vec{i} + 5\vec{j}$. Odredite realan broj λ zako da bude $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{97}$.

Rješenja 1,2,3:

1. a) $35\vec{i} + 5\vec{j}$; b) $-5\vec{i} + 35\vec{j}$.
2. $B_1 = (3, -1)$, $B_2 = (3, -5)$.
3. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{7}{5}$.

4.6 Pravokutne koordinate u prostoru

Pravokutni Kartezijev koordinatni sistem u prostoru $Oxyz$ zadan je s ishodištem O i s tri okomita brojevna pravca: x-osi ili osi apscisa, y-osi ili osi ordinata i z-osi ili osi aplikata.

Svakoj točki M jednoznačno je pridružena uređena trojka:

$$M = (x, y, z).$$

Udaljenost točke M od ishodišta koordinatnog sustava računa se po Pitagorinom poučku:

$$d(\overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zadatak 4.10 *Skicirajte točku* $M = (5, -3, 4)$ *u pravokutnom koordinatnom sustavu. Odredite njezinu udaljenost od središta koordinatnog sustava, udaljenost do osi* OZ *i udaljenost do ravnine* XOY.

Rješenje:
$|\overline{OM}| = 7$, $d(M, z - os) = \sqrt{34}$ i $d(M, z = 0) = 4$.

4.7 Vektori u pravokutnom koordinatnom sustavu prostora

Koordinatni vektori $\vec{i}$**,** $\vec{j}$ **i** $\vec{k}$ su jedinični vektori usmjereni prema pozitivnim smjerovima koordinatnih osi.

Vektor $\vec{a}$ jednoznačno se može prikazati u obliku

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

gdje su a_x, a_y i a_z projekcije vektora $\vec{a}$ na odgovarajuće koordinatne osi. Vektore $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$ i $a_z\vec{k}$ nazivaju se **komponentama** vektora $\vec{a}$ u smjerovima koordinatnih osi.

Vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ čine **ortonormiranu bazu prostora** svih vektora prostora u oznaci V^3.

Duljina ili modul $|\vec{a}|$ računa se po formuli:

$$|\vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Smjer vektora $\vec{a}$ zadan je kosinusima kuteva koje vektor $\vec{a}$ zatvara s koordinatnim osima:

$$\cos\alpha_x = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\alpha_y = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\alpha_z = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Kosinusi smjerova zadovoljavaju jednakost

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1.$$

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani svojim rastavom po komponentama:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},\end{aligned}$$

onda su komponente sume i razlike vektora zadane formulama:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}\\ \vec{a} - \vec{b} &= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}\end{aligned}$$

Množenje vektora $\vec{a}$ skalarom λ određeno je formulom:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Jedinični vektor vektora $\vec{a}$ u oznaci $\vec{a}_0$ dobiva se množenjem vektora $\vec{a}$ skalarom $1/|\vec{a}|$:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

u smislu navedenog množenja. Komponente jediničnog vektora $\vec{a}_0$ podudaraju se s kosinusima smjera vektora $\vec{a}$.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom ili **hvatištem** u točki $A = (x_A, y_A, z_A)$ i završetkom ili ciljem u točki $B = (x_B, y_B, z_B)$ po komponentama ima zapis:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

Radijus vektor točke $M = (x_M, y_M, z_M)$ u oznaci $\vec{r}_M$ ima komponente:

$$\vec{r}_M = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}.$$

vrijedi:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

Zadatak 4.11 *Radijus vektori vrhova trokuta ABC su redom: $\vec{r_A}, \vec{r_B}, \vec{r_C}$. Napišite radijus vektor težišta trokuta.*

Rješenje:
Težište trokuta je točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice. Težište dijeli svaku od težišnica u omjeru 2 : 1 gledano od vrha trokuta. Navedene činjenice nalaze se u svakim boljim logaritamskim tablicama, odnosno matematičkom priručniku [7]. Ako se pregledno nacrta trokut i ishodište koordinatnog sustava, tada je jasno da vrijedi:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{BC} &= \vec{r_C}-\vec{r_B}.\end{aligned}$$

Ako je P_a polovište stranice a, tada je

$$\overrightarrow{BP_a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{r_C}-\vec{r_B})$$

i vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_a} &= \overrightarrow{AP_a}\\ \vec{r_B}-\vec{r_A}+\frac{1}{2}(\vec{r_C}-\vec{r_B}) &= \overrightarrow{AP_a}\\ \frac{1}{2}\vec{r_B}+\frac{1}{2}\vec{r_C}-\vec{r_A} &= \overrightarrow{AP_a}\end{aligned}$$

Težište T trokuta ABC nalazi se na 2/3 težišnice $\overline{AP_a}$ iz vrha A. Vektorski zapis te činjenice izgleda:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP_a},$$

odakle slijedi slijedeći račun:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AT}\\ \vec{r_T} &= \vec{r_A}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP_a}\\ \vec{r_T} &= \vec{r_A}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\vec{r_B}+\frac{1}{2}\vec{r_C}-\vec{r_A})\\ \vec{r_T} &= \vec{r_A}+\frac{1}{3}\vec{r_B}+\frac{1}{3}\vec{r_C}-\frac{2}{3}\vec{r_A}\\ \vec{r_T} &= \frac{1}{3}\vec{r_A}+\frac{1}{3}\vec{r_B}+\frac{1}{3}\vec{r_C}\end{aligned}$$

Zadatak 4.12 *Odredite komponente vektora* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *ako je* $A(1,3,2)$ *i* $B(5,8,-1)$.

Rješenje slijedi neposredno iz definicije radijus vektora i definicije zbrajanja vektora:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{AB} &= \vec{r}_B-\vec{r}_A\\ &= 4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}\end{aligned}$$

Zadatak 4.13 *Izračunajte duljinu vektora* $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ *i kosinuse smjera zadanog vektora.*

Rješenje se dobiva neposrednim uvrštavanjem u formulu navedenu u uvodu:

$$\begin{aligned}
|\vec{a} &= \sqrt{20^2 + 30^2 + 60^2} = 70 \\
\cos\alpha &= \frac{20}{70} = \frac{2}{7} \\
\cos\beta &= \frac{30}{70} = \frac{3}{7} \\
\cos\gamma &= \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}
\end{aligned}$$

Zadatak 4.14 *Točke* $A(2,2,0)$ *i* $B(0,-2,5)$ *zadane su svojim pravokutnim koordinatama. Raspišite vektor* $\overrightarrow{AB}$ *po komponentama u smjeru vektora baze i odredite duljinu vektora.*

Rješenje se dobiva neposrednim uvrštavanjem:

$$\overrightarrow{AB} = (0-2)\vec{i} + (-2-2)\vec{j} + (5-0)\vec{k} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k},$$

kao i duljina vektora:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{4 + 16 + 25} = 6.71$$

Zadatak 4.15 *Vektor* $\vec{r}$ *zatvara s koordinatnim osima jednake šiljaste kuteve. Odredite kuteve i komponente vektora* $\vec{r}$*, ako je* $|\vec{r}| = 2\sqrt{3}$.

Rješenje.
Jednakost kuteva povlači jednakost kosinusa:

$$\cos\alpha_x = \cos\alpha_y = \cos\alpha_z.$$

Uvjet šiljatih kuteva povlači pozitivnost kosinusa:

$$\cos\alpha_i > 0.$$

Kosinusi kuteva zadovoljavaju jednakost

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_x^2 + \cos\alpha_y^2 + \cos\alpha_z^2 &= 1 \\
3\cos\alpha_x^2 &= 1 \\
\cos\alpha_x &= +\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.57735 \\
\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z &= 54^o 44' 8''
\end{aligned}$$

Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{r}$ ima komponente:

$$\vec{r}_0 = \cos\alpha_x \vec{i} + \cos\alpha_y \vec{j} + \cos\alpha_z \vec{k}$$

a za vektor $\vec{r}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 2\sqrt{3} \cdot \vec{r}_0 \\ 2\sqrt{3} &= 2\sqrt{3}(\sqrt{\frac{1}{3}}\vec{i} + \sqrt{\frac{1}{3}}\vec{j} + \sqrt{\frac{1}{3}}\vec{k}) \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

Zadatak 4.16 *Zadana su tri uzastopna vrha paralelograma $ABCD$: $A = (1, -2, 3), B = (3, 2, 1)$ i $C = (6, 4, 4)$. Odredite četvrti vrh i opseg paralelograma.*

Rješenje je lakše naći nakon dobre skice na kojoj se istakne ishodište i tri zadane točke. Po definiciji zbrajanja vektora ulančavanjem

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}.$$

Iz definicije paralelograma

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Slijedi račun:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \\ \vec{r}_D &= \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{r}_D &= 4\vec{i} + 6\vec{k} \\ D &= (4, 0, 6). \end{aligned}$$

Opseg je zbroj duljina svih stranica. Koristeći se riječnikom vektorskog računa, opseg paralelograma će biti:

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| + 2 \cdot |\overrightarrow{BC} \\ O &= 2|2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}| + 2|3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| \\ O &= 2\sqrt{4 + 16 + 4} + 2\sqrt{9 + 4 + 9} \\ O &= 4\sqrt{6} + 2\sqrt{22} = 19.18 \end{aligned}$$

jediničnih duljina.

Zadaci za samostalno rješavanje.

1. Izrazite u bazi V^3 vektor $\overrightarrow{AB}$, gdje je $A = (2, 1, 0)$ i $B = (-2, 3, 3)$. Izračunajte duljinu vektora i kosinuse kuteva koje zatvara s koordinatnim osima.

2. Zadan je vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ svojim komponentama $a_x = 2, a_y = 4, a_z = -1$ i hvatištem u $A = (0, 4, 2)$. Nađite kraj B vektora $\overrightarrow{AB}$.

3. Zadani su radijus vektori vrhova trokuta $ABCD$: $\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r}_B = 3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{r}_C = \vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$. Dokažite da je trokut jednakostraničan.

4. Odredite projekcije vektora $\vec{a}$ na koordinatne osi, ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, a zadane su točke: $A(0, 0, 1), B(3, 2, 11), C = (4, 6, 5)$ i $D = (1, 6, 3)$.

5. Izračunajte modul vektora

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \frac{1}{5}(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$$

   i odredite kosinuse smjerova.

6. Zadane su točke $M_1(1, 2, 3)$ i $M_2(3, -4, 6)$. Nađite duljinu i jedinični vektor u smjeru $\overrightarrow{M_1M_2}$.

7. Zadan je vektor $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Odredite vektor $\vec{b}$, ako je $|\vec{b}|$=$|\vec{a}|$, $b_y = a_y$ i $b_x = 0$.

8. Radijus vektor točke M zatvara kut od 60^o prema y-osi i kut od 45^o prema z-osi. Duljina vektora jednaka je 8 jediničnih duljina. Izračunajte koordinate točke M ako je apscisa točke M negativna.

Rješenja zadataka 1-7.

1. $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{3}$, $(-0.77, 0.38, 0.58)$.
2. $B = (2, 8, 1)$
3. $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 2\vec{i} - 2\vec{k}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$
4. $a_x = 0, a_y = 2, a_z = -2$
5. $|\vec{a}| = 3/5, \cos\alpha = 1/3, \cos\beta = \cos\gamma = 2/3.$
6. $|\overrightarrow{M_1M_2}| = 7; (\overrightarrow{M_1, M_2})_0 = 2/7\vec{i} - 6/7\vec{j} + 3/7\vec{k}.$
7. Dva su rješenja: $\vec{b} = -2\vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{b} = -2\vec{j} - 5\vec{k}$.
8. $M = (-4, 4, 4\sqrt{2})$

4.8 Skalarni produkt

Neka je $|\vec{a}|$ duljina vektora $\vec{a}$. Skalarni produkt definira se formulom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

gdje je φ kut među vektorima. Svojstva skalarnog produkta su:

- komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- distributivnost $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- kvaziasocijativnost: $\alpha\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \alpha\beta\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ako su vektori okomiti ili ako je jedan od njih $\vec{0}$ nulvektor.

Skalarna projekcija vektora $\vec{a}$ na smjer vektora $\vec{b}$ je broj:

$$a_{\vec{b}} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Predznak projekcije je negativan ako vektori zatvaraju tupi kut.

Vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na smjer vektora $\vec{b}$ je vektor

$$\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \cdot \vec{b}$$

kolinearan vektoru $\vec{b}$.

Zadatak 4.17 *Vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ su jedinični vektori koji zatvaraju kut od $\pi/3$. Vektori $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = -2\vec{p} + \vec{q}$ i $\vec{c} = 7\vec{p} - 4\vec{q}$ dobiveni su kao linearne kombinacije vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$. Izračunajte zbroj duljina vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Odredite kutove koje zatvaraju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.*

Rješenje se dobiva korištenjem definicije skalarnog produkta.

- duljina vektora $\vec{a}$ dobiva se iz svojstva

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = (3\vec{p} - 2\vec{q})^2$$

koristeći se svojstvima kvaziasocijativnosti i komutativnosti:

$$\begin{aligned}(3\vec{p} - 2\vec{q})^2 &= 9\vec{p}^2 - 12\vec{p} \cdot \vec{q} + 4\vec{q}^2 \\ &= 9 \cdot 1 - 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 4 \cdot 1 \\ &= 7 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{7} = 2.65\end{aligned}$$

- duljine vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dobivaju se analogno:

$$\begin{aligned}|\vec{b}|^2 &= \vec{b}^2 = (-2\vec{p} + \vec{q})^2 \\ &= 4\vec{p}^2 - 4\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 \\ &= 4 - 4\cos\frac{1}{2} + 1 \\ |\vec{b}| &= \sqrt{3} = 1.73 \\ |\vec{c}| &= \sqrt{51} = 7.14,\end{aligned}$$

pa je zbroj dobivenih duljina vektora u iznosu 11.52 jedinične duljine.

- kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dobiva se kao jedina nepoznanica u jednadžbi iz definicije skalarnog produkta:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$
$$(3\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (-2\vec{p} + \vec{q}) = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\gamma$$
$$-6\vec{p}^2 + 4\vec{q}\vec{p} + 3\vec{p}\vec{q} - 2\vec{q}^2 = \sqrt{21} \cdot \cos\gamma$$

$$\begin{aligned}-6 + 2 + \frac{3}{2} - 2 &= \sqrt{21} \cdot \cos\gamma | : \sqrt{21} \\ -\frac{4.5}{\sqrt{21}} &= \cos\gamma \\ -0.98198 &= \cos\gamma \\ \gamma &= 169^o 6' 23'',\end{aligned}$$

gdje je γ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

- kut se može dobiti uvrštavanjem u formulu koja je u nekim priručnicima izvedena:

$$\begin{aligned}\cos(\vec{b}, \vec{c}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \\ &= \frac{(-2\vec{p} + \vec{q})(7\vec{p} - 4\vec{q})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{51}} \\ &= \frac{-14\vec{p}^2 + 8\vec{p}\vec{q} + 7\vec{q}\vec{p} - 4\vec{q}^2}{\sqrt{153}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-14+4+\frac{7}{2}-4}{\sqrt{153}} = -0.84887 \\
\alpha &= 148^o5'22''.
\end{aligned}
$$

- bilo kako računali kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$ iznosi $32^o8'11''$.

Zadatak 4.18 *Nađite skalarnu i vektorsku projekciju vektora $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ na smjer vektora $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, ako je $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ i $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^o$.*

Rješenja izlaze iz definicije. Skalarna projekcija

$$
a_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}
$$

dobiva se nakon računanja:

$$
\begin{aligned}
\vec{p} \cdot \vec{q} &= |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos\frac{\pi}{3} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 3; \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (2\vec{p} - 3\vec{q})(\vec{p} + \vec{q}) \\
&= 2\vec{p}^2 - 3\vec{p}\vec{q} + 2\vec{p}\vec{q} - 3\vec{q}^2 \\
&= 8 - 9 + 6 - 27 = -22. \\
|\vec{b}|^2 = \vec{b}^2 = (\vec{p} + \vec{q})^2 & \\
&= \vec{p}^2 + 2\vec{p}\vec{q} + \vec{q}^2 \\
&= 4 + 6 + 9 = 19 \\
|\vec{b}| &= \sqrt{19}. \\
a_{\vec{b}} = \frac{-22}{\sqrt{19}} = -5.05. &
\end{aligned}
$$

Vektorska projekcija dobiva se jednim zahvatom više. Uvažavajući dobivene rezultate:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{\vec{b}} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \\
&= \frac{-22}{19}(\vec{p} + \vec{q})
\end{aligned}
$$

zadatak je priveden završetku.

4.9 Zadaci za samostalno rješavanje

1. Napišite tablicu skalarnog množenja za bazične vektore.
   Rješenje: $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

2. Izračunajte duljine dijagonala paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$.
   Rješenje: duljine dijagonala iznose 2.4 i 4.2 jediničnih duljina.

3. Odredite kut između vektora $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
   Rješenje: kut ima $3\pi/4$ radijana.

4. Odredite λ tako da vektori $2\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\lambda\vec{i} + 4\vec{j}$ budu okomiti.
   Rješenje: $\lambda = 6$.

5. Nađite duljine stranica i kuteve trokuta s vrhovima $A(-1, 2, 3), B = (2, 1, 2)$ i $C = (0, 3, 0)$.
   Rješenje: dvije su stranice po 3.3, jedna je 3.5 jedinične duljine, kutevi: dva po 58.5^o, jedan od 63^o.

6. Odredite skalarnu projekciju vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ na smjer vektora $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.
   Rješenje: $a_{\vec{b}} = 1.86$

7. Naći duljine dijagonala paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut 60.
   Rješenje: duljine dijagonala su 2.6 i 3.6 jediničnih duljina.

8. Izračunajte duljine dijagonala paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m}-2\vec{n}$, ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori, a kut koji zatvaraju
   $$\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$$
   .
   Rješenje: $|\vec{a} + \vec{b}| = 2.19$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3.90$.

Zadatak 4.19 *Odredite parametar λ tako da moduli vektora $\vec{a}(2a^\lambda, \lambda, \lambda - 1)$ i $\vec{b} = (\lambda + 1, \lambda - 2, 0)$ budu jednaki i odredite kut između njih.*

Rješenje zadatka moguće je tek nakon pravilne interpretacije načina na koji su zadani vektori. U različitim knjigam i zbirkama moguće je naići na različite načine zapisivanja vektora u pravokutnoj bazi:

$$\begin{aligned}
\vec{a}(2a^\lambda, \lambda, \lambda - 1) &= 2a^\lambda\vec{i} + \lambda\vec{j} + (\lambda - 1)\vec{k} \\
\vec{b} = (\lambda + 1, \lambda - 2, 0) &= (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda - 2)\vec{j}
\end{aligned}$$

Nakon toga, jednakost modula vodi na račun:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= |\vec{b}| \\
\sqrt{4a^{2\lambda} + \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1} &= \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4}|^2 \\
4a^{2\lambda} &= 4 \\
\lambda &= 0.
\end{aligned}$$

Nakon nalaženja komponenti vektora i zapisa u ekonomičnom obliku $\vec{a} = (2, 0, -1)$ i $\vec{b} = (1, -2, 0)$, neposrednim uvrštavanjem dobiva se

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = 0.4,$$

iz čega slijedi $\varphi = 66^o 25' 19''$

Zadatak 4.20 *Zadani su vrhovi paralelograma:* $A(-3,-2,0), B(3,-3,1), C(5,0,2)$ *i* $D(-1,1,1)$. *Izračunajte kut među dijagonalama.*

Rješavanje zadatka treba početi provjerom vektora koji razapinju paralelogram:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (6,-1,1)\\ \overrightarrow{CD} &= (-6,1,-1)\end{aligned}$$

i daju poredak točaka u paralelogramu: $ABCD$. Tada su dijagonale:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (8,2,2)\\ \overrightarrow{BD} &= (-4,4,0).\end{aligned}$$

Konačno je traženi kut:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{-32+8+0}{6\sqrt{24}\sqrt{2}} = -\frac{24}{48}\\ \varphi &= \frac{2\pi}{3},\end{aligned}$$

no kako se za kut između pravaca općenito uzima manji od dva vršna kuta, to je u ovom slučaju kut među dijagonalama $\frac{\pi}{3} = 60^o$

Zadatak 4.21 *Zadane su točke* $A(3,3,-2), B(0,-3,4), C(0,-3,0)$ *i* $D(0,2,-4)$. *Izračunajte vektorsku projekciju*

$$\overrightarrow{CD}_{\overrightarrow{AB}}.$$

Rješavanje zadatka počinje nalaženjem komponenti vektora

$$\overrightarrow{AB} = (-3,-6,6)$$
$$\overrightarrow{CD} = (0,5,-4)$$

a završava uvrštavanjem u formulu:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}_{\overrightarrow{CD}} &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\cdot(-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k})\\ &= \frac{-30-24}{9+36+36}\cdot(-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k})\\ &= \frac{-2}{3}(-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k})\\ &= 2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}\end{aligned}$$

4.10 Vektorski produkt

Vektorski produkt u R^3 binarna je operacija

$$\times : R^3 \times R^3 \to R^3$$

definiran opisom vektora

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

koji ima smjer, orijentaciju i iznos opisane tvrdnjama:

1) $\vec{c}$ je okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u navedenom poretku čine desnu bazu

3) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ odgovara površini paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Svojstva vektorskog produkta su

a) antikomutativnost $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

b) distributivnost $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

c) kvaziasocijativnost $\lambda\vec{a} \times \nu\vec{b} = \lambda\nu\vec{a} \times \vec{b}$

1. množenje jednakih vektora $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Zadatak 4.22 *Nađite duljinu kraće visine i površinu paralelograma razapetog vektorima $2\vec{b} - \vec{a}$ i $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ i kut $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.*

Rješavanje zadatka dobro je početi nalaženjem formule koja pokazuje odnos površine, duljine stranice i visine na tu stranicu. Formula se može naći u boljem matematičkom priručniku i glasi:

$$P = a \cdot v_a,$$

gdje je a duljina jedne od stranica, a v_a visina paralelograma okomita na tu stranicu.

Vektorski račun površinu paralelograma računa kao duljinu vektora dobivenog vektorskim produktom vektora određenih stranicama paralelograma:

$$P = |(2\vec{b} - \vec{a}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|.$$

Distributivnost omogućava množenje zagrada "svaki sa svakim", no budući da komutativnost ne vrijedi, važno je pisati produkt u pravilnom poretku. Vrijedi kvaziasocijativnost.

$$P = |6\vec{b} \times \vec{a} + 4\vec{b} \times \vec{b} - 3\vec{a} \times \vec{a} - 2\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Množenje jednake vektore poništava, a antikomutativnost daje:

$$\begin{aligned} P &= |6\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{a}| \\ &= |8\vec{b}\times\vec{a}| \\ &= |8|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin\frac{\pi}{4} \\ &= 8\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=80\sqrt{2} \end{aligned}$$

Za izračunavanje duljine visine nedostaje duljina stranice. Budući se iz podataka ne otkriva koja je dulja stranica, treba izračunati duljine obje stranice. Skalarno množenje jednakih vektora daje

$$\begin{aligned} (2\vec{b}-\vec{a})^2 &= |2\vec{b}-\vec{a}|^2 \\ 4\vec{b}^2-4\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2 &= |2\vec{b}-\vec{a}|^2 \\ 4\cdot 16-4\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+25 &= |2\vec{b}-\vec{a}|^2 \\ \sqrt{89-40\sqrt{2}} &= |2\vec{b}-\vec{a}| \end{aligned}$$

duljinu prve stranice, dok račun:

$$\begin{aligned} |3\vec{a}+2\vec{b}|^2 &= (3\vec{a}+2\vec{b})^2 \\ &= 9\vec{a}^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2 \\ &= 225+120\sqrt{2}+64 \\ |3\vec{a}+2\vec{b}| &= \sqrt{289+120\sqrt{2}} \end{aligned}$$

daje duljinu druge stranice paralelograma. Po formuli koja povezuje površinu i visinu paralelograma sa duljinom stranice, dobivaju se dvije visine:

$$v_1=\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{89-40\sqrt{2}}}=19.87$$
$$v_2=\frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{289+120\sqrt{2}}}=5.28$$

Tražena je duljina kraće i ona iznosi 5.28 jediničnih duljina.

Zadaci

1. Izračunajte površinu paralelograma čije dijagonale određuju vektori $3\vec{m}+3\vec{n}$ i $\vec{m}-\vec{n}$, gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut $\frac{\pi}{6}$
   .
   Rješenje. Za dijagonale paralelograma vrijedi $\vec{a}+\vec{b}=3\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ gdje su $\vec{a}$ u $\vec{b}$ vektori koji određuju stranice paralelograma. Riješiti sustav po $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i površina je 1.5 kvadratnih jedinica.

2. Napišite tablicu vektorskog produkta za bazične vektore.
   Rješenje je tablica:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

3. Pokažite da je vektorsko množenje koordinatno zapisanih vektora može računati formalno kvazideterminantom:
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

4. Neka su $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Izračunajte $\vec{a}\times\vec{b}$.
   Rješenje: $3\vec{k}$

5. Nađite površinu i visinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$.
   Rješenje: $P=4.6$, $v=2.05$, a radi se o rombu.

6. Odredite površinu trokuta čiji su vrhovi $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ i $C(4,3,2)$.
   Rješenje $P=4.9$ kvadratnih jedinica

7. Odredite jedinični vektor okomit na vektore $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ i $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.
   Rješenje: $\vec{n}_0=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

Zadatak 4.23 *Odredite skalarnu i vektorsku projekciju vektora* $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}$ *na vektor* $\vec{d}=\overrightarrow{AB}$*, ako je* $A=(2,-2,-1), B=(0,-1,-3), \vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ *i* $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$*.*

Rješenje. Potrebno je naći zapise vektora $\vec{a}$ i $\overrightarrow{AB}$:
$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}.$$
$$\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}.$$
Skalarna projekcija:
$$a_{\overrightarrow{AB}}=\frac{8+8+0}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{16}{3},$$
a vektorska projekcija:
$$\vec{a}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{16}{9}(-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}).$$

Zadatak 4.24 *Zadani su vektori* $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ *i* $\vec{c} = (1, -1, 0)$. *Odredite nepoznati vektor* $\vec{x}$ *koji zadovoljava uvjete:*

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{a} &= 3 \\ \vec{x} \times \vec{b} &= \vec{c} \end{aligned}$$

Rješenje. Nepoznati vektor $\vec{x}$ treba tražiti po komponentama pretpostavkom da je

$$\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

i zadatak se svodi na nalaženje nepoznanica α, β i γ . Jednadžbe izlaze iz uvjeta:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ \vec{x} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \vec{i} - \vec{j} \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \\ -\gamma\vec{i} + \gamma\vec{j} + (\alpha - \beta)\vec{k} &= \vec{i} - \vec{j}. \end{aligned}$$

Koristeći se nezavisnosti vektora baze trodimenzionalnog prostora, dobiva se

$$\begin{aligned} \gamma &= -1 \\ \alpha &= \beta, \end{aligned}$$

što uvrštavanjem u prvi uvjet daje

$$\begin{aligned} 2\alpha - 1 &= 3 \\ \alpha &= 2 \\ \beta &= 2 \end{aligned}$$

i traženi vektor više nije nepoznat:

$$\vec{x} = (2, 2, -1).$$

4.11 Mješoviti produkt

Definicija i računanje mješovitog produkta u koordinatnom zapisu vektora dani su relacijom:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Geometrijski, apsolutna vrijednost mješovitog produkta je volumen paralelepipeda razapetog vetorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Volumen tetraedra odrađenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ računa se po formuli:

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Komplanarni vektori su oni vektori koji leže u jednoj ravnini.

Svojstva mješovitog produkta:

a) Cikličkom zamjenom poretka vektora mješoviti se produkt ne mijenja. Zamjena bilo koja dva vektora u mješovitom produktu povlači promjenu predznaka.

b) Zamjenom vektorskog i skalarnog produkta mješoviti produkt se ne mijenja

c) Mješoviti produkt jednak je nuli kod komplanarnih vektora.

Zadaci

1. Naći volumen i visinu paralelepipeda razapetog vektorima

$$\begin{array}{l} \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \end{array}.$$

(rj: $V = 33$, $v = 4.4$)

2. Koliki je volumen tetraedra razapetog vektorima iz prvog zadatka? (rj: $V = 5.5$)

3. Pokažite da su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ komplanarni i rastavite vektor $\vec{c}$ na komponente u smjeru vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. (rj: $V = 0$, $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$)

4. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$ i $\vec{b} = (1, -2, 0)$. Nađite takav vektor $\vec{c}$ koji je komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, okomit na $\vec{a}$ i $\vec{c} \cdot \vec{b} = 14$. (rj: $\vec{c} = (4, -5, 1)$)

Zadatak 4.25 *Dokažite da točke $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$ i $D(5, 0, -6)$ pripadaju jednoj ravnini.*

Rješenje. Istinita je činjenica da je volumen tetraedra s vrhovima $ABCD$ jednak nuli samo u slučaju da sve četiri točke leže u jednoj ravnini. Dokaz tvrdnje slijedi iz jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} &= 0 \\ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} &= 0. \end{aligned}$$

Vektorski produkt računa se pomoću determinante tek kad se vektori raspišu po komponentam ortonormirane baze:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k} \\ \overrightarrow{AB} &= -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{AC} &= \phantom{-\vec{i} +{}} 4\vec{j} + 2\vec{k}. \end{aligned}$$

Računanjem determinante

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= 3(6-12) - (-2) - 4(-4) \\ &= 3(-6) + 2 + 16 \\ &= -18 + 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dokazuje se tvrdnja zadatka.

Zadatak 4.26 *Odredite onaj od jediničnih vektora okomitih na vektore* $\vec{a} = (-2, -6, -1)$ *i* $\vec{b} = (1, 2, 0)$, *koji s vektorom* $\vec{c} = (2, -1, 0)$ *zatvara šiljasti kut. U smjeru tog vektora odredite vektor* $\vec{d}$ *tako da vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *i* $\vec{d}$ *razapinju paralelepiped volumena 18 kubičnih jedinica.*

Rješenje zadatka slijedi nakon nekoliko etapa. Prvi korak je nalaženje jednog od vektora koji su okomiti na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Postoji beskonačno mnogo vektora koji su okomiti na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$, jer vektor $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ pomnožen bilo kojim skalarom, ponovo će biti vektor okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Slijedeći uvjet je šiljastost kuta koji dobiveni vektor zatvara sa zadanim vektorom $\vec{c} = (2, -1, 0)$:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|} = \frac{2+1}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{3}{3\sqrt{5}},$$

odakle je

$$\varphi = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63^o,$$

pa slijedi da dobiveni vektor $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{c}$.

Budući je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3,$$

jedinični vektor okomit na vektore $\vec{a} = (-2, -6, -1)$ i $\vec{b} = (1, 2, 0)$, koji s vektorom $\vec{c} = (2, -1, 0)$ zatvara šiljasti kut je vektor

$$(\vec{a} \times \vec{b})_0 = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Vektor $\vec{d}$ koji se u zadatku traži ima isti smjer, pa je

$$\vec{d} = \lambda \cdot \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Zahtjev da $\vec{d}$ s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ razapinje paralelepiped volumena 18 kubičnih jedinica daje jednadžbu za λ:

$$\begin{aligned}
|\begin{vmatrix} \frac{2\lambda}{3} & \frac{-\lambda}{3} & \frac{\lambda}{3} \\ -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}| &= 18 \\
|\frac{\lambda}{3}| \cdot |\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}| &= 18 \\
\frac{|\lambda|}{3}(2 \cdot 2 + 1 + 2) &= 18 \\
|\lambda| &= \frac{18 \cdot 3}{9} \\
\lambda_1 = 6 \qquad & \lambda_2 = -6.
\end{aligned}$$

Zadatak ima dva vektora kao konačno rješenje:

$$\begin{aligned}
\vec{d_1} &= 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \\
\vec{d_2} &= -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.
\end{aligned}$$

Zadatak 4.27 *Izračunajte volumen paralelepipeda čiji su bridovi određeni vektorima $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ i $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, ako je poznato samo to da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju paralelepiped volumena $3/4$ kubične jedinice.*

Rješenje. Budući vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu ortonormirani, ne može se koristiti determinanta u nalaženju mješovitog produkta. Ostaje samo definicija:

$$\begin{aligned}
V &= |(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p}| \\
&= |((\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})|.
\end{aligned}$$

Budući je vektorsko množenje distributivno glede zbrajanja smije se vektorski množiti zagrade po načelu "svaki sa svakim" uz obavezan oprez poštivanja poretka u vektorskom umnošku:

$$\begin{aligned} V &= |(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})| \\ &= |(2\vec{c}\times\vec{a}+2\vec{c}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})|, \end{aligned}$$

jer je množenje antikomutativno, pa svaka zamjena mjesta vektora u vektorskom produktu povlači promjenu predznaka.

Skalarno množenje je distributivno, pa se zagrade ponovo množe po načelu "svaki sa svakim". Izostavljeni su monomi u kojima se dvaput javlja isti vektor, jer imaju vrijednost nula.

$$\begin{aligned} V &= |-2(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}+2(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}| \\ &= |2(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+2(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}|, \end{aligned}$$

jer svaka zamjena vektora u mješovitom produktu povlači promjenu predznaka produkta. Konačno:

$$\begin{aligned} V &= |4(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a})| \\ &= 4\cdot\frac{3}{4}=3 \end{aligned}$$

po uvjetu u zadatku.

Problemski zadaci

U slijedećim zadacima pokušajte dokazati tvrdnje. Zadaci nemaju rješenja. Ispravnost dokaza sastoji se u logičnom slijedu tvrdnji koje proizlaze iz definicija i teorema koji su dokazani i prethodnom dijelu zbirke.

1. Dokažite da su za svaka tri po volji odabrana vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ i $\vec{c}-\vec{a}$ komplanarni.

2. Dokažite da za vektore napisane po komponentama ortonormirane baze trodimenzionalnog sustava

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$
$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$$

vrijedi

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

3. Dokazati da za bilo koja 4 trodimenzionalna vektora vrijedi

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{c} & \vec{a}\vec{d} \\ \vec{b}\vec{c} & \vec{b}\vec{d} \end{vmatrix}.$$

Uputa: Svaki se trodimenzionalni vektor može raspisati po komponentama ortogonalne baze. Algebarska razrada lijeve i desne strane vodi na podudarnost.

4.12 Ispitni zadaci s vektorima

Na ispitu dolaze zadaci kojima se provjerava razumijevanje vektorskog računa u što većem opsegu. Zadaci se u pravilu ne ponavljaju.

Zadatak 4.28 *Vektor $\vec{n}$ komplanaran je s vektorima $\bar{p}$ i $\bar{q}$, pri čemu je $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 4$ i $\angle(\bar{p},\bar{q}) = \pi/4$. Ako je $\bar{n}\cdot\bar{p} = 8$ i $\bar{n}\cdot\bar{q} = 16$ odredite*

a) jedinični vektor vektora $\vec{n}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$,

b) $|\vec{n}+\vec{q}|$

c) $\angle(\vec{n},\vec{p})$.

Rješenje.

Komplanarnost vektora $\vec{n},\vec{p}$ i $\vec{q}$ podrazumijeva da se vektor $\vec{n}$ može napisati kao linearna kombinacija vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$:

$$\vec{n} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}.$$

Nepoznati skalari α i β dobivaju se iz uvjeta koji prelaze u jednadžbe. Prvi uvjet daje prvu jednadžbu za α i β:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{p} &= 8 \\ (\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})\cdot\vec{p} &= 8 \\ \alpha\vec{p}^2 + \beta\vec{q}\cdot\vec{p} &= 8 \\ 4\alpha + \beta\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2} &= 8 \\ 4\alpha + 4\beta &= 8, \end{aligned}$$

a drugi uvjet drugu jednadžbu:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{q} &= 16 \\ (\alpha\vec{p}+\beta\vec{q})\cdot\vec{q} &= 16 \\ \alpha\vec{p}\cdot\vec{q} + \beta\vec{q}^2 &= 16 \\ 4\alpha + 16\beta &= 16. \end{aligned}$$

Sustav

$$\begin{cases} 4\alpha + 4\beta = 8 \\ 4\alpha + 16\beta = 16 \end{cases}$$

ima rješenje $\alpha = 4/3$, $\beta = 2/3$, pa je vektor $\vec{n}$ linearna kombinacija

$$\vec{n} = 4/3\vec{p} + 2/3\vec{q}.$$

Sada se mogu rješavati zahtjevi zadatka.

a) Vektor $\vec{n} = 4/3\vec{p} + 2/3\vec{q}$ nije jedinični:

$$\begin{aligned} |\vec{n}| = \sqrt{(4/3\vec{p} + 2/3\vec{q})^2} & \\ &= \sqrt{16/9\vec{p}^2 + 16/9 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} + 4/9\vec{q}^2} \\ &= 2/3\sqrt{4\vec{p}^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2} \\ &= 2/3\sqrt{16 + 16 + 16} = 8\sqrt{3}/3. \end{aligned}$$

Jedinični vektor u smjeru $\vec{n}$ dobiva se nakon množenja

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{3}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(2\vec{p} + \vec{q})$$

i daje rješenje pod a):

$$\vec{n}_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{p} + \frac{\sqrt{3}}{12}\vec{q}.$$

b) Računanjem

$$\begin{aligned} \vec{n} + \vec{q} &= 4/3\vec{p} + 2/3\vec{q} + \vec{q} \\ &= 4/3\vec{p} + 5/3\vec{q}. \\ |\vec{n} + \vec{q}| &= 1/3\sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p} \cdot \vec{q} + 25\vec{q}^2} \\ &= 1/3\sqrt{64 + 160 + 400} = 1/3\sqrt{624} = 4\sqrt{39}/3 \end{aligned}$$

dolazi se do rješenja.

c) Analogno, koristeći rezultat b) dijela zadatka i uvjet zadatka,

$$\begin{aligned} \cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{8}{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi = \angle(\vec{n}, \vec{p}) &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Zadatak 4.29 *Nađite vektor $\vec{c}$, kolinearan vektoru $\vec{a} + \vec{b}$, ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 18$ i $|\vec{b}| = 2$. Napišite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

Rješenje. Kolinearnost vektora $\vec{c}$ i vektora $\vec{a}+\vec{b}$ algebarski se zapisuje:

$$\vec{c} = \lambda(\vec{a}+\vec{b}),$$

gdje $\lambda \in \mathcal{R}$ treba otkriti. Jednadžba koja otkriva λ izlazi iz uvjeta:

$$\vec{c}\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} = 18,$$

koji zbog $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ prelazi u

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2) &= 18 \\ \alpha(5+4) &= 18 \\ \alpha &= 2, \end{aligned}$$

pa je vektor

$$c = 2\vec{a}+2\vec{b}.$$

Zadatak 4.30 *Nađite vektor $\vec{x}$ okomit na vektore*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (3,2,1) \\ \vec{b} &= (2,-1,3) \\ &\vec{c}(1,1,-1) \end{aligned}$$

Rješenje. Nepoznati vektor tražimo u općenitom zapisu

$$\vec{x} = (\alpha,\beta,\gamma)$$

uz uvjete da skalarni produkt poništava okomite vektore:

$$\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{a} = 3\alpha+2\beta-\gamma &= 0 \\ \vec{x}\cdot\vec{b} = 2\alpha-\beta+3\gamma &= 0 \\ \vec{x}\cdot\vec{c} = \alpha+\beta-\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Sustav jednadžbi ima samo jedno rješenje:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

pa je jedini vektor okomit na tri očito nekomplanarna vektora nužno jedino nulvektor:

$$\vec{x} = \vec{0}.$$

Zadatak 4.31 *Zadani su vektori $\overrightarrow{OA} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{OB} = (4,4,4)$, $\overrightarrow{OC} = (3,5,5)$, $\overrightarrow{OD} = (2,2m,3m+1)$ i vektor $\vec{a} = 3\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$.*

a) Odredite m tako da $\overrightarrow{AD}$ bude okomit na vektor $\vec{a}$.

b) Izračunajte volumen tetraedra $ABCD$.

Rješenje.

a) Vektor:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{i} + (2m-1)\vec{j} + 3m\vec{k}$$

i uz uvjet okomitosti koji poništava skalarni produkt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \perp \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \vec{a} &= 0 \\
3 - 5(2m-1) + 6m &= 0 \\
3 - 10m + 5 + 6m &= 0 \\
8 &= 4m \\
m &= 2
\end{aligned}$$

b) Za nađenu vrijednost $m = 2$ vektori koji razapinju tetraedar su:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (3, 3, 3) \\
\overrightarrow{AC} &= (2, 4, 4) \\
\overrightarrow{AD} &= (1, 3, 6)
\end{aligned}$$

i volumen tetraedra

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \right| \\
V &= \frac{1}{6} |(3 \cdot 12 - 3 \cdot 8 + 3 \cdot 2)| \\
V &= \frac{1}{6} |(36 - 24 + 6)|
\end{aligned}$$

iznosi 3 kubične jedinice.

Zadatak 4.32 *Izračunajte veličinu kuta što ga zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$, ako su vektori $\vec{s} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{t} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ okomiti.*

Rješenje. Postupak nije dugačak, ali je zahtjevan za razumijevanje:

$$\begin{aligned}
\vec{s} \perp \vec{t} \Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{t} &= 0 \\
(\vec{m} + 2\vec{n})(5\vec{m} - 4\vec{n}) &= 0 \\
5\vec{m}^2 + 10\vec{m}\vec{n} - 4\vec{m}\vec{n} - 8\vec{n}^2 &= 0 \\
6\vec{m}\vec{n} &= 3 \\
|\vec{m}||\vec{n}| \cos\varphi &= \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Zadatak 4.33 *Tri jedinična, ali ne i ortogonalna vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ zatvaraju kuteve: $\angle(\vec{i},\vec{j}) = \pi/4$, $\angle(\vec{j},\vec{k}) = \pi/2$ i $\angle(\vec{k},\vec{i}) = 2\pi/3$. Ako je $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, a $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, nađite $|\vec{a} \times \vec{b}|$.*

Rješenje. Poznata svojstva distributivnosti i antikomutativnosti redom daju

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} + \vec{j}) \\
&= -\vec{j} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{i} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{j} \\
&= 2\vec{i} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{i} + \vec{k} \times \vec{j} \\
|\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} \times \vec{b})^2} \\
&= \sqrt{4(\vec{i} \times \vec{j})^2 + (\vec{k} \times \vec{i})^2 + (\vec{k} \times \vec{j})^2 + 4(\vec{i} \times \vec{j})(\vec{k} \times \vec{i}) + 2(\vec{k} \times \vec{j})(\vec{k} \times \vec{i})} \\
&= \sqrt{7}/2,
\end{aligned}$$

jer je, primjerice:

$$(\vec{i} \times \vec{j})^2 = |\vec{i} \times \vec{j}|^2 = |\vec{i}|^2 |\vec{j}|^2 \sin^2(\pi/4) = 1/2,$$

dok je po 3. problemskom zadatku:

$$(\vec{k} \times \vec{j})(\vec{k} \times \vec{i}) = \begin{vmatrix} \vec{k}\vec{k} & \vec{k}\vec{i} \\ \vec{j}\vec{k} & \vec{j}\vec{i} \end{vmatrix},$$

a skalarne produkte valja računati po definiciji:

$$\vec{k}\vec{i} = |\vec{k}||\vec{i}| \cos(2\pi/3) = -1/2.$$

Zadatak 4.34 *Točke $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$ i $D(2,3,8)$ vrhovi su piramide. Izračunajte*

a) volumen piramide

b) visinu na stranicu ABC

Rješenje.

a) Vektori koji određuju trostranu piramidu su:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= -2\vec{i} + 3\vec{j} \\
\overrightarrow{AC} &= -2\vec{i} + 6\vec{k} \\
\overrightarrow{AD} &= 3\vec{j} + 8\vec{k}
\end{aligned}$$

a volumen piramide dobiva se računom:

$$
\begin{aligned}
V &= |\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}| \\
&= \frac{1}{6}|(-2\cdot(-18) - 3\cdot(-16))|
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{6}|-84| = 14$$

b) Visina na stranicu ABC kao na osnovicu dobiva se iz srednjoškolske formule

$$V = \frac{B \cdot v}{3},$$

gdje je V - volumen piramide, B - površina osnovice i v - visina piramide mjerena od osnovice površine B. Površina osnovice dobiva se kao polovica apsolutne vrijednosti vektorskog produkta:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\
&= \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}| \\
&= \frac{1}{2}|18\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}| \\
&= 3|3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}| \\
&= 3\sqrt{9+4+1} = 3\sqrt{14}
\end{aligned}
$$

Sada ostaje izračunati duljinu visine v:

$$v = \frac{3V}{B} = \frac{42}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14} = 3.7$$

i zadatak je riješen.

Zadatak 4.35 *Zadani su vektori* $\vec{a} = (2\lambda, 1, 1-\lambda)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ *i* $\vec{c} = (5, -1, 8)$. *Odredite parametar* λ *tako da vektor* $\vec{a}$ *zatvara jednake kutove s vektorima* $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$. *Za takav* λ *odredite nagib vektora* $\vec{a}$ *prema ravnini određenoj vektorima* $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$. *Za isti* λ *odredite volumen i jednu od visina paralelepipeda konstruiranog nad vektorima* $\vec{a}, \vec{b}$ *i* $\vec{c}$.

Rješenje. Budući se kut između vektora nalazi u intervalu $[0, \pi]$, to će jednakost kosinusa povlačiti jednakost kutova:

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}.$$

Množenje modulom vektora $\vec{a}$ i uvrštavanje koordinata vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ daje:

$$\begin{aligned}
\frac{-2\lambda+3}{\sqrt{10}} &= \frac{2\lambda+7}{\sqrt{90}} | \cdot 3\sqrt{10} \\
-6\lambda+9 &= 2\lambda+7 \\
-8\lambda &= -2 \\
\lambda &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

i prvi dio zahtjeva je zadovoljen.

Nagib vektora $\vec{a}$ prema ravnini određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u stvari je kut pravca koji ima smjer vektora $\vec{a}$ i jedne od ravnina paralelnih vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Taj kut definira se kao šiljasi kut pravca i njegove vertikalne projekcije (sjene) u ravnini. Vektorski račun omogućava nalaženje kuta koji zatvaraju vektor $\vec{a}$ i vektor okomit na vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 8\vec{j} - 14\vec{k}.$$

Kut se računa po standardnoj formuli:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a}||\vec{b} \times \vec{c}|} \\
&= \frac{12 + 8 - \frac{21}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{14}} \cdot \sqrt{836}} \\
&= \frac{9.5}{\sqrt{1.8125}\sqrt{836}} \\
&= 0.24405 \\
\varphi &= 76^o
\end{aligned}$$

i daje komplement kuta kojeg zatvara smjer vektora $\vec{a}$ i ravnina određena vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Traženi kut:

$$\psi = 14^o.$$

Volumen paralelepipeda kojeg zatvaraju vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ računa se pomoću determinante:

$$V = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 24 + 8 + \frac{3}{4} \cdot (-14) = 9.5,$$

što je bilo i za očekivati iz prethodnog računanja kuta.

Ako se za visinu odabere upravo visina na bazu - paralelogram razapet vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, koristeći rezultat

$$B = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{836}$$

i srednješkolsku formulu

$$V = B \cdot v$$

dobiva se

$$v = \frac{V}{B} = \frac{9.5}{\sqrt{836}} = 0.32$$

i zadatak je u potpunosti riješen.

4.13 Zadaci za vježbu

Zadaci su namijenjeni samostalnom rješavanju. Zadatke koje ne možete riješiti sami, riješite u suradnji s demonstratorom, asistentom, profesorom ili instruktorom. Ipak, prije no što potražite stručnu pomoć, bilo bi dobro kad bi samostalno riješili barem tri postavljena zadatka.

Zadaci

1. Pokažite da su vektori $\vec{a} = -\vec{i}+3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ i $\vec{c} = -3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ komplanarni, pa rastavite vektor $\vec{c}$ na linearnu kombinaciju druga dva vektora.
   Rješenje: $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

2. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani su tako, da je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, a kut među njima je 120^o. Kolika je duljina vektora $\vec{c} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b}$?
   Rješenje: $|\vec{c}| = 10.4$ jedinične duljine.

3. Odredite volumen i oplošje trostrane piramide čiji su vrhovi točke $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ i $C(3,7,2)$.
   Rješenje: $V = 20$ kubičnih, a $O = 56.2$ kvadratne jedinice (Oplošje tijela je ukupna površina ploha koje omeđuju tijelo).

4. Točke $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ i $C(5,0,2)$ tri su uzastopna vrha paralelograma $ABCD$. Odredite opseg i površinu tog paralelograma. Nađite koordinate četvrtog vrha D.
   Rješenje. $O = 20$ jediničnih duljina, $P = 21$ kvadratna jedinica, $D = (-1,1,1)$.

5. Zadani su vrhovi trokuta $A(2,1,1)$, $B(3,1,4)$ i $C(0,2,1)$. Izračunajte površinu zadanog trokuta i duljinu visine spuštene iz vrha C:
   Rješenje. $P = 3.4$ kvadratne jedinice, $h = 2.1$ jedinične dužine.

6. Odredite parametar t tako da točke $A(t+2,7,-2)$, $B(3,2,-1)$, $C(9,4,4)$ i $D(1,5,0)$ leže u istoj ravnini. Odredite površinu četverokuta $ABCD$.
   Rješenje: $t = -\frac{89}{13}$, $P = 24.3$ kvadratne jedinice.

7. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{j} - 2\vec{k}$. Prikažite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$.
Rješenje: komponente vektora $\vec{c}$ su redom $(-\frac{25}{47}, \frac{121}{47}, -\frac{19}{94})$.

8. Na osi OZ nađite točku A, tako da točka A zajedno s točkama: $B = (2,3,5)$, $C = (6,2,3)$ i $D = (3,7,2)$ određuje trostranu piramidu volumena 20 kubičnih jedinica. Odredite duljinu visine zadane piramide koja je spuštena iz vrha A.
Rješenja: $z_A = 257/17$, $h = 5.3$ jedinične duljine.

9. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = -\vec{j} + 2\vec{k}$. Odrediti vektor $\vec{d}$ iz uvjeta $\vec{c} \cdot \vec{d} = 1$ i $\vec{d} \times \vec{a} = \vec{b}$, a zatim naći skalarnu projekciju vektora $\vec{d}$ na smjer vektora $\vec{c}$.
Rješenje: $\vec{d} = (-3,-3,-1)$, $\vec{d}_{\vec{c}} = (0,-1/5,2/5)$.

10. Koordinate točke D tri su uzastopna prirodna broja. Nađite koordinate točke D tako da točka D zajedno s točkama $A = (1,-2,4)$, $B = (0,-2,-3)$ i $C = (4,5,-1)$ zatvara tetraedar volumena $35/3$ kubičnih jedinica.
Rješenje provjerite sami.

11. Nađite skalarnu i vektorsku projekciju vektora $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ na vektor $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, ako je $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $A(2,-2,-1)$, $B(0,-1,-3)$.
Rješenje: skalarna projekcija $\frac{16}{3}$, vektorska: $\vec{a}_{\vec{d}} = -\frac{16}{9}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$

12. Zadani su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} + m\vec{j} + 4\vec{k}$. Odredite m tako da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni i izrazi $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Rješenje: $m = -3$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

13. Zadane su točke $A(1,1,1), B(4,4,4)$, $C(3,5,5)$ i $D(2,2m,3m+1)$, te vektor $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$. Odredite:
   (a) m, tako da vektor $\overrightarrow{AD}$ bude okomit na $\vec{a}$
   (b) volumen tetraedra $ABCD$

   rješenje: $m = 2$, $V = 3$.

14. Izračunajte veličinu kuta što ga zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{s} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{t} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ međusobno okomiti.
Rješenje: kut je 60.

15. Odrediti m tako da vektor $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + m\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ zatvaraju jednake kutove s vektorima $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$.
Rješenje: $m = 1$.

4.14 Zadaci isključivo za *samostalno* rješavanje

Slijedeći zadaci bili su ispitni na rokovima prijašnjih godina. Rješenja su dana u slijedećoj točki. Ne gledajte prerano rješenja. U slučaju da neki od zadataka ne znate riješiti, pronađite sličan zadatak riješen uz stručnu pomoć, naučite ga napamet i onda probajte riješiti zadatak s kojim imate problema.

Zadaci:

1. Zadani su vektori: $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ i $\vec{n} = -3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jedinični vektori koji zatvaraju kuteve: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$ i $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{6}$. Izračunajte duljine dijagonala paralelograma kojeg razapinju vektori $\vec{}$ i $\vec{n}$.

2. Tri uzastopna vrha paralelograma su $A(-1, -1, 2)$, $B(0, 1, -3)$, $C(-4, 0, -2)$. Nađite četvrti vrh i odredite duljinu kraće visine paralelograma.

3. Pokažite da točke $A(2, 3, 4)$, $B(1, 3, -2)$, $C(-1, 0, 2)$ i $D(3, -3, 4)$ ne leže u jednoj ravnini. Koliko bi visok bio tetraedar određen tim točkama, kad bi ga postavili na plohu određenu točkama ABC?

4. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ razapinju paralelepiped volumena $V = 8$ kubičnih jedinica. Koliki volumen će imati paralelepiped koji će razapinjati vektori $2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ i $3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$?

5. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori za koje vrijedi: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, a kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi 60^o. Nađite veći kut u paralelogramu kojeg razapinju vektori $3\vec{a} + 2\vec{b}$ i $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

6. Pokažite da su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ komplanarni, po rastavite vektor $\vec{c}$ na komponente u smjerovima druga dva vektora.

7. Zadane su točke: $A = (2, -3, 3)$, $B = (0, 2, 1)$ i $C = (-3, -2, t)$. Odredite parametar t, pa da trokut ΔABC ima površinu 16 kvadratnih jedinica.

8. Zadane su točke: $A = (t, -2, 1)$, $B = (0, 2, 0)$ i $C = (-1, 2, -3)$. Odredite parametar t, pa da trokut ΔABC ima površinu 18 kvadratnih jedinica.

9. Odredite volumen i oplošje trostrane piramide (tetraetdra) čiji su vrhovi $A(0, 0, 1)$, $B = (2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$ i $D(3, 7, 2)$.

10. Odredite prvu koordinatu $x =$? točke D, ako točke $A = (2, 3, 1)$, $B = (4, 0, 3)$, $C = (5, 5, -2)$ i $D = (x, 1, 2)$ određuju tetraedar u kojem visina spuštena iz vrha D ima duljinu $v = 18$ jediničnih duljina.

11. Odredite drugu koordinatu $y =$? točke C, ako točke $A = (5, 1, 4)$, $B = (-1, -1, -1)$, $C = (2, y, 3)$ i $D = (3, 2, 1)$ određuju tetraedar u kojem visina spuštena iz vrha C ima duljinu $v = 15$ jediničnih duljina.

12. Da li točke $A(-2, 1, -3$, $B(1, 1, 0)$, $C(3, 6, 9)$, i $D(1, 8, 2)$ leže u istoj ravnini. Ako leže, izrazite vektor $\overrightarrow{AB}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$. Ako ne leže, izračunajte volumen tetraedra čiji su to vrhovi.

13. Izračunajte skalarnu projekciju vektora $\vec{a} = (3, -12, 4)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c} qtimes \vec{d}$, ako je $\vec{c} = (-1, 0, 2)$ i $\vec{d} = (1, 3, -4)$.

14. Tetraedar $ABCD$ ima $V = 12.5$ kubičnih jedinica. Ako su poznata tri vrha tetredra: $A(2, 0, -1)$, $B(3, -1, 5)$ i $C(4, 4, 4)$, odredite koordinate četvrtog vrha D, ako je vektor $\overrightarrow{AD}$ u smjeru vektora $3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

15. Izračunajte duljine stranica i površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 4$, dok je kut $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/3$. Vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ su takvi da je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, a kut $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/4$. Kakav kut zatvaraju vektori $\vec{} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 4\vec{m} + 5\vec{n}$ koji predstavljaju linearne kombinacije vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$?

16. Napišite komponente vektora $\vec{x}$ za koji je $\vec{x} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -2$ i $\vec{x} \cdot \vec{c} = -7$, ako su zadani vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

17. Odredite vektor duljine 7, koji je okomit na vektore $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

18. Točke $A(1, 0, 2)$, $B(-3, -2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ i $D(-1, -1, 1)$ vrhovi su tetraedra. Odredite volumen tetraedra i duljinu visine spuštene iz vrha D.

19. Točke $A(3, 2, 0)$, $B(-3, 3, -1)$ i $D(1, -1, -1)$ vrhovi su paralelograma $ABCD$. Odredite opseg, površinu i koordinate vrha C u zadanom poretku vrhova paralelograma.

Rješenja zadataka isključivo za samostalno rješavanje

1. Kraća dijagonala ima 0.78 i dulja 5 jediničnih duljina.
2. Četvrti vrh $D = (-5, -2, -3)$, a kraća visina je ona na stranicu $\overline{AB}$ i iznosi 3.4 jedinične duljine.
3. $V = 24 \neq 0$, a visina na ABC iznosi 5.9 jediničnih duljina.
4. $V = 16$ kubičnih jedinica.
5. Veći kut je $180^o - 71^o = 129^o$.
6. $\vec{c} = 9\vec{a} + 3\vec{b}$.
7. Dva su rješenja: $t_1 = 2.36$, $t_2 = 1.78$.
8. Analogno: $t_1 = 11.57$, $t_2 = -10.90$
9. $V = 20$ kubičnih, a $O = 11.292 + 12.247 + 13.693 + 18.974 = 56.2$ kvadratnih jedinica.
10. $x_1 = 63.99$, $x_2 = 68.39$.
11. $y_1 = -17.46$, $y_2 = 19.50$.
12. Ne leže, $V = 19.5$ kubičnih jedinica.
13. Skalarna projekcija: $-6/7$.
14. $D = (11, 6, 2)$.
15. Duljine stranica: $|\vec{a}| = 4\sqrt{3} \sim 7$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{13} \sim 7.2$ jediničnih duljina. $P = 20\sqrt{3} \sim 34.6$ jediničnih duljina.
16. Tupi kut, jer je kosinus negativan.
17. Rješenje: $\vec{x} = (-1, -2, 4)$.
18. Traženi vektor je
$$\frac{7}{\sqrt{366}}(7\vec{i} - 14\vec{j} - 11\vec{k}).$$
19. $V = 7/6$ kubične jedinice, a visina iznosi $h = \frac{7\sqrt{38}}{76} \sim 0.6$ jedinične duljine.
20. $O = 2\sqrt{38} + 2\sqrt{14} = 19.8$ jediničnih duljina, $P = \sqrt{432} = 20.8$ kvadratnih jedinica, $C = (-5, 0, -2)$.

5 Funkcije jedne realne varijable

U ovom poglavlju zadaci su vezani uz proučavanje osobina funkcija jedne realne varijable.

Realni brojevi su racionalni ili iracionalni. Svi realni brojevi mogu se predočiti kao položaji točaka na brojevnom pravcu.

Apsolutna vrijednost realnog broja x je nenegativni broj $|a|$ definiran formulama:

$$\begin{cases} a & za \quad a \geq 0 \\ -a & za \quad a < 0 \end{cases}$$

Neka su X i Y neprazni skupovi. Ako postoji pravilo koje ***svakom*** elementu skupa X pridružuje ***jedan*** i ***samo jedan*** element skupa Y, govori se o ***funkcijskom preslikavanju*** skupa X u skup Y ili ***funkciji***:

$$f : X \to Y.$$

Uobičajen je zapis

$$y = f(x)$$

gdje je

$x \in \mathcal{R}$ - varijabla

$y \in \mathcal{R}$ - vrijednost funkcije

$f(x)$ - pravilo koje svakom elementu x pridruži element $y \in Y$.

Zadatak 5.1 *Izračunajte izraz*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

za funkciju $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ zadanu formulom $f(x) = x^2$.

Rješenje. Najprije se izračunaju vrijednosti funkcije za $x = a$ i $x = b$:

$$f(a) = a^2, \quad f(b) = b^2.$$

Nakon toga slijedi:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$$

Zadatak 5.2 *Neka je $f : \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{R}$ funkcija zadana formulom:*

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z.$$

Popunite tablicu:

z	-10	-1000	$-100,000$	$-1.000,000$	$-100.000,000$
$f(z)$					

Rješenje: 2.86797, 2.71964, 2.71829, 2.71828, 2.71828

5.1 Ponavljanje elementarnih funkcija

Za studente koji su propustili naučiti u srednjoj školi detalje važne za nastavak školovanja na tehničkim fakultetima.

Elementarne funkcije su funkcije koje se ne mogu napisati kao kompozicije jednostavnijih funkcija.

Polinomi su funkcije oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Polinomi se dijele prema stupnju. Polinom je normiran, ako je $a_n = 1$. Polinomi su definirani na cijelom $\mathcal{R}$. Grafovi polinoma nultog, prvog i drugog stupnja trebali bi biti poznati iz dosadašnjeg školovanja. Ostali polinomi crtaju se prema orijentirima:

- nultočkama, za čije nalaženje nema algoritma u slučaju da stupanj polinoma prelazi četiri.
- vrijednostima za $x = 0$ koje predstavljaju ordinatu sjecišta s osi $0Y$.

Nacrtati grafove slijedećih funkcija:

1. $y = 3$
2. $y = -\frac{1}{2}x + 3$
3. $y = x^2 - x - 2$

4. $y = x^2 - x + 2$
5. $y = -x^2 + x - 2$
6. $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$
7. $f(x) = x^3 - 3x + 2$
8. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
9. $f(x) = (x^2 + x)(x - 2)$
10. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$
11. $y = x^2(x^2 - 1)$
12. $y = 2x^4 - x^3 - 16x - 3x + 18$

Uputa. Orijentiri za grafove polinoma su nultočke. Ako su racionalne, nultočke su međusobni omjeri djelitelja koeficijenta uz član najvećeg eksponenta i djelitelja slobodnog člana.

Racionalna funkcija omjer je dvaju polinoma. Funkcija nije definirana u nultočkama nazivnika.

Prikažite grafički slijedeće racionalne funkcije:

1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$
2. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
3. $y = \frac{x^2+8x+15}{x^2(x^2-9)}$

Linearna kombinacija Racionalnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ i realnih brojeva A i B je funkcija

$$h(x) = Af(x) + Bg(x).$$

Rastav na parcijalne razlomke je prikaz racionalne funkcije kao linearne kombinacije racionalnih funkcija čiji je nazivnik najviše polinom drugog stupnja.

Zadatak 5.3 *Rastavite na parcijalne racionalne funkcije funkciju:*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x}$$

Rešenje. Prvi korak je rastav nazivnika na proste faktore:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x+3)}.$$

Postupak je obratan svađanju na zajednički nazivnik:

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{x^2 + 2}{x(x+2)(x+3)}.$$

Nepoznati brojevi A, B, C i D dobivaju se nakon množenja posljednje jednakosti zajedničkim nazivnikom, pozivajući se na teorem o jednakosti polinoma:

$$A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+2) = x^2 + 2$$

iz čega izlazi sistem od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 6A + 3B + 2C &= 0 \\ 6A &= 2, \end{aligned}$$

čije rješenje je:$A = \frac{1}{3}$, $B = -3$ i $C = \frac{11}{3}$. Rastav je

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x} = \frac{1}{3}\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x+2} + \frac{11}{3}\frac{1}{x+3}.$$

Odredite slijedeće rastave racionalnih funkcija na parcijalne razlomke:

1. $\frac{2x+1}{x^3+x}$
2. $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
3. $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$.
4. $\frac{4}{(x^2-1)^2}$.
5. $\frac{1}{x^4-1}$.
6. $\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$.
7. $\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)}$.
8. $\frac{8}{x^4+4}$.

Rastave provjerite algebarskim zbrajanjem racionalnih funkcija na desnim stranama rastava.

Upute.

1. Rastav ide slično kao u zadatku:

$$\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

a treba uočiti da je stupanj brojnika za jedan manji od stupnja nazivnika.

2. Klasika:

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

3. Zbog dvostrukog prostog faktora $x-1$ u nazivniku:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Brojnik prve racionalne funkcije polinom je za jedan manji od polinoma koji se u nazivniku kvadrira.

4. Slučaj dva dvostruka prosta faktora:

$$\frac{4}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

5. Sjetiti se algebarskih izraza:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

6. Rastav

$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

7. Slučaj trostrukog prostog faktora x:

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

8. Konačno, vrlo složen rastav koji može malo tko pogoditi:

$$\frac{8}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

izlazi iz rješavanja jednadžbe

$$x^4+4=0$$

u polju kompleksnih brojeva.

Rješenja: Rastavi zadanih racionalnih funkcija u zadacima 1-8:

1. $\frac{1}{x} + \frac{2-x}{x^2+1}$

2. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}$
3. $\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}$
4. $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$
5. $-\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$
6. $\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}$
7. $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$
8. $\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}$

Funkcije opće potencije zadaju se formulom

$$f(x) = x^a,$$

gdje je $a \neq 1$ fiksan pozitivan realan broj. Definirane su za nenegativne brojeve. Funkcije obuhvaćaju različite korjene. Graf je dio parabole iz ishodišta.

Eksponencijalna funkcija je oblika

$$f(x) = a^x,$$

gdje je $a > 0, \quad a \neq 1$. Domenu funkcije čine svi realni brojevi, dok slici funkcije pripadaju samo pozitivni brojevi

$$\mathcal{R}(f) = < 0, +\infty > .$$

Ističe se **prirodna** eksponencijalna funkcija

$$f(x) = e^x.$$

Primjer 5.1 *Nacrtajte graf funkcije*

$$y = 2^x$$

uzimajući za istaknute vrijednosti argumenta $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Logaritamska funkcija inverz je eksponencijalne funkcije. Zadana je formulom

$$f(x) = \log_a x$$

i rješava jednadžbu

$$x = a^y$$

po y:

$$y = \log_a y.$$

Efektivno računanje džepnom računaljkom izvodi se pomoću (uglavnom) zaboravljenog srednjoškolskog identiteta:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a},$$

gdje su

- $\log x = \log_{10} x$: Briggsov logaritam po bazi 10, poznat iz logaritamskih tablica i
- $\ln x = \log_e x$: prirodni logaritam koji za bazu ima e

logaritmi koji imaju u računaljkama programe po kojima se računaju.

Primjer 5.2 *Nacrtajte graf funkcije*

$$y = \log_2 x$$

uzimajući istaknute vrijednosti iz domene: $\{1, 2, 4, 8, 16, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$

Trigonometrijske funkcije primjenjuju se u opisu periodičkih pojava. Tri su osnovne trigonometrijske funkcije čiji se programi nalaze u džepnim računalima.

Domene funkcija $y = \sin x$ i $y = \cos x$ su cjeli skupovi realnih brojeva, dok funkcija $y = tgx$ ima prekide:

$$D(tg) = \mathcal{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathcal{Z}\},$$

kao i funkcija $y = ctgx$:

$$\mathcal{D}(ctg) = \mathcal{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathcal{Z}\},$$

koja nema program računanja u računaljkama radi jednostavne kompozicije:

$$ctgx = \frac{1}{tgx}.$$

Ciklometrijske funkcije inverzi su posebno definiranih glavnih vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

Arkus-sinus inverz je bijektivne funkcije

$$Sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

i predstavlja preslikavanje:

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

definirano opisno:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y.$$

Graf funkcije konstruirajte na milimetarskom papiru uzimajući istaknute vrijednosti za argumente:

$$\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$$

Posljedica definicije je raspon kutova koji se na džepnoj računaljci mogu dobiti programom $\sin^{-1}$: od -90^o do 90^o. Vrijednosti kutova računajte u radijanima!!!

Arkus-kosinus inverz je bijektivne funkcije

$$Cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

i predstavlja preslikavanje

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

definirano opisno

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Graf funkcije konstruirajte na milimetarskom papiru uzimajući istaknute vrijednosti za argumente:

$$\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$$

i računajući vrijednosti funkcije u radijanima! Posljedica definicije je i raspon kutova od 0 do 180^o koji se može dobiti na džepnoj računaljci pritiskom na $Shift$ $\cos^{-1}$.

Arkus-tangens definiran je na cijelom $\mathcal{R}$, no ograničen je vrijednostima $-\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{2}$ koje su mu nedostižne. Inverz je bijektivne funkcije

$$Tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathcal{R}$$

koja pokazuje da polukružnica ima dvije točke više od cijelog pravca. Na milimetarskom papiru nacrtajte graf funkcije

$$y = arctgx$$

uzimajući za argumente:

$$\{-100, -10, -\sqrt{3}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}, 10, 100\}.$$

Džepnu računaljku prebacite obavezno na radijane.

Arkus-kotangens nema programa na računalu, jer je

$$arcctgx = \begin{cases} arctg\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ \pi + arctg\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

5.2 Domena, slika, parnost funkcije

Domena funkcije je skup X iz definicije pojma funkcije. Ograničavanje proučavanja funkcija na funkcije realne varijable, znači

$$X \subset \mathcal{R}.$$

Zadatak 5.4 *Odredite domenu funkcije*

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Rješenje. Dijeljenje nulom nije definirano, pa iz uvjeta

$$2x - 1 \neq 0$$

slijedi da je se u formulu mogu uvrštavati svi realni brojevi osim $\frac{1}{2}$. Domena funkcije zapisuje se skupovno:

$$D(f) = \mathcal{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} =< -\infty, 1/2 > \cup < 1/2, +\infty > .$$

Zadatak 5.5 *Odredite domenu definicije funkcije zadane formulom*

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x-1}.$$

Rješenje. Funkcija je definirana za $x - 1 \neq 0$ i za $1 + x > 0$ Domena je unija intervala:

$$\mathcal{D} =< -1, 1 > \cup < 1, \infty >$$

Zadatak 5.6 *Nađite domenu funkcije*

$$f(x) = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}.$$

Rješenje. Prvi pribrojnik definiran je u slučaju $1 - 2x \geq 0$, što povlači $1 \geq 2x$ i $x \leq \frac{1}{2}$. Drugi pribrojnik definiran je za

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & \frac{3x-1}{2} & \leq 1| \cdot 2 \\ -2 \leq & 3x-1 & \leq 2| + 1 \\ -1 \leq & 3x & \leq 3| : 3 \\ -\dfrac{1}{3} \leq & x & \leq 1. \end{array}$$

Domena funkcije je skup realnih brojeva koji su veći od $-\frac{1}{3}$ i manji od 1 i od $\frac{1}{2}$. Slijedi da je domena interval

$$D = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}].$$

Zadatak 5.7 *Odredite područje definicije funkcije*

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 1}$$

Rješenje. Nazivnik ne smije biti jednak nuli, pa je očito da mora biti $x \neq 0$.

Drugi korjeni mogu se vaditi samo iz nenegativnih brojeva:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

. Izraz pod korjenom može biti pozitivan, negativan ili nula. Prvo se izračunaju vrijednosti x za koje je

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ x_1 = 3, &\quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

Predznak trinoma $x^2 - 5x + 6$ analizira se pomoću nultočaka na brojevnom pravcu:

x	$-\infty$	$< -\infty, 2 >$	2	$< 2, 3 >$	3	$< 3, +\infty >$	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ako se na brojevni pravac nanesu nultočke 2 i 3, tada je skup realnih brojeva, koji je pravcem predočen, podijeljen na tri intervala:

$$(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

Neki od intervala sadrže rješenja nejednadžbe, a neki ne.

Testiranje intervala $(-\infty, 2)$ sastoji se u tome, da se jedna vrijednost unutar intervala, primjerice $x = -10$ uvrsti u nejednadžbu

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

Iz činjenice da tvrdnja

$$100 + 50 + 6 \geq 0.$$

vrijedi, zaključuje se da je nejednadžba

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

zadovoljena za svaki broj iz $(-\infty, 2)$.

Analogno, iz intervala $(2, 3)$ nasumice odabran broj 2.5 daje

$$6.25 - 12.5 + 6 \geq 0$$

kao neistinitu tvrdnju i zaključak da $(2, 3)$ nije dio domene.

Posljednji interval provjerava se testiranjem

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

za $x = 10$ koji se nalazi unutar intervala $(3, +\infty)$. Test

$$100 - 50 + 6 \geq 0$$

daje istinitu tvrdnju i rješenje nejednadžbe

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

u zapisu

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

Ako se uvaži zahtjev $x \neq 1$, dobiva se domena

$$\mathcal{D} = (-\infty, 1) \cup (1, 2] \cup [3, +\infty),$$

gdje obična zagrada uz granicu intervala znači da domena ne sadrži rubnu točku, dok uglata zagrada potvrđuje da rubna točka smije biti uvrštena u formulu funkcije.

Zadatak 5.8 *Nađite domenu funkcije*

$$y = \ln(1 + e^{-x}.$$

Rješenje. Prirodni logaritam računa se samo za pozitivne brojeve:

$$1 + e^x > 0$$

što je ispunjeno za svaki realan broj x, pa je

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}.$$

Zadatak 5.9 *Napišite domenu funkcije zadane formulom*

$$y = \arcsin(\ln x)$$

Rješenje. Prvi je uvjet $x > 0$ radi računanja logaritma.
Drugi je uvjet

$$-1 \leq \ln x \leq 1$$

zbog domene arkus sinusa. Budući je eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ monotono rastuća, vrijedi

$$e^{-1} \leq e^{\ln x} \leq e,$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{e} \leq x \leq e.$$

Domena funkcije tako je

$$D(f) = [\frac{1}{e}, e]$$

budući su svi brojevi iz intervala pozitivni.

Zadatak 5.10 *Nađite područje definicije funkcije*

$$y = \log[1 - \log(x^2 - 5x + 16)]$$

Rješenje. Prvi je uvjet:

$$x^2 - 5x + 16 \geq 0.$$

Realnih nultočaka

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5 - 64}}{2}$$

nema, pa ili svi brojevi zadovoljavaju nejednadžbu ili niti jedan. Provjera za $x = 0$ daje

$$0^2 - 5 \cdot 0 + 16 > 0$$

stoga nejednadžbu zadovoljava svaki realan broj.

Drugi uvjet je

$$1-\log(x^2-5x+16)>0$$

radi računanja logaritma. Rješavanje nejednadžbe

$$\begin{aligned}1-\log(x^2-5x+16) &> 0\\ \log(x^2-5x+16) &< 1\\ \log(x^2-5x+16) &< \log 10\end{aligned}$$

uz uvažavanje logaritma kao rastuće funkcije,

$$\begin{aligned}x^2-5x+16<10\\ x^2-5x+6<0\end{aligned}$$

svodi se na nalaženje nultočaka

$$\begin{gathered}x^2-5x+6=0\\ x_1=2,\quad x_2=3\end{gathered}$$

i testiranje intervala

$$(-\infty,2),(2,3),(3,\infty)$$

od kojih jedino točke

$$x\in(2,3)$$

zadovoljavaju nejednadžbu i to ujedno domena.

Zadatak 5.11 *Odrediti područje definicije funkcije*

$$y=-\frac{x}{4-x^2}+\ln(x^3-x).$$

Rješenje. Prvi pribrojnik definiran je za

$$x\neq\pm2.$$

drugi pribrojnik je definiran na rješenju nejednadžbe

$$x^3-x>0.$$

Rješavanje nejednadžbe svodi se na rješavanje jednadžbe

$$\begin{aligned}x^3-x&=0\\ x(x^2-1)&=0\\ x(x-1)(x+1)&=0\\ x_1=0,x_1=1,x_2&=-1\end{aligned}$$

i ispitivanje podobnosti intervala:

$$(-\infty,-1)\quad(-1,0)\quad(0,1)\quad(1,+\infty).$$

Konačno, uz uvažavanje uvjeta prvog pribrojnika, domena je

$$\mathcal{D}=(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$$

Zadatak 5.12 *Ispitajte domenu definiranosti funkcije*

$$y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$$

Rješenje. Drugi pribrojnik može se računati za

$$x \in [-4, 4].$$

Prvi pribrojnik definiran je za rješenja nejednadžbe

$$\begin{aligned} \sin(x-3) &> 0 \\ 0 + 2k\pi \leq x - 3 \leq \pi + 2k\pi | + 3, &\qquad k \in \mathcal{Z} \\ 3 + 2k\pi \leq x \leq 3 + \pi + 2k\pi, &\qquad k \in \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Beskonačno mnogo intervala realnih brojeva zadovoljava nejednadžbu, no samo za $k = 0$ interval

$$(3, 3+\pi)$$

i za $k = -1$ interval

$$(3 - 2\pi, 3 - \pi)$$

imaju zajedničkih elemenata sa segmentom

$$[-4, 4]$$

iz prvog zadatka.

Konačno rješenje je unija intervala:

$$x \in (3 - 2\pi, 3 - \pi) \cup (3, 4].$$

Zadatak 5.13 *Treba istražiti područje u kojem je definirana funkcija*

$$y = \sqrt{3 - \log_2(x-1)}.$$

Rješenje. Logaritam je definiran samo za pozitivne brojeve pa

$$x - 1 > 0$$

povlači prvi uvjet na varijablu x:

$$x \in (1, +\infty).$$

Drugi je zahtjev na računanje parnih korjena:

$$\begin{aligned} 3 - \log_2(x-1) &\geq 0 \\ \log_2(x-1) &\leq 3 \\ \log_2(x-1) &\leq \log_2 8 \\ x - 1 &\leq 8 \\ x &\leq 9. \end{aligned}$$

Oba uvjeta zadovoljavaju točke poluotvorenog intervala

$$(1, 9]$$

i to je područje na kojem je funkcija definirana.

Zadatak 5.14 *Istražite domenu*

$$y = x^{\frac{1}{x}} + arctg \ln(x^2+1).$$

Rješenje. Prvi pribrojnik je moguće računati kao

$$e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

i stoga je potrebno da x bude pozitivan broj.

Logaritam u drugom pribrojniku moguće je računati za svaki realan broj budući je

$$x^2+1>0, \qquad \forall x \in \mathcal{R}.$$

Arkus-tangens moguće je definirati na cijelom $\mathcal{R}$

Konačno

$$D(y) = (0, \infty).$$

Zadatak 5.15 *Odredite domenu funkcije*

$$y = \sqrt{\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4x+3}}.$$

Rješenje. Domena se, radi drugog korjena, podudara s rješenjem nejednadžbe:

$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4x+3} \geq 0.$$

Rješavanje se svodi na nalaženje nultočaka brojnika: $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$, a zatim i nazivnika:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}; \quad x_3 = 1, x_4 = 3.$$

Ispitivanjem intervala

$$(-\infty, -1) \quad (-1, 1) \quad (1, 3) \quad (3, +\infty)$$

dolazi se do domene:

- za $x = -2$

  $$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4x+3} < 0,$$

  pa interval $(-\infty, -1)$ nije u domeni

- za $x = 0$

  $$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4x+3} > 0$$

  i interval $[-1, 1)$ dio je domene, a vrijednost $x = 1$ isključena je radi nazivnika,

- za $x = 2$

$$\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4x+3} < 0$$

i interval otpada kao dio domene

Konačno

$$\mathcal{D} = [-1, 1).$$

Slika funkcije je skup vrijednosti koje funkcija može postići. Oznaka za kodomenu:

$$R(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$$

.

Zadatak 5.16 *Nađite sliku funkcija*

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
2. $f(x) = 2 + 3\sin x$

Rješenje.

1. Izlučivanjem potpunog kvadrata iz formule

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$$

dobiva se izraz u kojem se od uvijek pozitivne vrijednosti $(x-3)^2$ oduzima 4. Najmanja vrijednost funkcije može biti -4, dok najveća nije ograničena:

$$\mathcal{R}(f) = [-4, +\infty > .$$

2. Budući je

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

množenjem s tri i dodavanjem 2 svakoj strani složene nejednakosti dobiva se :

$$-1 \leq 2 + 3\sin x \leq 5$$

i konačno

$$R(f) = [-1, 5].$$

Periodička funkcija.

Funkcija $f(x)$ naziva se ***periodičkom*** , ako postoji pozitivni realni broj T zvani ***period*** funkcije, koji ima svojstvo da za svaki broj x iz domene vrijedi

$$f(x+T) = f(x).$$

Najmanji pozitivni realni broj τ s navedenim svojstvom naziva se ***temeljni period*** funkcije.

Trigonometrijske funkcije primjeri su periodičkih funkcija. Funkcije sin i cos imaju period $2k\pi, k \in \mathcal{Z}$, a tg i ctg imaju period $k\pi, k \in \mathcal{Z}$.

Zadatak 5.17 *Odredite osnovni period funkcija*

1. $f(x) = \cos 8x$
2. $f(x) = \sin x + tg4x$

Rješenje

1. Period T nalazi se po definiciji:

$$\begin{aligned} \cos 8(x+T) &= \cos 8x \\ 8(x+T) &= 8x + 2\pi \\ 8x + 8T &= 8x + 2\pi \\ T &= \frac{2\pi}{8} \end{aligned}$$

2. Temeljni period prvog pribrojnika je $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ a drugog $\frac{\pi}{4}$, pa je temeljni period funkcije najmanji zajednički višekratnik $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{4}$, što ispada π.

Parnost funkcije.

Funkcija $f(x)$ je **parna** ako ne mijenja vrijednost uvrštavanjem suprotnih brojeva:

$$f(-x) = f(x),$$

neparna je ako pri uvrštavanju suprotnih varijabli vrijednost funkcije mijenja predznak:

$$f(-x) = -f(x).$$

Većina funkcija nije **niti parna, niti neparna,** no svaku je funkciju moguće napisati kao zbroj parne i neparne funkcije:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Zadatak 5.18 *Ispitajte parnost i neparnost slijedećih funkcija:*

1. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + 2\sin x$
2. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

3. $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$

4. $f(x) = x^2 + 5x$

5. $f(x) = \log \frac{x+3}{x-3}$

Rješenje.

1. Uvrstiti $-x$ na mjesto x i koristiti se srednjoškolskim znanjem:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) \\ &= x^2 \cdot (-\sqrt[3]{x}) - 2\sin x \\ &= -x^2 \sqrt[3]{x} - 2\sin x \\ &= -(x^2 \sqrt[3]{x} + 2\sin x) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

   pa je funkcija neparna.

2. Ponovo se računa

$$f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^{x} = f(x)$$

   i funkcija je parna po definiciji.

3. Račun

$$f(-x) = |-x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2} = f(x)$$

   dokazuje da je funkcija parna.

4. U ovom slučaju

$$f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x,$$

   pa funkcija nije niti parna, jer je $f(x) \neq f(-x)$, a niti neparna: $f(x-) \neq f(x)$.

5. Koristeći srednjoškolsku matematiku:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log \frac{-x+3}{-x-3} = \log \frac{-(x-3)}{-(x+3)} \\ &= \log \frac{x-3}{x+3} = \log(\frac{x+3}{x-3})^{-1} \\ &= -\log \frac{x+3}{x-3} \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

   pokazuje se neparnost funkcije.

5.3 Uvodni zadaci o funkcijama

Zadaci su vezani uz osnovne pojmove o funkcijama i korisni su za prijelaz iz srednjoškolske elementarne matematike prema ciljevima više matematike. Ako naučite rješavati slijedeće zadatke, savladat ćete osnove algebre elementarnih funkcija.

1. Odredite domene slijedećim funkcijama:

   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$

   (b) $f(x) = \arccos(\frac{x}{2} - 1)$

   (c) $f(x) = \frac{1}{xe^2}$

   (d) $f(x) = \frac{x-2}{\cos 2x}$

   (e) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$

   (f) $f(x) = \log(3x - 1) + 2\log(x + 1)$

   (g) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$

   (h) $y = ctg \ln x$

   (i) $y = \sqrt{\ln \frac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4 - 3x - x^2}$

2. Odredite slike slijedećih funkcijskih preslikavanja:

   (a) $f(x) = |x| + 1$

   (b) $f(x) = \frac{5}{x}$

   (c) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

   (d) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$

   (e) $f(x) = 1 - 3\cos x$

   (f) $f(x) = 4^{-x^2}$

3. Ispitajte parnost i neparnost funkcija zadanih formulama:

   (a) $f(x) = x^4 \sin 7x$

   (b) $f(x) = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$

   (c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$

   (d) $f(x) = |x| + 2$

(e) $f(x) = |x+2|$

(f) $f(x) = \log \cos x$

(g) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$

4. Odredite temeljne perione funkcija zadanih formulama:

   (a) $f(x) = \sin 5x$

   (b) $f(x) = -2\cos(x/3) + 1$

   (c) $f(x) = \log \cos 2x$

   (d) $f(x) = tg3x + \cos 4x$

Rješenja uvodnih zadataka

1. Domene:

   (a) $[-2, 0) \cup (0, 2]$

   (b) $[0, 4]$

   (c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

   (d) $x \neq \frac{2k+1}{4}\pi, \quad k \in \mathcal{Z}$

   (e) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

   (f) $(1/3, \infty)$

   (g) $[0, 2]$

   (h) $x \neq e^{k\pi}, \quad k \in \mathcal{Z}$

   (i) $[-4, -2)$, jer $\ln \frac{x-4}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+2} \geq 1$ iz čega slijedi $\frac{x-4}{x+2} - 1 \geq 0$, a svođenjem na zajednički nazivnik $\frac{-6}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x + 2 < 0$, a zajedno s uvjetom drugog pribrojnika slijedi predloženo rješenje.

2. Slike:

   (a) $[1, +\infty)$

   (b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

   (c) $[-4, 4]$

   (d) $(-\infty, 3)$

   (e) $[-2, 4]$

   (f) $(0, 1]$

3. Parnost

   (a) neparna

(b) parna

(c) niti parna niti neparna

(d) parna

(e) niti parna niti neparna

(f) parna

(g) neparna

4. Temeljni periodi:

   (a) $\frac{2\pi}{5}$

   (b) 6π

   (c) π

   (d) π

5.4 Grafovi elementarnih funkcija

Graf funkcije $y = f(x)$ je skup uređenih parova

$$\Gamma = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$

Ako su uređeni parovi interpretirani kao koordinate točaka, dobiva se krivulja u koordinatnoj ravnini iz koje se zorno mogu uočiti osobine funkcije.

Parna funkcija ima graf simetričan u odnosu na os $0Y$. Primjeri su: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \cos x$.

Neparnoj funkciji graf je centralno simetričan preko ishodišta. Primjeri: $y = x^3$, $y = x^3 + x$, $y = x^3 - x$, $y = \sin x$, $y = tgx$.

Rastuća je ona funkcija za koju vrijedi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Iz grafa se vidi da je $y = e^x$ primjer rastuće funkcije. Rastuće su još $y = lnx$, $y = \frac{2}{3}x + 1$ i $y = \sqrt{x}$.

Padajuća je funkcija za koju vrijedi suprotna tvrdnja:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Primjer padajuće funkcije je $y = ctgx$, ali i $y = -\frac{2}{3}x + 2$, $y = e^{-x}$, $y = \frac{12}{x}$.

Ograničena je ona funkcija kojoj je slika

$$\{f(x), x \in \mathcal{D}\}$$

ograničen skup:

$$\exists m, M \in \mathcal{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f) m \leq f(x) \leq M.$$

Primjer ograničene funkcije je $y = \arcsin x$. Ograničene funkcije su i $y = \arccos x$, $y = arctgx$ i $y = arcctgx$.

Injekcija je epitet funkcije za koju vrijedi:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Primjer injektivne funkcije je funkcija zadana formulom $y = 2x + 1 + \cos x$. Graf injektivne funkcije ima osobinu da ga pravac paralelan s osi $0x$ siječe u najviše jednoj točki.

Surjekcija je ona funkcija kod koje se podudaraju slika i kodomena. Za takve funkcije

$$f : X \to Y$$

uobičajeno je govoriti da predstavljaju preslikavanja skupa X na skup Y. Primjer surjektivne funkcije je $y = \log x$. Funkcija $y = tgx$ također je surjektivna. Graf surjektivne funkcije uvijek ima presjek s pravcima paralelnima osi apscisa.

Bijekcija je funkcija koja ima svojstvo injektivnosti i surjektivnost. Bijekcija je funkcija

$$tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathcal{R}.$$

Bijekcije su moguće samo u slučaju da domena i kodomena imaju jednak broj elemenata.

5.5 Zadaci konstrukcije grafova

Konstrukcija grafova na početnoj razini oslanja se na predznanje iz srednje škole. Grafovi linearnih funkcija su pravci i njihovo crtanje spada u opću kulturu. Grafovi polinoma su parabole. Grafovi racionalnih funkcija su hiperbole. Crtaju se nalaženjem karakterističnih točaka: sjecišta s koordinatnim točkama, rubova domene...

Zadatak 5.19 *Konstruirajte graf funkcije*

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 3 \\ 0.1x^2, & x > 3 \end{cases}$$

Rješenje. Lijevo od $x = 3$ graf funkcije je pravac i točka $(3, -1)$ pripada pravcu. Desni dio grafa je dio parabole. Ova funkcija ima prekid prve vrste.

Sinusoida je krivulja koja opisuje pojave koje se periodički mijenjaju, a karakterističnog je valnog izgleda. Karakterizira je početak periode, završetak periode i sredina periode u kojima je vrijednost funkcije nula. Prva četvrtina periode poprima prvu vrijednost amplitude, a posljednja četvrtina drugu, suprotnu vrijednost periode. Uvriježeno je jednu vrijednost amplitude zvati brijegom, a drugu dolom vala. Jedan period obični ljudi nazivaju jednim valom.

Zadatak 5.20 *Konstruirajte graf funkcije*

$$y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3}).$$

Rješenje. Sinusoida ima amplitudu $A = 3$. Period sinusoide je

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Početak jedne od perioda sinusoide je rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned} 2x_0 - \frac{\pi}{3} &= 0 \\ x_0 &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Završetak periode tada je

$$x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$$

Sredina periode je

$$x_2 = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Prva amplituda dostiže se u točki

$$x_3 = \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{5\pi}{12}$$

i iznosi 3. Druga amplituda je u

$$x_3 = \frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}}{2} = \frac{11\pi}{12}$$

i iznosi -3. Ostaje nacrtati pravokutni koordinatni sustav u ravnini i istaknuti na ordinati točke $0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$, a na apscisi $0, \pi, 2\pi, -\pi$, vodeći računa da je $\pi \sim 3$. Zatim ucrtati točke

$$(\frac{\pi}{6}, 0); (\frac{2\pi}{3}, 0); (\frac{7\pi}{6}, 0); (\frac{5\pi}{12}, 3), (\frac{11\pi}{12}, -3)$$

i provući jednu periodu. Zatim nastaviti po potrebi na jednu, odnosno drugu stranu.

Crtanje grafova pretpostavlja i umjetničku crtu. Obzirom na točnost i pouzdanost, crteži se u matematici smatraju netočnim i nepouzdanim i služe samo kao izvor kvalitativnih informacija.

Svejedno, okušajte se u crtanju grafova u slijedećim zadacima. Danas grafove crtaju i bolje džepne računaljke. Doduše, točku po točku.

1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte redom grafove: $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = x^2 - 4$.

2. Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija: $y = x^3$, $y = (x-1)^3$, $y = x^3 + 2$, $y = |x^3|$

3. Odredite domenu i nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{2-x}{1+x}.$$

4. Kostruirajte grafove slijedećih funkcija:

   (a) $y = \frac{x^3 - x}{3}$ na zatvorenom intervalu $[-4, 4]$.
   (b) $y = x^2(2-x)^2$ na zatvorenom intervalu $[-3, 3]$.
   (c) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ na području definicije funkcije.
   (d) $y = 0.5x + 2^{-x}$ na zatvorenom intervalu $[0, 5]$.
   (e) $y = \frac{1}{x^2+4}$
   (f) $y = \frac{x^2+1}{x}$
   (g) $y = \sin(3x - \frac{\pi}{2}) + 1$
   (h) $y = -2\cos(2x+1)$
   (i) $y = \arcsin(x-2)$
   (j) $y = x + 1 + \sin(x-1)$
   (k) $y = \sin x + \cos x$

(l) $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$

(m) $y = \begin{cases} 4 - x, & x < -1 \\ 5 & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 5 & x > 0 \end{cases}$

5. Nacrtajte graf funkcije $y = \sin x$, graf funkcije $y = \sin 2x$ i graf $y = \sin \frac{1}{2}x$.

6. Koristeći se identitetom $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$, nacrtajte graf funkcije $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$

Slike rješenja bit će u slijedećem izdanju vježbi. Provjeru korektnosti grafa tražite na konzultacijama ili na vježbama.

5.6 Operacije s funkcijama. Kompozicija funkcija.

Funkcije jedne realne varijable zadane formulama $f(x)$ i $g(x)$ mogu se zbrajati:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

oduzimati:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

množiti

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

i dijeliti

$$((\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

Kompozicija funkcija $f(x)$ i $g(x)$ u oznaci

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

moguća je samo u slučaju da je slika funkcije $f(x)$ sadržana u domeni funkcije $g(x)$.

Identiteta je funkcija zadana formulom

$$i(x) = x$$

i ima svojstvo da je

$$i \circ f = f \circ i = f.$$

Inverzna funkcija funkcije $f(x)$ je funkcija u oznaci $f^{-1}(x)$ sa svojstvom

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i,$$

gdje je i identiteta. Samo bijekcije imaju inverzne funkcije. I inverzne funkcije su bijekcije.

Funkcije $y = lnx, \quad ln : (0, +\infty) \to \mathcal{R}$ i $y = e^x, \quad e^{()} : \mathcal{R} \to (0, +\infty)$ primjeri su inverznih funkcija.

Definiciji funkcije $\arcsin x$ prethodi definicija funkcije glavnih vrijednosti sinusa:

$$\begin{aligned} Sin &: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ Sin(x) &= \sin x, \end{aligned}$$

pa je

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Analogno se definiraju funkcije arccos, $arctg$ čije programe koristimo u računalima.

Zadatak 5.21 *Ako je $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $g(x) = -\pi x$, koliko je $f \circ g)(x)(-113)$?*

Rješenje. Uvrštavanjem u formulu za računanje

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-\pi \cdot (-113) = f(113\pi) = \cos \frac{113\pi}{2} = 0.$$

Zadatak 5.22 *Odredite kompozicije $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$ za funkcije*

1. $f(x) = 2x - 3, \quad g(x) = x + 3$
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \quad g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
3. $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 1$

Rješenje.

1.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) - 3 = 2x + 3 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x - 3) = 2x - 3 + 3 = 2x \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 2x - 9 \\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x + 3) = x + 3 + 3 = x + 6 \end{aligned}$$

2. analogno: $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{6}$, $(g \circ f)(x) = -\frac{1}{3}x - 1$, $(f \circ f)(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$, $(g \circ g)(x) = \frac{4}{9}x - \frac{25}{9}$.
3. $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$, $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$, $(f \circ f)(x) = 4x + 3$, $(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$.

Zadatak 5.23 *Za realne funkcije $f(x) = |x|$ i $g(x) = \log_2 x$ odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$. Nacrtajte grafove funkcija.*

Rješenje. Kompozicija $(f \circ g)(x) = |\log_2 x|$ ima graf funkcije $y = |\log_2 x|$ smješten u prvom kvadrantu. Nultočka je $(1, 0)$. Između y-osi i nultočke, funkcija pada po krivulji sličnoj grafu kvadratne funkcije, dok od nultočke raste po krivulji sličnoj grafu drugog korjena. U točki $(1, 0)$ ima "šiljak".

5.7 Dekompozicija funkcije. Inverz funkcije

Nakon ponavljanja osnovnih elementarnih funkcija, čitalac kroz niz zadataka stiče vrlo važnu vještinu razlučivanja formula složenih funkcija bitnih za savladavanje tehnike deriviranja složenih funkcija.

Zadatak 5.24 *Slijedeće funkcije napišite u obliku kompozicije niza elementarnih funkcija:*

1. $y = \log^2 x$
2. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x}$
3. $y = 5^{(3x+1)^2}$
4. $y = \ln(2x^2 - 3)$
5. $y = \ln\sqrt{2x - 1}$
6. $f(x) = \sin\ln\arccos(x^2 + 2)$

Rješenje.

1. $y = (f \circ g)(x)$, gdje su: $f(x) = x^2$, $g(x) = \log x$.
2. $y = (f \circ g \circ h)(x)$, gdje su: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = \sin x$.
3. $y = (f \circ g \circ h)(x)$, gdje su: $f(x) = 5^x$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = 3x + 1$
4. $y = (f \circ g)(x)$, gdje je $g(x) = 2x^2 - 3$ polinom, a $f(x) = \ln x$
5. $y = (f \circ g \circ h)(x)$, gdje je $h(x) = 2x - 1$ linearna funkcija, $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ opća potencija i $f(x) = \ln x$

6. $f(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x)$, gdje su $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \ln x$, $f_3(x) = \arccos x$ i $f_4(x) = x^2 + 2$

tražene **elementarne** funkcije koje se ne mogu više rastaviti na kompoziciju funkcija.

Zadatak 5.25 *Odredite formulu funkcije inverzne funkciji*

$$y = \frac{x-2}{x+1}$$

Rješenje. Algebarskim metodama transformira se jednakost tako da na jednoj strani ostane sam x. Množenjem jednakost nazivnikom $x + 1$ dobiva se:

$$y(x+1) = y - 2.$$

Množenje zagrade i prebacivanje pribrojnika koji sadrže x na desnu stranu daju novu jednakost:

$$xy - x = -2 - y.$$

Izlučivanje x:

$$x(y-1) = -y - 2$$

i dijeljenje s $y - 1$:

$$x = \frac{-y-2}{y-1} = \frac{-(y+2)}{-(1-y)}$$

daju formulu inverzne funkcije koja se obično zapisuje kao:

$$y^{-1} = \frac{x+2}{1-x},$$

radi isticanja da se radi o inverznoj funkciji.

Zadatak 5.26 *Napišite formulu inverzne funkcije i odredite domenu inverzne funkcije za funkciju zadanu formulom:*

$$y = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2$$

Rješenje. Algebarskim metodama doći do eksplicitne formule za x:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2| \cdot (e^x + e^{-x}) \\
(e^x + e^{-x}) &= e^x - 2e^{-x} + 2e^x + 2e^{-x} \\
e^{-x} \cdot y &= e^x(3-y) \\
\ln(e^{-x} \cdot y) &= \ln(e^x(3-y)) \\
-x + \ln y &= x + \ln(3-y) \\
\ln y - \ln(3-y) &= 2x \\
x &= \frac{1}{2} \ln \frac{y}{3-y}
\end{aligned}$$

$$y^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{3-x}$$

Domena inverzne funkcije podudara se s rješenjem nejednadžbe

$$\frac{x}{3-x} > 0$$

i zapisuje se kao

$$\mathcal{D} = (0, 3).$$

Zadatak 5.27 *Odredite inverz funkcije*

$$y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1.$$

Rješenje. Analogno prethodnom:

$$\begin{aligned}
y - 1 &= 2\sin(3x - \frac{\pi}{3})| : 2 \\
\frac{y-1}{2} &= \sin(3x - \frac{\pi}{3})| \arcsin \\
\arcsin\frac{y-1}{2} &= 3x - \frac{\pi}{3} \\
\arcsin\frac{y-1}{2} + \frac{\pi}{3} &= 3x| : 3 \\
y^{-1} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{9} &
\end{aligned}$$

Zadatak 5.28 *Napišite formulu inverzne funkcije za*

$$y = \frac{e^{\cos x} - 1}{2 + e\cos x}$$

Rješenje. Množenje formule nazivnikom daje

$$\begin{aligned}
(2 + e\cos x)y &= e^{\cos x} - 1 \\
ye^{\cos x} - e^{\cos x} &= -1 - 2y \\
e^{\cos x}(y - 1) &= -1 - 2y| : (1 - y) \\
e^{\cos x} &= \frac{1+2y}{1-y}|ln \\
\cos x &= \ln\frac{1+2y}{1-y}| \arccos \\
x &= \arccos\ln\frac{1+2y}{1-y} \\
y^{-1} = \arccos\ln\frac{1+2y}{1-y} &
\end{aligned}$$

Implicitno zadana funkcija $y = y(x)$ je formula u dvije varijable

$$F(x, y) = 0.$$

Uz određenje uvjete nedegeneracije moguće je iz formule implicitno zadane funkcije izraziti eksplicitno funkciju

$$y = f(x).$$

Zadatak 5.29 *Funkciju*

$$2\sin(y-1) + 2x - 1 = 0, \quad y = y(x)$$

napišite u eksplicitnom obliku i odredite joj područje definicije.

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2\sin(y-1) &= 1 - 2x | : 2 \\ \sin(y-1) &= \frac{1-2x}{2} | \arcsin \\ y - 1 &= \arcsin\frac{1-2x}{2} \\ y &= \arcsin\frac{1-2x}{2} + 1 \end{aligned}$$

Područje definicije rješenje je sistema nejednadžbi

$$\begin{aligned} -1 \le \frac{1-2x}{2} &\le 1 | \cdot 2 \\ -2 \le 1 - 2x &\le 2 | - 1 \\ -3 \le -2x &\le 1 | : (-2) \\ \frac{3}{2} \ge x &\ge -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

koji daje

$$\mathcal{D} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}].$$

Zadatak 5.30 *Napišite inverznu funkciju y^{-1} za funkciju implicitno zadanu formulom:*

$$y^3 - 2 + \log_3(x-1) = 0$$

Rješenje. Algebarski se nastoji eksplicitno izraziti x. Koristi se inverzibilnost $x = 3^{\log_3 x}$:

$$\begin{aligned} \log_3(x-1) &= 2 - y^3 | 3^{()} \\ x - 1 &= 3^{2-y^3} \\ x &= 1 + 3^{2-y^3} \end{aligned}$$

$$y^{-1} = 1 + 3^{2-x^3}$$

Zadatak 5.31 *Napišite eksplicitni oblik inverzne funkcije y^{-1} funkcije $y = y(x)$ zadane implicitno:*

$$y^2 + \sin^3 x - 2y + 5 = 0.$$

Odredite domenu inverzne funkcije.

Rješenje. Eksplicitni izraz za x dobiva se algebarskim zahvatima:

$$\sin^3 x = -y^2 + 2y - 5 | \sqrt[3]{}$$

$$x = \arcsin \sqrt[3]{-y^2 + 2y - 5}$$

Domena se dobiva rješavanjem sistema nejednadžbi

$$-1 \leq -y^2 + 2y - 5 \leq 1.$$

Desna nejednadžba daje

$$0 \leq -y^2 + 2y - 4$$

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{-2},$$

nepostojanje realnih nultočaka, što znači da je izraz

$$-y^2 + 2y - 4$$

negativan za svaki $y \in \mathcal{R}$. Domena je prazan skup i funkcija, iako ima algebarski zapis, nije definirana.

Uostalom, jednadžba

$$y^2 + \sin^3 x - 2y + 5 = 0$$

nije rješiva po y:

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(5 + \sin^3 x)}}{2}$$

nema realne korjene ni za jedan $x \in \mathcal{R}$.

6 Limesi

Poglavlje uvodi prvi pojam matematičke analize. Nizovi služe za ispitivanje ponašanja formula u nedefiniranim situacijama.

Primjer 6.1 *Ispitati dijeljenje nulom.*

Konstruira se niz varijabli

$$1, 0.1, 0.01, \ldots 10^{-n} \ldots$$

koje uvrštavanjem u formulu $f(x) = \frac{1}{x}$ generiraju niz

$$1, 10, 100, \ldots 10^{n} \ldots$$

Prirodno je reći da niz varijabli teži k nuli, dok niz vrijednost funkcija teži beskonačnost. Zapis rezultata analize:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Pedantnosti radi, ispravno bi analizu trebalo napisati kao

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

radi razlike u odnosu na niz varijabli

$$-1, -0.1 \ldots$$

koji također teži k nuli, no niz vrijednost funkcija

$$-1, -10, -100 \ldots$$

teži u minus beskonačnost:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

6.1 Limes niza

Niz realnih brojeva je takvo nabrajanje brojeva kod kojeg postoji algoritam za dobivanje člana u nizu ovisno o rednom broju na kojem se taj član nalazi. Postoji funkcija

$$a : N \to R$$

u oznaci

$$a(n) = a_n.$$

Limes niza , ako postoji, je broj a koji ima svojstvo

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in N, \qquad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon.$$

Oznaka:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Niz koji ima limes naziva se **konvergentnim**. Limes nazivamo graničnom vrijednosti niza.

Divergentni nizovi imaju beskonačan limes, što obilježavamo

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty,$$

ili se limes ne može odrediti, kao primjerice

$$\lim_{n\to\infty} \sin n.$$

Svojstva limesa vrlo su prirodna:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty}}{\lim_{n\to\infty}}$

Neki osnovni limesi:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad |a| < 1$

3. $\lim_{n\to\infty} |a|^n = \infty$

4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$

6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

7. $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

8. $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

Neodređeni oblici:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}.$$

Zadaci određivanja graničnih vrijednosti nizova.

1. Odredite limes niza čiji je opći član

$$a_n = \frac{n+1}{2n}$$

Rješenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2},$$

jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. Izračunajte limes niza zadanog općim članom

$$a_n = (\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7})^3.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7})^3 &= (\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7} : \frac{n}{n})^3 \\
&= (\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}})^3 \\
&= (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}
\end{aligned}$$

3. Izračunajte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3-1}}{\sqrt{2n^2-1}} =$$

Rješenje.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3-1}}{\sqrt{2n^2-1}} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2-\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$$

4. Nađite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$$

Rješenje:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n} = 1.$$

5. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} 8^{\frac{2n+1}{3n-2}}$$

Rješenje:

$$8^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$$

6. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n-2}{n})^n$$

Rješenje.

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{2}{n})^n = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{\frac{n}{-2}})^n = \left(\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{\frac{n}{-2}})^{\frac{n}{-2}}\right)^{-2} = e^{-2}.$$

7. Riješite:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2n+3}{2n})^n$$

Rješenje:

$$= \lim_{n\to\infty} (1+\frac{3}{2n})^n = e^{\frac{3}{2}}$$

8. Utvrdite

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}) =$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2-n}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{\sqrt{n^2+5n+1} + \sqrt{n^2-n}} : \frac{n}{n} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

9. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{2n+\sin n}.$$

Rješenje: koristiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

radi ograničenosti funkcije $\sin x$ i dijeliti brojnik i nazivnik s n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{2n+\sin n} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\sin n}{n}}{2+\frac{\sin n}{n}} = \frac{1}{2}.$$

10. Doznajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n}.$$

Rješenje. Dijeliti najvećom potencijom:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n} : \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n+(\frac{2}{3})^n+(\frac{5}{6})^n}{(\frac{1}{3})^n+1} = 0.$$

6.2 Limes funkcije

Primjer 6.2 *Odrediti domenu funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Konstruirajte niz varijabli x_n, sa svojstvom*

$$\lim_{x\to\infty} x_n = 0.$$

Pretpostavite

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Rješenje. Računati vrijednosti sinusa za kutove u radijanima:

x_n	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\frac{\sin x_n}{x_n}$	0,998334	0,9999833	0,9999998	0,9999999

Pretpostavka:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Zbog parnosti funkcije:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = f(x),$$

slijedi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Konačno, može se pisati

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Limes funkcije $f(x)$ kada x teži broju c je A u zapisu

$$\lim_{x\to c}=A$$

ako

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0: \quad |x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\epsilon.$$

Beskonačan limes funkcije:

Primjer 6.3 *Funkcija*

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

ima limese

$\lim_{x\to 0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to 0^+}=+\infty$

Funkcija $f(x)$ ima limes u točki c ako je

$$\lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^+}f(x).$$

Svojstva limesa funkcije:

1. $\lim_{x\to c}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to c}f_1(x)+\lim_{x\to c}f_2(x)$
2. $\lim_{x\to c}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim_{x\to c}f_1(x)\cdot\lim_{x\to c}f_2(x)$
3. $\lim_{x\to c}[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}]=\frac{\lim_{x\to c}f_1(x)}{\lim_{x\to c}f_2(x)}$.

Neodređeni oblici:

$$\frac{0}{0},\quad\frac{\infty}{\infty},\quad\infty-\infty,1^\infty.$$

Određeni oblici:

$$\frac{A}{0}\to\infty,\quad\frac{A}{\infty}\to 0,\quad\frac{\infty}{0}\to\infty\ldots$$

Zadatak 6.1 *Odredite eksperimentalno*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Rješenje. Promatranjem nizova varijabli i pripadnih vrijednosti funkcije

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}:$$

x_n	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x_n)$	0,953101	0,995033	0,999500	0,999950

odnosno

x_n	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x_n)$	1,053605	1,005034	1,000500	1,000050

opravdano je pretpostaviti da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

jer je

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Zadatak 6.2 *Odredite konvergentnim nizovima*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Rješenje. Ispitivanja nizova varijabli i vrijednosti funkcija

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$$

daju primjerice:

x_n	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x_n)$	1,051709	1,005017	1,000500	1,000050

odnosno

x_n	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x_n)$	0,951626	0,995017	0,999500	0,999950

iz čega se zaključuje da funkcija ima limes i da vrijedi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Zadatak 6.3 *Izračunajte*
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. U poglavlju o realnim brojevima istraženo je

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \sim 1.271828.$$

Transformacijom izraza dobiva se

$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}},$$

koji supstitucijom

$$\frac{1}{x}\to t$$

prelazi u

$$\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e.$$

Zadatak 6.4 *Izračunajte*
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}.$$

Rješenje. U rješavanju zadataka koriste se svojstva limesa funkcija i eksperimentalno dobiveni limesi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x\ln a}-1)\ln a}{x\ln a} = /x\ln a = t/\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\ln a = \ln a\cdot 1\end{aligned}$$

Zadatak 6.5 *Izračunajte limes funkcije*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4}{x^2+2x+2}$$

Rješenje. Analiza limesa funkcije počinje uvrštavanjem vrijednosti kojoj teži varijabla x:

$$\lim_{x\to 4}\frac{9+4}{9+6+2}.$$

Ako je oblik funkcije unutar limesa određen, analizi je kraj:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+4}{x^2+2x+2} = \frac{13}{17}.$$

Zadatak 6.6 *Analizirajte*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x}.$$

Rješenje. Uvrštavanjem $x = 1$ u formulu funkcije čiji limes treba naći, dobiva se:

$$\frac{1}{-0},$$

jer je $1 - x < 0$ za $x > 1$. Limes se može odrediti. Korektna analiza izgleda:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x} = \frac{\lim_{x\to 1^+} x}{\lim_{x\to 1^+} 1-x} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

U računanju se obično drugi korak preskače ako je iz konteksta jasno o čemu se radi.

Zadatak 6.7 *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

Rješenje. Uvrštavanjem sve većih i većih brojeva u brojnik i nazivnik, dobivaju se i u brojniku i u nazivniku sve veći i veći brojevi, pa je oblik limesa neodređen:

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x, dobiva se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Zadatak 6.8 *Nađite*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

Rješenje. Uvrštavanjem se dobiva neodređeni oblik

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Množeći brojnik i nazivnik izrazom $\sqrt{x} + \sqrt{a}$ iracionalnost će se prebaciti iz brojnika u nazivnik:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} &= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

Zadatak 6.9 *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

Rješenje. Koristeći limes dobiven eksperimentalno i supstituciju:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{2}{2} &= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \\
& /t = 2x/ \\
&= 2 \lim t \to 0 \frac{\sin t}{t} = 2
\end{aligned}$$

Zadatak 6.10 *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Rješenje. Zadani limes ima oblik

$$\frac{A}{\infty},$$

gdje A poprima vrijednost

$$-1 \leq A \leq 1,$$

limes ima odredljivi oblik i jednak je nuli, jer se ograničene vrijednosti dijele sve većim i većim vrijednostima.

Zadatak 6.11 *Dokučite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}.$$

Rješenje. Dosjetka se sastoji u proširivanju brojnika i nazivnika:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} \cdot \frac{\frac{5}{5x}}{\frac{2}{2x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{5}{2} \\
&= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 6.12 *Iznađite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Rješenje. U svakom boljem matematičkom priručniku postoji identitet

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Lukavom transformacijom formule pod limesom dobiva se

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}\\
&= \frac{2}{4}\cdot(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2\\
&= \frac{1}{2}\cdot(1)^2=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 6.13 *Riješite*

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x})^{x+1}.$$

Rješenje. Analizira se baza u nadi da će dobiveni oblik biti određen:

$$(\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3))^{\lim_{x\to 0}1+x} \quad = \quad (3\cdot 1)^1=3$$

Zadatak 6.14 *Odredite limes funkcije:*

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{2x+1})^{x^2}.$$

Rješenje. Analogno prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned}
(\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(2+\frac{1}{x})})^{\lim_{x\to\infty}x^2} &= (\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}})^\infty\\
&= (\frac{1}{2})^\infty=0
\end{aligned}$$

Zadatak 6.15 *Za proizvoljnu realnu vrijednost konstante $c\neq 0$, dokažite*

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{c}{x})^x=e^c.$$

Rješenje. Trik je u jednostavnoj algebarskoj preobrazbi:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{c}})^x &= \lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{\frac{x}{c}})^{\frac{x}{c}})^c\\
&= (\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{x}{c}})^{\frac{x}{c}})^c\\
&= /supstitucija \quad \frac{x}{c}=t/\\
&= (\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t)^c=e^c
\end{aligned}$$

Supstitucija je korektna jer je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{c}=\lim_{t\to\infty}t=\infty.$$

Zadatak 6.16 *Izračunajte*

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x$$

Rješenje. Dijeljenjem brojnika i nazivnika unutar zagrade s x, dobiva se:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}})^x &= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})^x}{(1+\frac{1}{x})^x} = \\ &= \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}\end{aligned}$$

Zadatak 6.17 *Odredite*

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+3})^{x+2}$$

Rješenje. Početna analiza daje neodređenost tipa

$$1^\infty.$$

Nizom algebarskih transformacijama navodimo na oblik iz jednog od prethodnih zadataka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3-4}{x+3})^{x+2} &= \lim_{x\to\infty}(1-\frac{4}{x+3})^{x+2} \\ &= \lim_{x+3\to\infty}((1+\frac{-4}{x+3})^{x+3})^{\frac{x+2}{x+3}} \\ &= (e^{-4})^{\lim x\to\infty\frac{x+2}{x+3}} = (e^{-4})^1 = e^{-4}\end{aligned}$$

Zadatak 6.18 *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Rješenje. Pozivajući se na zadatak 5.33 koji je rezultirao

$$lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

rješava se analogno prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}} &= (\lim_{\sin x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}})^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} \\ &= e^1 = e\end{aligned}$$

Zadatak 6.19 *Odredite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^3}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot(\frac{x}{2})^2}\\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{2}
\end{aligned}$$

Jednostrani limesi računaju se kad način konvergencije niza varijabli x_n daje različite rezultate, pa je potrebno posebno naznačiti način konvergencije. Jednostranim limesima ispituje se ponašanje funkcija na rubovima domene

Zadatak 6.20 *Ispitajte limese:*

1.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Rješenje. U oba slučaja valja podijeliti brojnik i nazivnik i pritom imati na umu da za **negativne** vrijednosti varijable x vrijedi:

$$x=-\sqrt{x^2}.$$

1. Nakon dijeljenja:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

2. Analogno, no ovaj put je $x=\sqrt{x^2}$:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

Zadatak 6.21 *Ispitajte funkciju*

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

u točki prekida, odnosno ispitajte:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

i

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

Rješenje. Postepena analiza daje:

$$\frac{1}{1+e^{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

dok u drugom slučaju:

$$\frac{1}{1+e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Kaže se da funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

ima u nuli **prekid prve vrste**.

Zadatak 6.22 *Ispitajte ponašanje funkcije u točki $x = 2$. Odredite*

a)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2}$$

b)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$$

Rješenje.

a) Neposredna analiza:

$$\lim x \to 2^- \frac{x}{x-2} = \frac{2}{-0} = -\infty,$$

gdje

$$\frac{2}{-0}$$

predstavlja niz

$$\frac{2}{-0.1}, \frac{2}{-0.01}, \frac{2}{-0.001}, \ldots$$

sve negativnijih brojeva u što se možete i sami uvjeriti.

b) Slično je

$$\lim x \to 2^+ \frac{x}{x-2} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

6.3 Zadaci za samostalno računanje graničnih vrijednosti

Zadaci su provjera razumijevanja graničnih vrijednosti nizova i funkcija. Zadatke pokušajte riješiti samostalno. Ako ne ide, ponovo proučite riješenje zadatke. Ako treba, naučite napamet zadatke koji su riješeni.

1. Zadan je niz:
$$3, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{11}{5}, \ldots ..$$
Nastavite niz s bar tri nova člana. Odredite opći član niza i 1000. član niza. Odredite limes niza.

2. Nastavite niz
$$\frac{7}{3}, \quad \frac{10}{5}, \quad \frac{13}{7}, \ldots$$
Odredite formulu za dobivanje općeg člana niza i graničnu vrijednost niza.

3. Odredite graničnu vrijednost niza
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{9}{4}, \ldots, \quad \frac{4n-3}{n+1} \ldots$$

4. Ispitajte konvergenciju niza
$$1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \ldots$$

5. Nađite
$$\lim_{x \to 4} \frac{5x+2}{2x+3}.$$

6. Odredite
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{2x+7}.$$

7. Izračunajte
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}.$$

8. Ispitajte
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}.$$
9. Pokušajte odrediti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$$
supstitucijom $1+x=y^5$.
10. Nađite
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}.$$
Koristite se trigonometrijskim identitetima.
11. Riješite
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}.$$
12. Nađite
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}.$$
13. Otkrijte
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}).$$
14. Istražite
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^x.$$
15. Ispitajte limese s lijeva i s desna funkcije
$$f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$$
u točki $x=3$.
16. Odredite limese s lijeva i s desna funkcije
$$f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$$
za $x=a$.

Rješenja.

1. $\frac{13}{6}, \quad \frac{15}{7}, \quad \frac{17}{8}, \ldots, a_n = \frac{2n+1}{2}$, $a_{1000} = \frac{2001}{1000}$, $\lim = 2$.
2. $\frac{16}{9}, \quad \frac{19}{11}, \ldots, \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2n+1} = 3/2$
3. Nakon uvrštavanja dobiva se $\frac{22}{11} = 2$.
4. Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x i analize dobiva se $3/2$.
5. Rastavom na proste faktore brojnika i nazivnika, skraćivanjem se ukida neodređenost: $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = 2$.
6. Rastaviti brojnik i nazivnik izlučivanjem x iz prva dva pribrojnika i $x-1$ nakon toga. Skraćivanjem se dobiva granična vrijednost 0.
7. Nakon supstitucije $\lim x \to 1 \frac{y^3-1}{y^5-1} = \lim y \to 1 \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)} = \frac{3}{5}$.
8. Koristiti identitet $\sin^2 \frac{5x}{2} = \frac{1-\cos 5x}{2}$ i računati: $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} (\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x})^2 = 2 \cdot (\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$.
9. Ovdje je neodređenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$ koja se uklanja dijeljenjem brojnika i nazivnika najvećom potencijom x^3:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$
10. Dijeljenje brojnika i nazivnika s x^4 povlače
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{x^4}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x8}}} = \frac{3}{1} = 3.$$
11. U ovom zadatku neodređenost oblika $\infty - \infty$ uklanja se množenjem i dijeljenjem izraza izrazom $(\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3})$, nakon čega se dobiva:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}}$$
i dijeljenjem brojnika i nazivnika s x, limes je jednak 2.
12. Dijeljenjem brojnika i nazivnika unutar zagrade:
$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-3x+7} + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} = 1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7}$$
i transformacijom u granicama dopustivog:
$$\lim_{x\to\infty} [(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7})^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}$$
prelazi u
$$e^{\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^8.$$
13. Kada $x \to 3^-$, tada $\frac{1}{x-3} \to -\infty$ i $2^{\frac{1}{x-3}} \to 0$, pa je $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{1}{3}$. U drugu ruku, $x \to 3^+$, onda $\frac{1}{x-3} \to +\infty$, $2^{\frac{1}{x-3}} \to \infty$, pa je $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$.
14. Analogno, $\lim_{x\to a^-} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

6.4 Mješoviti zadaci o funkcijama

Slijedeći zadaci poredani su sistemom slučajnog odabira. Zadatke koje ne znate riješiti, preskočite. Ako Vam se riješenje ne podudara s ponuđenim, pošaljite zadatak na E-mail. ivankovb@fpz.hr. Zadaci u kojima je potrebno dokazati tvrdnju nemaju rješenja. Zadaci u kojima treba nacrtati nemaju sliku rješenja, već samo njen opis.

1. Odredite domenu racionalne funkcije
$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2(x^2 - 9)},$$
ispitajte ponašanje u rubnim točkama domene i rastavite funkciju na parcijalne razlomke.

2. Neka je $f(x) = tgx$, $g(x) = ctgx$, $h(x) = \sin x$ i $h(x) = \cos x$. Dokažite da je
$$f(x) + g(x) = \frac{1}{h(x) \cdot k(x)}.$$

3. Odredite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ g)(x)$, ako je
$$f(x) = \frac{2 - x}{3x - 1}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{2x - 1}.$$

4. Ako je
$$f(x) = \log \frac{1 + x}{1 - x}, \quad g(x) = \frac{2x + x^3}{3x^2 + 1},$$
dokažite da je
$$(f \circ g)(x) = 3 \cdot f(x).$$

5. Neka su $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3$ i $h(x) = \frac{1}{x}$. Uvjerite se da je kompozicija funkcija asocijativna operacija.

6. Za slijedeće funkcije odredite elementarne funkcije $f(x)$ i $g(x)$ koje čine njihovu kompoziciju $(f \circ g)(x)$. Nadalje, odredite domenu i nacrtajte grafove funkcija $y = (f \circ g)(x)$.
   (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   (b) $(f \circ g)(x) = \sin 2x$

(c) $(f \circ g)(x) = \arcsin \frac{1+x}{x-3}$

(d) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$

(e) $(f \circ g)(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

(f) $(f \circ g)(x) = \ln \frac{2x+1}{3x^2-x+1}$

Upute i rješenja:

1. Domena: $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$. Nadalje: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim x \to 3^+ f(x) = +\infty$, $\lim x \to 3^- f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to -3} f(x) = -1/27$. Nultočka funkcije je $(-5, 0)$. Funkcija se može neprekidno dodefinirati: $f(-3) = -1/27$. Rastav na parcijalne razlomke: $-\frac{8}{9x} - \frac{5}{3x^2} + \frac{8}{9(x-3)}$

2. Tvrdnja je točna.

3. Tražene kompozicije: $(f \circ g)(x) = \frac{3x-3}{x+4}$, $(g \circ f)(x) = \frac{2x-1}{5-5x}$.

4. Jednakost vrijedi.

5. Asocijativnost je svojstvo poznato iz množenja realnih brojeva:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

   Tako treba provjeriti da vrijedi

$$\begin{aligned}
((f \circ g) \circ h) &= (f \circ (g \circ h))(x) \\
(f \circ g)(\frac{1}{x}) &= f((g \circ h)(x)) \\
f(g(\frac{1}{x})) &= f(g(\frac{1}{x})) \\
f(\frac{1}{x^3}) &= f(\frac{1}{x^3}) \\
\frac{2}{x^3} + 1 &= \frac{2}{x^3} + 1
\end{aligned}$$

6. Rješena redom:

   (a) Funkcije sastavnice su polinom $g(x) = -x^2 + 1$ i funkcija drugog korjena: $f(x) = \sqrt{x}$. Domena: $\mathcal{D} = [-1, 1]$. Graf je gornja polukružnica sa centrom u ishodištu radijusa 1 s točkama $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

   (b) Funkcija je složena od $g(x) = 2x$ i $f(x) = \sin x$. Domena je $\mathcal{R}$, a graf je sinusoida amplitude 1, perioda π i nultočkama u $\{\pm\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathcal{Z}\}$.

   (c) Radi se o slaganju racionalne funkcije $g(x) = \frac{1+x}{x-3}$ i ciklometrijske funkcije $f(x) = \arcsin x$. Domena je rješenje sistema

$$-1 \le \frac{1+x}{x-3} \le 1$$

uz obavezno isključenje: $x \neq 3$. Rješavanje lijeve nejednadžbe:

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \frac{1+x}{x-3} \\
0 &\leq 1 + \frac{1+x}{x-3} \\
0 &\leq \frac{x-3+1+x}{x-3} \\
0 &\leq \frac{2x-2}{x-3}
\end{aligned}$$

daje ograničenje: $x \in (-\infty, 1] \cup (3, +\infty)$. Analogno, desna nejednadžba:

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{x-3} - 1 &\leq 0 \\
\frac{4}{x-3} &\leq 0
\end{aligned}$$

daje $x \in (-\infty, 3)$. Zajedno, domena je $(-\infty, 1]$ O grafu se zna da je jedina nultočka $(-1, 0)$. Točka $(1, -\frac{\pi}{2})$ rubna je točka grafa s desna. Iz $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Ispitivanja se mogu opisati krivuljom koja sdesna počinje u $(1, -\frac{\pi}{2})$, os $0y$ siječe u $\arcsin \frac{1}{3} = -0.34$, os $0x$ u točki -1 i priljubljuje se pravcu $y = \frac{\pi}{2}$ za $x \to -\infty$.

(d) Funkcija se može promatrati kao kompozicija polinoma $g(x) = x^2 + x + 2$ i racionalne funkcije $g(x) = \frac{1}{x}$. Domena je $\mathcal{R}$. Za $x \to \pm\infty$ vrijednosti kompozicije teže k nuli. Svođenjem nazivnika na potpun kvadrat:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

dobiva se informacija da su vrijednosti kompozicije pozitivni brojevi i da se najveća vrijednost dobiva za $x = -\frac{1}{2}$ u iznosu $\frac{4}{7}$. Graf je zvonolika krivulja iznad osi x, s maksimumom u $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$, koja os y siječe u točki s ordinatom $\frac{1}{2}$. Graf je bez šiljaka.

(e) Slaganjem racionalne $g(x) = \frac{1}{1-x}$ i eksponencijalne $f(x) = e^x$ funkcije dobiva se funkcija definirana na cijelom $\mathcal{R}$ izuzem $x = 1$. Ispitivanjem jednostranih limesa dobiva se $\lim_{x\to 1^+}(f \circ g)(x) = 0$ i $\lim_{x\to 1^-}(f \circ g)(x) = +\infty$ dobiva se prekid druge vrste, jer je limes s jedne strane konačan, dok s druge strane nije. Ispitivanjem se dobiva da je $\lim_{x\to\pm\infty}(f \circ g)(x) = 1$, što znači da se krivulja grafa s desne i s lijeve strane priljubljuje pravcu $y = 1$. Os y graf siječe u točki $(0, 1)$. Krivulja grafa crta se slijeva i počinje uz pravac $y = 1$, pa se kroz točku $(0, 1)$ penje prema vertikali $x = 1$ uz koju se priljubljuje. Desna strana počinje u $(1, 0)$ i kao parabola se priljubljuje pravcu $y = 1$.

(f) Funkcija je nastala slaganjem racionalne funkcije $g(x) = \frac{2x+1}{3x^2-x+1}$ i prirodnog logaritma $f(x) = \ln x$. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\frac{2x+1}{3x^2-x+1} > 0| \quad \cdot (3x^2 - x + 1) > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

Nultočka se traži jednadžbom

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3x^2-x+1} = 1| \quad & \cdot (3x^2-x+1) \\ & 3x^2-3x = 0 \\ & 3x(x-1) = 0 \\ & x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

koja daje dvije nultočke. Ispitivanje:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \ln \frac{2x+1}{3x^2-x+1} = \ln 0 = -\infty,$$

daje zaključak da graf funkcije počinje uz vertikalu $x = -\frac{1}{2}$, raste preko ishodišta, dostiže maksimum između 0 i 1 u nepoznatoj točki, spušta se kroz $(1,0)$ ispod osi x i, budući je $\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{2x+1}{3x^2-x+1} = \ln 0 = -\infty$, odlazi u $-\infty$ kao obrnuta kvadratna parabola.

6.5 Neprekidnost funkcije

Promjena varijable može uzrokovati promjenu vrijednosti funkcije. Neka je

$$y = f(x)$$

formula koja računa vrijednost funkcije y za vrijednost varijable x. Kaže se da je funkcija $f(x)$ neprekidna u točki x_0 ako

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Analogna je definicija pomoću limesa. Funkcija je neprekidna u točki x_0 svoje domene, ako je

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Elementarne funkcije, funkcije dobivene računskim operacijama i komponiranjem elementarnih funkcija neprekidne su u točkama za koje su definirane.

Primjer 6.4 *Funkcija zadana formulama*

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \leq 3 \\ 3x, & x > 3 \end{cases}$$

ima u točki $x_0 = 3$ *prekid prve vrste:*

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x = 9,$$

dok je

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} -2x^2 = -18.$$

Iz ispitivanja se vidi da su limesi konačni, ali se razlikuju.

Napomena 6.1 *Uvjet neprekidnosti po prvoj definiciji nije ispunjen jer* $\epsilon > 0$*, primjerice* $\epsilon = 2$*, za koji vrijedi:*

$$\forall\delta > 0 \exists x \quad |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) + 18| > 2.$$

za svaki $\delta > 0$ *dovoljno je uzeti* $x > 0$

Primjer 6.5 *Funkcija*

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

neprekidna je na cijelom području definicije, jer je dobivena kvocijentom elementarnih funkcija.

Primjer 6.6 *Funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

je neprekidna u nuli, jer je, doduše eksperimentalno, pokazano da je

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Primjer 6.7 *Funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

ima prekid u točki $x = 0$*, jer je eksperimentalno pokazano:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = 1 \neq 0.$$

Isto tako, moguće je naći $\epsilon > 0$ *tako da*

$$\forall\delta > 0 \exists x \quad |x-0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| > \epsilon.$$

Taj ϵ *može biti i* $\frac{1}{2}$.

Primjer 6.8 *Funkcija*

$$f(x) = |x|$$

neprekidna je u svakoj točki domene $\mathcal{R}$. Funkcija $|x|$ definirana je formulama:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Budući je

$$\lim_{x \to 0^-} -x = 0 = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$$

funkcija je neprekidna.

Primjer 6.9 *Funkcija*

$$f(x) = \frac{3 - 2x}{1 + x}$$

nije definirana za $x = -1$. Ispitivanja limesa:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3 - 2x}{1 + x} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{3 - 2x}{1 + x} = +\infty$$

pokazuju da graf funkcije ima u točki $x = -1$ prekid druge vrste.

Zadatak 6.23 *Odredite parametar a, tako da funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 5x^4 - 2x + a, & x \geq 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathcal{R}$.

Rješenje. Očito je $a = 1$.

6.6 Hiperbolne funkcije

Funkcijama se pokušavaju opisati pojave u prirodi i društvu sa ciljem da se otkrivanjem veze uzroka i posljedice predvide ponašanja bez provociranja pojave pokusima. Hiperbolne funkcije uvedene su u matematiku kao rješenja jednadžbi gibanja. Naknadno je uočena geometrijska analogija trigonometrijskih funkcija na jediničnoj kružnici i hiperbolnih funkcija na jediničnoj hiperboli $x^2 - y^2 = 1$.

Kosinus hiperbolni je funkcija definirana formulom:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zadaci:

1. Odredite domenu funkcije $y = chx$.
2. Ispitajte limese na rubovima domene.
3. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
4. Ispitajte parnost funkcije
5. Nacrtajte graf funkcije $y = chx$.

Rješenje. 1. Domena je $\mathcal{R}$; 2. $\lim_{x\pm\infty} chx = +\infty$; 3. Os $0y$ siječe u $(0, 1)$; 4. Parna je; 5. Graf je sličan paraboli $y = x^2 + 1$.

Sinus hiperbolni je funkcija definirana formulom:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Zadaci

1. Odredite domenu funkcije $y = shx$.
2. Ispitajte limese na rubovima domene.
3. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
4. Ispitajte parnost funkcije
5. Nacrtajte graf funkcije $y = shx$.

Rješenje. 1. $\mathcal{D} = \mathcal{R}$; 2. $\lim_{x\to\pm\infty} shx = \pm\infty$; 3. Graf ide točkom $(0, 0)$; 4. Neparna je; 5. Graf je sličan $y = x^3$.

Tangens hiperbolni definira se analogno trigonometrijskom:

$$thx = \frac{shx}{chx}.$$

Zadaci

1. Odredite domenu funkcije $y = thx$.
2. Ispitajte limese na rubovima domene.
3. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
4. Ispitajte parnost funkcije
5. Nacrtajte graf funkcije $y = thx$.

Rješenja. 1. $\mathcal{D} = \mathcal{R}$. 2. $lim_{x\to\pm\infty} thx = \pm 1$; 3. $S = (0, 0)$; 4. Neparna; 5. Graf se nalazi u pruzi između $y = \pm 1$ i sličan je okrenutoj $y = x^3$.

Kotangens hiperbolni definira se poput trigonometrijskog:

$$cthx = \frac{chx}{shx}.$$

Zadaci

1. Odredite domenu funkcije $y = cthx$.
2. Ispitajte limese na rubovima domene.
3. Odredite sjecišta s koordinatnim osima.
4. Ispitajte parnost funkcije
5. Nacrtajte graf funkcije $y = cthx$.

Rješenja: 1. $\mathcal{D} = \mathcal{R}$; 2. $\lim_{x\to 0^\pm} cthx = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} cthx = \pm 1$; 3. Nema sjecišta; 4. Neparna; 5. Poput dviju grana hiperbole: donja u III kvadrantu ispod $y = -1$, gornja u I kvadrantu iznad $y = 1$.

Osnovne formule hiperbolnih funkcija:

$$\begin{aligned} ch^2x - sh^2x &= 1 \\ thx \cdot cthx &= 1 \\ sh2x &= 2shx \cdot chx \\ ch2x &= ch^2x + sh^2x \end{aligned}$$

Zadatak 6.24 *Dokažite algebarski vjerodostojnost formula hiperbolnih funkcija.*

Zadatak 6.25 *Dokažite Moivreovu formulu:*

$$(chx \pm shx)^n = chnx \pm shnx$$

Uputa: dokaz provedite matematičkom indukcijom.

Area funkcije inverzne su funkcije hiperbolnih funkcija.

Zadatak 6.26 *Izrazite funkcije $Archx$, $Arshx$, $Arthx$ i $Arcthx$.*

Rješenja.

$$\begin{aligned} Archx &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ Arshx &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ Arthx &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \\ Arcthx &= \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \end{aligned}$$

7 Derivacija funkcije

Definicija derivacije

Definicije
x ... nezavisna varijabla, nerijetko zvana argument
y ... vrijednost funkcije koja se računa po
$f(x)$ ... formuli u kojoj je jedina varijabla x
$y = f(x)$ ... uobičajeni zapis
$y = y(x)$ eksplicitni zapis računanja vrijednosti Y u ovisnosti o x.
dx ... promjena nezavisne varijable, mala veličina u odnosu na veličinu x.
dy ... promjena vrijednosti funkcije koja nastaje pri promjeni nezavisne varijable od dx.
U duhu navedenih oznaka, vrijedi:

$$dy = y(x + dx) - y(x)$$

Zadatak 7.1 *Izračunajte omjer*

$$\frac{dy}{dx}$$

za funkciju zadanu formulom:

$$y = x^2.$$

Rješenje

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx} \\
&= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \frac{2xdx + dx^2}{dx} \\
&= 2x + dx \\
&= 2x
\end{aligned}$$

jer je dx zanemarivo malo prema $2x$.

Prva derivacija funkcije zadane formulom

$$y = f(x)$$

u oznakama

$$y' = f'(x)$$

je formula koja računa omjer

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

za zadanu formulu.

Zadatak 7.2 *Odredite formule prvih derivacija funkcija:*

1. $y = 12$
2. $y = x$
3. $y = \frac{1}{x}$
4. $y = \sqrt{x}$
5. $y = sinx$
6. $y = cosx$

Rješenja.

1. Funkcija je konstanta, pa vrijedi:

$$y(x) = y(x+dx) = 12 \quad \Rightarrow \quad dy = y(x+dx) - y(x) = 12 - 12 = 0$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx} = 0$$

bez obzira na dx.

2. Slično kao u prethodnom:

$$\begin{aligned} y(x) &= x \\ y(x+dx) &= x + dx \\ y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{x + dx - x}{dx} = 1. \end{aligned}$$

3. Sada je

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x} \\ y(x+dx) &= \frac{1}{x+dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)} \\ &= \frac{-dx}{x(x+dx)}. \end{aligned}$$

$$y' = \frac{\frac{-dx}{x(x+dx)}}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

jer je $dx << x$.

4. U ovom slučaju racionalizirat će se brojnik:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x} \\ y(x+dx) &= \sqrt{x+dx} \\ dy = y(x+dx) - y(x) &= \sqrt{x+dx} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx} \cdot \frac{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+dx-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})} = \frac{dx}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

jer je $dx << x$, pa je $\sqrt{x+dx} = \sqrt{x}$

5. Adicione formule i provjereni limes

$$\lim dx \to 0 \frac{\sin x}{x} = 1$$

koriste se u deriviranju funkcije sinusa:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin x \\ y(x+dx) = \sin(x+dx) &= \sin x \cos dx + \sin dx \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= \sin x - \sin x \cos dx - \sin dx \cos x \\ &= -\sin dx \cos x, \end{aligned}$$

zbog $\cos dx \to 1$ za $dx \to 0$. Nadalje je

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin dx \cos x}{dx} = -\frac{\sin dx}{dx} \cdot \cos x$$

$$y' = -\cos x$$

6. Potpuno analogno prethodnom zadatku, korištenjem istog limesa i adicione formule: $\cos(x+dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx$ dobiva se

$$y' = \sin x.$$

Derivacija funkcije jedne varijable $y = f(x)$ je nova funkcija varijable x jednaka za svaku vrijednost x za koju postoji:

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Definicija je tehničke prirode. Uvjete u kojima je definicija opravdana pogledajte u udžbeniku [1].

Zadatak 7.3 *Odredite derivaciju eksponencijalne funkcije*

$$f(x) = e^x$$

preko limesa koristeći limes dobiven eksperimentalno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{dx \to 0} \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{e^x e^{dx} - e^x}{dx} \\
&= \lim_{dx \to 0} e^x \frac{e^{dx} - 1}{dx} \\
&= e^x \lim_{dx \to 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Zadatak 7.4 *Nađite formulu derivacije funkcije prirodnog logaritma*

$$f(x) = \ln x$$

koristeći algebru i eksperimentalno dobiven

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
(\ln x)' &= \lim_{dx\to 0}\frac{\ln(x+dx)-\ln x}{dx}\\
&= \lim_{dx\to 0}\frac{\ln\frac{x+dx}{x}}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{\ln(1+\frac{dx}{x})}{dx}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \frac{1}{x}\lim_{\frac{dx}{x}\to 0}\frac{\ln(1+\frac{dx}{x})}{\frac{dx}{x}}\\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

7.1 Tehnika deriviranja

Deriviranje se može shvatiti kao **operator** na skupu svih funkcija u smislu da **svakoj napisanoj** funkciji f jedne realne varijable **operator deriviranja** pridruži točno jednu formulu $df = f'$ koja se naziva **derivacijom** početne fomule.

Deriviranje ima dva svojstva koja se ističu:

- Linearnost
$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$$
- Newton-Leibnitzovo svojstvo
$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$$

Budući se svaka formula dobiva zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem, dijeljenjem ili komponiranjem formula koje se nazivaju **elementarne**, potrebno je znati derivaciju **svake** elementarne funkcije posebno i postupke u slučaju da se formule zbrajaju, oduzimaju, množe, dijele ili se radi o kompoziciji formula.

Do sada su pokazane derivacije eksponencijalne funkcije:

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow f'(x) = e^x,$$

koja je jedina jednaka svojoj derivaciji, zatim prirodne logaritamske funkcije:

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

trigonometrijske funkcije sinusa:

$$(\sin x)' = \cos x$$

i nešto drugačije derivacije kosinusa

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

7.1.1 Deriviranje opće potencije

Opća potencija je funkcija oblika

$$f(x) = x^n$$

gdje je n fiksirani realni broj. Deriviranje je lagano pokazati u slučaju da je n prirodni broj.

Zadatak 7.5 *Odredite formulu derivacije potencije*

$$f(x) = x^n$$

koristeći se formulom za potenciranje binoma navedenom u algebarskom dodatku.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{dx\to 0} \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \ldots + dx^n - x^n}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{+nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \ldots + dx^n}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx + \ldots + dx^{n-1}) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Veliki broj funkcija može se svesti na oblik opće potencije

$$f(x) = x^a,$$

gdje je a negativan broj, razlomak, a može biti i nula. Derivacija opće potencije tako postaje široko primjenjiva. Važno je upamtiti:

$$y = x^a \quad \Rightarrow \quad y' = a \cdot x^a.$$

Samostalno riješite slijedeće zadatke.

1. Derivirajte opće potencije:

$$\begin{array}{llllll} a) & y=x^4 & b) & y=x^{10} & c) & y=x^{-3} \\ d) & y=x^{-6} & e) & y=x^{\frac{2}{3}} & f) & y=x^{\frac{7}{5}} \\ g) & y=x^{-\frac{3}{4}} & h) & y=x^{-\frac{5}{3}} & k) & y=x^{2,5} \end{array}$$

2. Slijedeće funkcije napišite u obliku potencija, pa derivirajte:

$$\begin{array}{llllll} a) & y=\sqrt[3]{x} & b) & y=\sqrt[6]{x} & c) & y=\sqrt[5]{x^3} \\ d) & y=\frac{1}{x^4} & e) & y=\frac{1}{x^5} & f) & y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \\ g) & y=\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} & h) & y=x^2\sqrt[5]{x^4} & k) & y=\frac{x^5}{\sqrt[6]{x^7}} \end{array}$$

Rješenja zadataka 1 i 2:

1. Neposredno, po formuli:
   (a) $y'4x^3$
   (b) $y'=10x^9$
   (c) $y'=-3x^{-4}$
   (d) $y'=-6x^{-7}$
   (e) $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
   (f) $y'=\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$
   (g) $y'=-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$
   (h) $y'=-\frac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}$
   (i) $y'=2.5x^{1.5}$

2. Svaku je funkciju potrebno prevesti u oblik opće potencije, a onda derivirati po ugledu na prvi zadatak. U algebarskom dodatku se podsjetite osnovnih stvari iz algebre.
   (a) $y=x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
   (b) $y=x^{\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow y'=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$
   (c) $y=x^{\frac{3}{5}} \quad \Rightarrow y'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$
   (d) $y=x^{-4} \quad \Rightarrow y'=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$
   (e) $y=x^{-5} \quad \Rightarrow y'=-5x^{-6}=-\frac{5}{x^6}$
   (f) $y=x^{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow y'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}=-\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$
   (g) $y=x^{-\frac{4}{7}} \quad \Rightarrow y'=-\frac{4}{7}x^{-\frac{11}{7}}=-\frac{4}{7x\sqrt[7]{x^4}}$
   (h) $y=x^2\cdot x^{\frac{4}{5}}=x^{\frac{14}{5}} \quad \Rightarrow y'=\frac{14}{5}x^{\frac{9}{5}}=\frac{14x\sqrt[4]{x^4}}{5}$
   (i) $y=\frac{x^5}{\sqrt[6]{x^7}}=\frac{x^5}{x^{\frac{7}{6}}}=x\frac{23}{6} \quad \Rightarrow y'=\frac{23}{6}x^{\frac{17}{6}}=\frac{23x^2\sqrt[6]{x^5}}{6}$

7.1.2 Deriviranje formule množene konstantom

Uz uvjet da je poznata derivacija formule $f(x)$ moguće je derivirati formulu:

$$y = c \cdot f(x), \qquad y' = c \cdot f'(x).$$

Dokaz je vrlo očit:

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{dx \to 0} \frac{c \cdot f(x+dx) - c \cdot f(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} c \cdot \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = c \cdot f'(x).$$

Derivacija logaritamske funkcije proizvoljne baze, zahvaljujući identiteti:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

iz srednje škole jednaka je:

$$f(x) = \log_b x \quad f'(x) = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln b}.$$

Zadatak 7.6

Derivirajte slijedeće funkcije:

$$\begin{array}{llllll} a) & y = 3x^2 & b) & y = 6\sqrt[3]{x} & c) & y = \frac{5}{x^4} \\ d) & y = 6e^x & e) & y = \frac{\sin x}{3} & f) & y = \frac{5x^3}{9} \end{array}$$

Rješenje: a) $y' = 6x$; b) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$; c) $y' = -\frac{20}{x^5}$; d) $6e^x$; e) $y' = \frac{1}{3}\cos x$; f) $y' = \frac{5}{3}x^2$

7.1.3 Derivacija zbroja i razlike

Uz uvjet poznavanja derivacija formula $f(x)$ i $g(x)$ moguće je derivirati

$$\begin{aligned} y &= f(x) + g(x) \\ y' &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Dokaz je jednostavan i nalazi se u [1]. Derivirajte slijedeće funkcije:

1.
$$y = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$$

2.
$$y = 2\sqrt{x} - \frac{3x}{2} + \frac{2}{x}$$

3.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$$

4.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

5.

$$y = sinx - cosx$$

6.

$$y = x\sqrt{x}$$

7.

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

8.

$$y = (2-x)x + (x-1)(x+2)$$

9. Napišite prvu derivaciju funkcije

$$f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}.$$

Rješenja:

1. $y' = 9x^3 + 8x - 5$; 2. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} - \frac{2}{x^2}$; 3. $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{9}{x^4}$; 4. $y' = \cos x + \sin x$; 5. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; 6. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$; 7. $y' = 3$; 8. $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

7.1.4 Derivacija umnoška funkcija

Ako su poznate derivacije funkcija $f(x)$ i $g(x)$, tada je moguće derivirati njihov umnožak:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Primjer 7.1 *Derivirati funkciju*

$$y = x^3 arctgx$$

Rješenje:

$$y' = 3x^2 arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Zadatak 7.7 *Derivirati slijedeće umnoške*

1. $y = xlnx$
2. $y = x^2 e^x$
3. $y = (2 - x^2)cosx + 2xsinx$

Rješenja.

1. $y' = \ln x + 1$
2. $y' = 2xe^x + x^2 e^x$
3. $y' = x^2 \sin x$

7.1.5 Derivacija kvocijenta funkcija

Ukoliko je moguće derivirati formulu $f(x)$ koja se nalazi u brojniku i $g(x)$ iz nazivnika, tada je moguće odlučiti se na derivaciju kvocjenta tih dviju funkcija:

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ y' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

Dokaz je egzibicionistički:

$$\begin{aligned} (\frac{f}{g}(x))' &= (\frac{f(x)}{g(x)})' = \lim_{dx \to 0} \frac{\frac{f(x+dx)}{g(x+dx)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{dx} \\ &= \lim_{dx \to 0} \frac{g(x) \cdot f(x+dx) - f(x) \cdot g(x+dx) - g(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f(x)}{dx \cdot g(x) \cdot g(x+dx)} \\ &= \frac{1}{g(x)} \lim_{dx \to 0} \frac{1}{g(x+dx)} [\lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} g(x) - \lim_{dx \to 0} \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} f(x)] \\ &= \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot [f'(x)g(x) - g'(x)f(x)] \end{aligned}$$

Primjer 7.2 *Derivirati funkciju*

$$y = \frac{\arcsin x}{x}$$

Rješenje.

$$y' = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \cdot 1}{x^2}.$$

Primjer 7.3 *Odrediti formulu prve derivacije funkcije*

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$$

Rješenje.

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)}.$$

Odredite formule prvih derivacija slijedećih funkcija:

1. $$y = \frac{x+2}{x-3}$$

2. $$y = \frac{x}{lnx}$$

3. $$y = \frac{e^x}{x^2}$$

4. $$y = \frac{ln^2x}{x}$$

5. $$y = \frac{sinx}{cosx}$$

6. $$y = \frac{\sqrt{x}}{lnx}$$

7. Izračunajte vrijednost $y'(-2)$ funkcije

$$y = \frac{x^3}{x^2+3}.$$

8. Napišite formulu prve derivacije funkcije:

$$y' = \frac{\cos x - 1}{\cos x - \sin x}.$$

Rješenja:

1.$y' = \frac{-5}{(x-3)2}$; 2. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; 3. $y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$; 4. $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$; 5. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 6. $y' = \frac{2\sqrt{x}(\ln x - 1)}{2x\ln^2 x}$; 7. $y' = \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{52}{49}$; $y' = \frac{1-\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)^2}$.

7.2 Derivacija inverzne funkcije

Ako je

$$y = f(x)$$

formula koja opisuje funkcijsko pridruživanje varijable x vrijednosti funkcije y, onda je

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

formula koja opisuje kako se varijabli x pridružuje vrijednost prve derivacije y'.

Inverz funkcije dobiva se formalno izražavanjem varijable x preko oznake za vrijednost funkcije y koja postaje varijabla inverzne funkcije:

$$f^{-1}(x) = y.$$

Tada je

$$x' = \frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Formula derivacije inverzne funkcije u slučaju da je varijabla funkcije uobičajeno označena s x glasi:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Primjer 7.4 *Derivirati funkciju inverznu funkciji sinusa.*

Rješenje. Funkcija sinusa zapisuje se formulom

$$y = \sin x.$$

Formula dobivanja vrijednosi funkcije glasi:

$$f(x) = \sin x.$$

Slijedi računanje:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{da}{dx} = \cos x \\
x &= \arcsin y \\
x' &= \frac{dx}{dy} = (\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},
\end{aligned}$$

pa u slučaju da je funkcija zadana formulom

$$f(x) = \arcsin x)$$

njena derivacija glasi:

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zadatak 7.8 *Izvedite derivaciju funkcije*

$$f(x) = \arccos x.$$

Rješenje. Funkcija je inverz funkcije

$$y = \cos x.$$

Slijedi račun:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = -\sin x \\
x' &= \frac{dx}{da} = -\frac{1}{\sin x} \\
(\arccos y)' &= -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

koji daje rješenje

$$f'(x) = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zadatak 7.9 *Derivirajte*

$$y = \ln x.$$

Rješenje. Uobičajeni formalni račun daje:

$$\begin{aligned}
y &= \ln x \\
x &= e^y \\
x' &= e^y \\
y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Zadatak 7.10 *Izvedite derivaciju funkcije*

$$y = arctgx.$$

Rješenje. Analogno prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned} y &= arctgx \\ x &= tgy \\ x' &= \frac{1}{\cos^2 y} \\ y' &= \cos^2 y = \frac{1}{tg^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

7.3 Derivacija kompozicije funkcija

Kompozicije funkcija su formule u kojoj jedna funkcija za argument ima cijelu formulu neke druge funkcije.
Ukoliko je poznata derivacija funkcije argumenta i funkcije kojoj je ona argument, moguće je derivirati:

$$y = f(g(x))y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Formalno, kompoziciju

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

moguće je dekomponirati kao

$$y = f(z), z = g(x)$$

i formalno pokazati:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Primjer 7.5 *Derivirati funkciju*

$$y = (x^2 - 3x + 4)^3.$$

Moguće je kubirati zagradu, pa onda derivirati kao produkt. Jednostavniji je pristup kao funkciji složenoj od formula

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \\ z = g(x) &= x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

koje se znaju derivirati:

$$f'(z) = 3z^2$$
$$z' = g'(x) = 2x - 3.$$

Postupak derivacije složene funkcije daje:

$$y' = 3(x^2 - 3x + 4)^2 \cdot (2x - 3).$$

Primjer 7.6 *Napisati formulu prve derivacije funkcije*

$$y = \ln \sin x$$

moguće je tretiranjem funkcije kao složene. Deriviranje teče s lijeva na desno:

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx.$$

Primjer 7.7 *Napisati prvi izvod funkcije*

$$y = 2^{x^2}.$$

Rješenje:

$$\begin{array}{rcl}
y & = & 2^{x^2} \\
y' & = & \dfrac{dx}{dy} = ? \\
dekompozicija: \qquad y = 2^z & & z = x^2 \\
\dfrac{dy}{dz} = 2^z \ln 2 & & \dfrac{dz}{dx} = 2x \\
y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} & = & 2^z \ln 2 \cdot 2x \\
& = & 2^{z+1} x \ln 2 \\
& = & 2^{x^2+1} x \ln 2
\end{array}$$

Zadatak 7.11 *Odredite derivaciju opće eksponencijalne funkcije:*

$$y = a^x.$$

Rješenje. Opća eksponencijalna funkcija je kompozicija:

$$y = a^x = e^{a \ln x},$$

koja se derivira postupno:

$$y' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Zadatak 7.12 *Odredite formulu prve derivacije funkcija:*

1. $y = \sqrt{x^2 + 1}$
2. $y = \sqrt{2x^3 - 1}$
3. $y = sin2x$
4. $y = sin^2x$
5. $y = e^{x^2 - x}$
6. $y = \ln \frac{x-2}{3-2x}$

Rješenje:

1. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
2. $y' = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-1}}$
3. $y' = 2\cos 2x$
4. $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$
5. $y' = (2x-1)e^{x^2-x}$
6. $y' = \frac{3-2x}{x-2} \cdot \frac{7-4x}{(3-2x)^2} = \frac{7-4x}{(x-2)(3-2x)}$

7.4 Ponavljanje tehnike deriviranja

Ova točka namijenjena je samostalnoj vježbi nalaženja formula prve derivacije.

1. Derivirajte funkciju
$$y = \arcsin 2x.$$
Rješenje:
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

2. Nađite prvu derivaciju funkcije
$$y = 5 \cdot e^{-x^2}$$
Rješenje.
$$5 \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -10xe^{-x^2}.$$

3. Derivirajte

$$y = \ln^2 x - \ln(\ln x).$$

Rješenje.

$$y' = 2\ln x(\ln x) - \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x}(2\ln x - \frac{1}{\ln x}).$$

4. Naći derivaciju:

$$y = \frac{1}{5^{x^2}}.$$

Rješenje. Priprema derivacije:

$$y = 5^{-x^2}$$

olakšava deriviranje:

$$y' = 5^{-x^2} \cdot (-x^2)' \cdot \ln 5 = -\frac{2x \cdot \ln 5}{5^{x^2}}.$$

5. Odredite prve derivacije slijedećih složenijih funkcija

(a) $y = \sqrt{xe^x + x}$
(b) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} - (\arcsin x)^3$
(c) $y = arctg(\ln x) + \ln(arctgx)$
(d) $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$

Rješenje.

(a) $y' = \frac{1}{\sqrt{xe^x+x}} \cdot (e^x + xe^x + 1)$
(b) priprema olakšava deriviranje:

$$y = \sin^{\frac{2}{3}} x - (\arcsin x)^3$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}} x - 3(\arcsin x)^2 \\ y' &= \frac{2}{3\sqrt[3]{\sin x}} - 3\arcsin^2 x \end{aligned}$$

(c) $y' = \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2}$
(d) $y' = \frac{1}{\cos\frac{x-1}{x}} \cdot (-\sin\frac{x-1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}$, a izraz je moguće i dotjerati.

6. Nađite derivacije slijedećih funkcija:

(a) $y = \frac{7}{x^3}$

(b) $y = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$

(c) $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$

(d) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

(e) $y = 3x^3 \ln x - x^3$

(f) $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$

(g) $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

(h) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$

(i) $y = \sqrt{1 - 3x^2}$

(j) $y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$

(k) $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

(l) $y = (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2$

(m) $y = \cos^3 \frac{x}{3}$

(n) $y = \ln tg \frac{2x+1}{4}$

(o) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

Rješenja:

(a) $y' = -\frac{21}{x^4}$

(b) $y' = \sqrt[3]{x}$

(c) $y' = x^2\sqrt{x}(1 - x^2)^2$

(d) $y' = -x^2 e^{-x}$

(e) $y' = 9x^2 \ln x$

(f) $y' = \left(\frac{8}{9}\right) \ln \left(\frac{8}{9}\right)$

(g) $y' = x^2 \cos x$

(h) $y' = 6\frac{x+1}{2x^2+3x}$

(i) $y' = -^3 \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}$

(j) $y' = \arccos \frac{x}{2}$

(k) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x}$

(l) $y' = -\cos x$

(m) $y' = -\cos^2 \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{3}$

(n) $y' = \frac{1}{\sin \frac{2x+1}{2}}$

(o) $y' = \frac{1}{\cos x}$

7. U slijedećim zadacima izračunajte vrijednosti prvih derivacija u zadanim točkama.

   (a) Odredite $y'(1)$ ako je funkcija zadana formulom
   $$y = x^3.$$

   (b) Za
   $$y = 2x^4 - \sqrt{3}$$
   odredite $y'(2)$.

   (c) Izračunajte $y'(-1)$ za
   $$y = \frac{1}{x}.$$

   (d) Kolika je vrijednost $y'(0)$, ako je
   $$y = \sqrt{1 + 2x}.$$

   (e) Funkcija je zadana formulom
   $$f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$
   Izračunajte $f'(-1)$.

   (f) Koliko je $f'(64)$ ako je
   $$f(x) = \sqrt[6]{x}.$$

   (g) Ako je
   $$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x - \sqrt{10},$$
   koliko je $y'(0)$?

   (h) Neka je
   $$z = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
   Odredite $y'(4)$.

(i) Nađite vrijednost prve derivacije funkcije

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x\sqrt[3]{x}}.$$

(j) Naći $y'(0)$ za funkciju

$$y = \frac{2x+3}{4}.$$

(k) Neka je

$$z = (\sqrt{2} - \sqrt{t})^2.$$

Odredite brzinu

$$\frac{dz}{dt} = z'(t)$$

u točki $t = \frac{1}{4}$

(l) Jednadžba gibanja glasi

$$s = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^2.$$

Izračunajte $s'(8)$, odnosno brzinu na kraju 8. sekunde.

(m) Broj uplata lota Q ovisi o broju dobitnika k po formuli

$$Q = \frac{1000k^2}{k^2+1}.$$

Izračunajte $Q'(5)$, tj. graničnu vrijednost broja uplata kod poznatog broja od 5 dobitaka.

(n) Funkcija ima formulu

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Treba izračunati $y'(0)$.

(o) Izračunati $y'(-1)$ za graf funkcije $y = f(x)$ formule

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

(p) Za vrijednost argumenta $x = \pi/3$, izračunajte vrijednost prve derivacije funkcije

$$y = \frac{x \sin x}{1 + tgx}.$$

(q) Ako je $x = 1$, $y = x \arcsin x$, koliko je y'?

(r) Neka je

$$y = arctgx - \frac{x}{1 + x^2}.$$

Izračunati $y'(-1)$.

(s) Formula za računanje vrijednosti funkcije glasi:

$$y = \frac{1}{(1 - x^2)^5}.$$

Odredite $y'(2)$.

(t) Za formulu

$$y = \frac{\sqrt{2x - 1}}{x}$$

izračunajte $y'(5)$

(u) Računajte $y'(0)$ ako je

$$y = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

(v) Funkcija je zadana formulom

$$f(x) = \sin^2 x^3.$$

Izračunajte $y'(-1.5)$.

(w) Zavisna varijabla računa se po formuli $y = \arccos(1 - 2x)$. Koliko je $y'(1/4)$?

(x) Odredite $y'(4)$ iz formule

$$y = \arcsin \frac{2}{x}.$$

(y) Ako je $y = \ln \sin x$ i $x = \pi/4$, koliko je y'?

(z) Za
$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+9})$$
izračunati $y'(-4)$.

Rješenja: a)$y'(1)=3$; b)$y'(2)=64$ c)$y'(-1)=-1$; c)$y'(0)=1$; d)$f'(-1)=1/3$; e)$y'(64)=1/12$; f)$y'(0)=4$; g)$y'(4)=-1/16$; h)$y'(27)=-\frac{20}{3^7}$; i)$y'(0)=1/2$; k)$\frac{dz}{dt}(\frac{1}{4})=1-2\sqrt{2}$; l)$s'(8)=-1/12$; m)$Q'(5)=14.79$, (znači da svaki slijedeći dobitak kod poznatih 5 dobitaka donosi otprilike 15 novih uplata); n)$y'(0)\to+\infty$; o)$-1/6$; p)$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}}{(1+\sqrt{3})^2}\approx-0.14$; q)$y'(1)\to\infty$ r)$y'(-1)=3/4$; s)$-\frac{20}{3^6}\approx-0.027$; t)$y'(5)=1/75$; u)$y'(0)=-1$; v)$-13.5\sin 3.375\cos 3.375\approx 6.727$; w)$y'(\frac{1}{4})=4/\sqrt{3}$; x)$y'(4)=-1/4\sqrt{3}$; y)$y'(\pi/4)=1$; z)$y'(4)=1/5$.

8. Izračunajte $f(3)$ i $f'(3)$ za funkciju zadanu formulom
$$f(x)=\ln\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}+3\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}+\frac{1}{2}\arctan x.$$

Rješenje. Jednostavnosti računanja radi, treba iskoristiti svojstva logaritma:
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{2}\arctan x\\
f(3) &= -\frac{1}{4}\ln 2+\frac{3}{4}\ln 5-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\arctan 2=0.5476\\
f(x) &= \frac{1}{4}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{3}{4}\ln(x^2+1)-\frac{3}{4}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\arctan x\\
f'(x) &= \frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{6x}{4(x^2+1)}-\frac{3x}{2(x^2-1)}+\frac{1}{2(x^2+1)}\\
f'(x) &= 0.1875
\end{aligned}$$

7.5 Tangenta i normala na graf funkcije

Tangenta na graf funkcije $y=f(x)$ je pravac koji se najbolje priljubljuje krivulji grafa:
$$\Gamma f=\{(x,y),\quad y=f(x)\}$$
Jednadžba tangente pretpostavlja poznavanje triju veličina:
x_0 ... apscise dirališta
$y_0=f(x_0)$ ... ordinate dirališta
$y'(x_0)=f'(x_0)=k$... brojčana vrijednost prve derivacije u x_0
Jednadžba tangente je jednadžba pravca koji prolazi diralištem s koeficijentom smjera
$$k=tg\varphi=y'(x_0),$$

gdje je φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi $0x$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Normala je pravac koji diralištem prolazi okomito na tangentu. Jednadžba normale

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0).$$

1. Nacrtajte grafove slijedećih funkcije i napišite jednadžbe tangenata na grafove u točkama koje su zadane slijedećim podacima:
   (a) graf $y = 2x - x^2$, u točki s $x = \frac{1}{2}$
   (b) krivulja $y = \frac{12}{x}$ u točki $x = 4$
   (c) funkcija $y = \sqrt{x}$, u točki $y = 3$
2. Nađite jedndžbu tangente i normale
   (a) na krivulju $y = \sqrt[3]{x-1}$ u točki $(1, 0)$.
   (b) na krivulju $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ u sjecištu s x-osi.
   (c) na krivulju $y = e^{1-x^2}$ u sjecištima s pravcem $y = 1$.
3. Formula glasi
   $$y = \ln \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$
   Koliko je $y'(1)$? Napišite jednadžbu tangente i jednadžbu normale na graf funkcije zadane formulom.
4. Zadana je formula
   $$f(x) = \ln(2 + e^{-x} + \sqrt{e^x + e^{-x} + 4})$$
   Odredite točku u kojoj graf funkcije $y = f(x)$ siječe os $0y$ i koeficijent smjera tangente na graf u toj točki.
5. Odredite koordinate točke u kojoj os apscisa siječe tangenta povučena na graf funkcije $y = x^2$ u točki s ordinatom $y = 4$.
6. Izračunajte koordinate točaka u kojima koordinatne osi siječe tangenta povučena na $y = lnx$ u točki s apscisom $x = 1$.

7. Kolika je površina koju s koordinatnim osima odredjuje tangenta povučena na graf sinusoide $y = 3sin(2x - \frac{\pi}{4})$ u točki s apscisom $x = \frac{3\pi}{4}$.

Rješenja zadataka

1. a)$4x - 4y + 1 = 0$; b)$y = -\frac{3}{4}x + 6$; c)$y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$
2. Tangenta i normala redom: a)$x = 1, y = 0$; b)$x - 2y - 1 = 0, 2x + y - 2 = 0$; c)$2x + y - 3 = 0, x - 2y + 1 = 0$ za $(1, 1)$; $2x - y + 3 = 0, x + 2y - 1 = 0$ za $(-1, 1)$.
3. Iz $y' = \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-1-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}$ očito je $y'(1) \to \infty$, što daje za tangentu vertikalu $x = 1$, a za normalu $y = 0$.
4. $y_0 = f(0) = \ln(3 + \sqrt{6}$, $y'(0) = -\frac{1}{3+\sqrt{6}}$.
5. Uvjete da im je ordinata $y = 4$ imaju dva dirališta: $(2, 4)$ i $(-2, 4)$, pa postoje dvije tangente: $y = 4x - 4$ i $y = -4x - 4$ koje sijeku os apscisa u $x_1 = 1$ i $x = -1$.
6. Diralište je $(1, 0)$, tangenta $y = x - 1$, sjecišta s koordinatnim osima su $(1,)$ i $(-1, 0)$.
7. Diralište $(\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, tangenta

$$y + \frac{3\sqrt{2}}{2} = -9\sqrt{2}(x - \frac{3\pi}{4}),$$

a tražena površina $P = \frac{\sqrt{2}}{16}(9\pi - 2)^2$.

7.6 Derivacija implicitno zadane funkcije

Formula u kojoj su dvije varijable, izjednačena s nulom predstavlja u ravnini R^2 krivulju u smislu da jednadžba $F(x, y) = 0$ provjerava da li točka $T = (x, y)$ pripada krivulji. Primjeri su jednadžbe parabole, hiperbole, elipse i kružnice iz srednje škole.

Uz određene uvjete jednadžba

$$F(x, y) = 0$$

implicitno definira y kao funkciju od x. Jedan od uvjeta je da vertikala siječe pripadnu krivulju samo u jednoj točki.

Primjer 7.8 *Jednadžba jedinične kružnice*

$$x^2 + y^2 = 1$$

definira funkciju

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

na gornjoj polukružnici i funkciju

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

na donjoj.

Derivaciju y' implicitno zadane funkcije nalazimo derivirajući

$$F(x, y) = 0$$

po varijabli x smatrajući y funkcijom koja ovisi o x po nepoznatoj formuli. Geometrijska interpretacija y' je koeficijent smjera tangente na krivulju

$$F(x, y) = 0$$

Primjer 7.9 *Odrediti y' implicitno zadane funkcije formulom*

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Derivacija lijeve i desne strane po varijabli x daje:

$$\begin{aligned} 2x + 2y \cdot y' &= 0 \\ y' &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

formulu za računanje koeficijenta smjera tangente na kružnicu

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Koeficijent smjera $y' \to \infty$ za $y \to 0$ što je očito, jer su jednadžbe tangenata u tim točkama $x = 1$ i $x = -1$.

Primjer 7.10 *Napisati jednadžbu y' ako je y zadana implicitno formulom*

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

Deriviranjem lijeve i desne strane po x dobiva se:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2y' - 6(y + xy') &= 0 \\ 3x^2 - 6y &= 3y'(2x - y^2) | : 3(2x - y^2) \\ y' &= \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2} \end{aligned}$$

Zadatak 7.13 *Odredite formulu prve derivacije funkcije $y(x)$ zadane implicitno:*

$$\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 9.$$

Rješenje. Deriviranjem po x dobiva se tražena ovisnost y' o koordinatama (x, y):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} &= 0 | \cdot x^2 \\
x &= e^{-\frac{y}{x}}(y'x - y) | e^{\frac{y}{x}} \\
xe^{\frac{y}{x}} + y &= xy' \\
y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} &
\end{aligned}$$

Zadatak 7.14 *Nađite y' iz formule*

$$tgy = xy.$$

Rješenje. Deriviranje lijeve i desne strane:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 y} y' &= y + xy' \\
y' &= \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}
\end{aligned}$$

daje traženu formulu.

Zadatak 7.15 *Napišite prvu derivaciju formule y' zadanu implicitno:*

$$x^y = y^x.$$

Rješenje. Logaritmiranjem lijeve i desne strane formulu pripremiti, a onda derivirati:

$$\begin{aligned}
x^y &= y^x \quad | \ln \\
y \ln x &= x \ln y \quad |' \\
y' \ln x + \frac{y}{x} &= \ln y + x \frac{y}{x} \\
y' &= \frac{x \ln y - y}{y \ln x - x} \cdot \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Riješite slijedeće zadatke

1. Nađite y' ako je y zadana formulom
$$y^3 = \frac{x-y}{x+y}.$$
2. Funkcija y zadana je implicitno formulom
$$e^y = x + y.$$
Napisati formulu za y'.
3. Naći formulu y' iz formule
$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},$$
gdje je a proizvoljna konstanta.

Rješenja:

1. $y' = \frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}$
2. $y' = \frac{1}{e^y-1}$
3. $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

Primjer 7.11 *Izračunati vrijednost y' u točki $(-1, 0)$ krivulje*
$$arctg\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$$
zadane implicitno.
Rješenje. *Formulu kojom je zadana krivulja treba derivirati po varijabli x:*
$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'x-y}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy') = 0$$
Zatim se uvrštavanjem vrijednost koordinata točke: $x = -1$, $y = 0$, dobiva jednadžba u kojoj je jedina nepoznanica y':
$$\frac{1}{1+0}\frac{-y'-0}{1} - \frac{1}{1}\frac{1}{2}(2+0) = 0$$
iz koje izlazi
$$y'(-1, 0) = -1.$$

Zadatak 7.16 *Odredite $y'(1,1)$ funkcije*

$$x^y = y^x.$$

Rješenje. Implicitna formula treba se logaritmiranjem svesti u oblik pogodan za deriviranje:

$$\begin{aligned}
\ln x^y &= \ln y^x \\
y \ln x &= x \ln y \quad |' \\
y' \ln x + y\frac{1}{x} &= \ln y + x\frac{1}{y}y' \\
y' &= 1
\end{aligned}$$

Izračunajte vrijednosti derivacije implicitno zadanih funkcija.

1. Funkcije
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$
u točki s ordinatom $y = 2$.
Rješenje. Dva su rješenja: $y'(2,3) = -\frac{2}{3}$ i $y'(2,-3) = \frac{2}{3}$.

2. Funkcije
$$x^2 + xy + y^2 = 6,$$
u točki s apscisom $x = -2$.
Rješenje. Ponovo su dva rješenja: $y(-2,3) = \frac{1}{4}$ i $y(-2,-1) = -\frac{5}{4}$.

3. Funkcije
$$xy - tgy = 0$$
u točki $(0,\pi)$.
$y'(0,\pi) = \pi$.

4. Funkcije
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$$
u točki za koju je $y = 4$.
Rješenje. $y'(4,4) = -1$

5. Funkcije
$$e^y + xy = e$$
u točki $(0,1)$.
Rješenje. $y'(0,1) = -e^{-1}$

6. Funkcije
$$x \ln y - y \ln x = 1$$
u točki za koju je $x = 1$.
Rješenje. $y'(1, e) = e^2 - e$

Zadatak 7.17 *Odrediti vrijednost prve derivacije y' funkcije*

$$e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$$

u točki s ordinatom $y = 0$.

Rješenje. Apscisa točke može biti bilo koji $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ i nije jednoznačna, pa postoji beskonačno mnogo rješenja ovog zadatka. Derivacija po x daje

$$e^x \sin y + e^x \cos y \cdot y' + y' e^{-y} \cos x + e^{-y} \sin x = 0.$$

Uvrštavanjem se dobiva za proizvoljni $k \in \mathcal{Z}$:

$$y'((2k+1)\frac{\pi}{x}) = (-1)^{k+1} e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}.$$

7.7 Diferencijal funkcije

Prirast funkcije zadane formulom $y = f(x)$ pri promjeni varijable Δx računa se oduzimanjem

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Diferencijal funkcije u oznaci $dy = df = df(x)$ je glavni dio prirasta funkcije koji linearno ovisi o infinitezimalnoj promjeni varijable $\Delta x = dx$ preko koeficijenta proporcionalnosti koji ovisi o vrijednosti varijable x kod koje se diferencijal računa:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Primjer 7.12 *Odrediti formulu diferencijala funkcije*

$$y = \arcsin x$$

za vrijednost argumenta $x = 1/2$. Odredite $\arcsin 0.45$ *pomoću prvog diferencijala:*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
dy &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
y'\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\
dx &= 0.45 - 0.5 = -0.05 \\
dy &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{20} = -\frac{1}{10\sqrt{3}} \\
\arcsin 0.2 &= \arcsin 1/2 + d\arcsin 1/2(-0.05) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{10\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Riješite slijedeće zadatke:

1. Nađite prve diferencijale slijedećih funkcija:
   (a) $y = (3x^2 - x)^{3/2}$ u točki $x = -1$
   (b) $y = 2^x - 3^{-x} + \sqrt{x}$ u točki $x = 1$
   (c) $y = \ln(\cos\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$ za $x = \frac{4}{\pi}$
2. Odredite pomoću diferencijala odgovarajućih funkcija:
   (a) $\sqrt{101}$
   (b) $\ln 3$
   (c) $e^{0.05}$
   (d) $arctg2$
   (e) $\sin 69^o$
   (f) $tg40^o$
3. Ako je
   $$y = \frac{1 + \ln x}{x - x\ln x},$$
   provjerite da vrijedi:
   $$2x^2dy = (x^2y^2 + 1)dx.$$

4. Provjerite da
$$arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$
zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:
$$x(dy-dx) = y(dx+dy).$$

5. Izračunajte $df_{x=2}$ ako je
$$f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1}).$$

6. Kako glasi formula za dy, ako je
$$y = (x-3)\sqrt{x}.$$

Rješenja.

1. Diferencijali:
   (a) $dy = -21dx$
   (b) $dy = \frac{1+2\ln 324}{2}dx = 6.28dx$
   (c) $dy = \frac{\pi^2}{8}dx$
2. Približno računanje:
   (a) $\sqrt{101} = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 1 = 10 + \frac{1}{20} = 10.05$
   (b) $\ln 3 = \ln e + \frac{1}{e} \cdot (3-e) = 1 + \frac{3}{e} - 1 = \frac{3}{e} \approx 1.1$
   (c) $e^{0.05} = e^0 + e^0 \cdot 0.05 = 1.05$
   (d) $arctg2 = arctg\sqrt{3} + \frac{1}{1+(\sqrt{3})^2} \cdot (2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi+6-3\sqrt{3}}{12} \approx \frac{18.56-5.19}{12} = \frac{13.35}{12} = 1.11$
   (e) $\sin 69^o = \sin 60^o + \cos 60^o \cdot 9^o \cdot \frac{\pi}{180^o} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{20} \approx \frac{1.73}{2} + \frac{0.157}{2} = 0.865 + 0.078 = 0.943$
   (f) $tg40 = tg45 + \frac{1}{\cos^2 45} \cdot (-5^o) \cdot \frac{\pi}{180} = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{3.14}{18} = 1 - 0.174 = 0.826$
3. provjera potvrđuje jednakost
4. dokaz završava traženom jednakosti
5. $df_{x=2} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}|_{x=2} \cdot dx = -\frac{\sqrt{17}}{15}.$
6. $dy = \frac{3x-3}{\sqrt{x}}$

7.8 Logaritamsko deriviranje

Logaritamsko deriviranje neophodno je kad se varijabla javlja u bazi i eksponentu, a može biti i zgodno, jer algebarski pojednostavljuje izraze potenciranja i korjenovanja.

Primjer 7.13 *Derivirati*

$$y = x^x.$$

Rješenje. Logaritmiranjem lijeve i desne strane dobiva se

$$\ln y = x \ln x$$

koji deriviramo kao implicitno zadanu funkciju:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Moguće je iskoristiti početnu jednakost i dobiti y' eksplicitno:

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

Zadatak 7.18 *Napišite prvu derivaciju funkcije*

$$y = (\sin x)^x.$$

Rješenje. Potpuno isti postupak kao u prethodnom primjeru daje:

$$\begin{aligned} \ln y &= x \ln \sin x \\ \frac{1}{y} y' &= \ln \sin x + x \frac{1}{\sin x} \cos x \\ y' &= (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cdot tgx \end{aligned}$$

Zadatak 7.19 *Derivirati*

$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Rješenje. Logaritmiranje i implicitno deriviranje daje

$$\begin{aligned} \ln y &= \sqrt{x} \ln x \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

Zadatak 7.20 *Derivirajte funkciju i napišite formulu prve derivacije:*

$$y = x^{x^x}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\ln y &= x^x \ln x \quad |\ln \\
\ln\ln y &= x\ln x + \ln\ln x \quad |' \\
\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{y'}{y} &= \ln x + 1 + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} \\
y' &= y\ln y\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}\right) \\
&= x^{x^x}\cdot x^x(\ln x)(\ln x + 1 + \frac{1}{x\ln x}) \\
&= x^{x^x}\cdot x^x(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Logaritamski derivirajte slijedeće funkcije:

1.
$$y = \cos^{\sin x} x.$$

2.
$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Primijenite logaritamsku derivaciju:

3. Odredite područje definicije funkcije

$$y = x\cdot\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-1)^5}}.$$

Napišite jednadžbe tangente i normale na graf zadane funkcije u točki $T(3,?)$. Koliku površinu omeđuju tangenta, normala i os ordinata.

Rješenja: 1. $y' = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$; 2. $y' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(\ln(1+\frac{1}{x})^x - \frac{1}{x+1}\right)$
3. Jedino ograničenje predstavlja nultočka nazivnika:

$$\mathcal{D} = \mathcal{R}\setminus\{5\}.$$

Vrijednost funkcije u zadanoj točki:

$$y(3) = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1\cdot 4}{2^5}} = \frac{3}{2}.$$

Logaritmiranje prije deriviranja:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x + \frac{1}{3}\left(2\ln(x-2) + \ln(x+1) - 5\ln(x-1)\right) \\
\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-1} \\
\frac{2}{3}\cdot y' &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} - \frac{5}{6} \\
y' &= -\frac{13}{8}
\end{aligned}$$

- tangenta: $13x + 8y - 51 = 0$;
- normala: $16x - 26y - 9 = 0$
- sjecište tangente s osi $0y$: $y_t = \frac{51}{8}$
- sjecište normale s osi $0y$: $y_n = -\frac{9}{26}$
- površina trokuta:

$$P = \frac{a\cdot v}{2} = 25\frac{35}{52}.$$

4. Izračunajte $y'(-2)$ ako je

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

Rješenje. $y'(-2) = \frac{8}{63}\sqrt[3]{\frac{7}{9}} \approx 0.12$

7.9 Derivacija funkcije zadane parametarski

Postoje krivulje čije točke po koordinatama generira parametar t. Uz uvjet da na intervalu $x \in [a, b]$ svaki vertikalni pravac siječe krivulju u **samo jednoj** točki, moguće je govoriti o **funkcijskoj** ovisnosti koordinate y o koordinati x.

Poznata krivulja koju bi opisivala svjetiljka zalijepljena na rub kotača bicikla polumjera a dok se vozi po ravnoj cesti je **cikloida**. Koordinate cikloide generirane kutom t za koji se zakrenuo kotač bicikla računaju se po formulama

$$\begin{aligned}
x &= a(t - \sin t) \\
y &= a(1 - \cos t)
\end{aligned}$$

Točka cikloide dobiva se uvrštavanjem parametra t u formule koje daju njene koordinate.

Derivacija isto tako mora ovisiti o parametru t. Formula derivacije kao funkcije od parametra t jest:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

gdje su $\dot{y}$ i $\dot{x}$ derivacije koordinatnih funkcija koje ovise o t.

Derivacija y' na parametarski zadanoj cikloidi tako je

$$y' = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

i definirana je za svaki t, osim u nultočkama nazivnika.

Zadatak 7.21 *Odredite točke u kojima prva derivacija ima prekid. Ispitajte*

$$\lim_{t \to 0^+} y' \quad i \quad \lim_{t \to 0^-} y'$$

i generalizirajte limese u točkama prekida.

Rješenje. Limesi:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} y' &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin^2 \frac{t}{2} \cdot t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 \cdot 4}} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot \frac{0}{4}} = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to 0^-} y' = -\infty$$

ukazuju da cikloida u točkama prekida prve derivacije ima "šiljke"

Odredite derivacije y' koje predstavljaju koeficijente smjera tangenti parametarski zadanih krivulja u slijedećim zadacima.

1. Krivulja je zadana parametarski

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$$

Odredite derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$.

2. Parametarski zadanoj funkciji

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

odredite derivaciju. Riješite se parametra t i napišite implicitnu i eksplicitnu jednadžbu za funkciju $y = y(x)$.

3. Ako je

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

parametarski zadana krivulja, odredite formulu prve derivacije i izračunajte vrijednost derivacije za točku određenu parametrom $t = 0$.

4. Krivulja je zadana parametarski:

$$\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

Odredite derivaciju

$$\frac{dy}{dx}.$$

5. Dokažite da funkcija y zadana parametarski jednadžbama

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

zadovojava *diferencijalnu jednadžbu*:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Rješenja zadataka 1-4.

1. Derivacija $\frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{t+1}$
2. Derivacija: $y' = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. Formula: $y^3 = x^2$, graf se sastoji od dva gornja dijela dviju parabola sa "šiljkom" u iskodištu i osima duž osi OX.
3. $\frac{dy}{dx} = -2e^{3t}$, vrijednost $y'(0) = -2$.
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2t}{1-t^2}$.

7.10 Derivacije višeg reda

Derivacija funkcije ponovo je funkcija. Deriviranjem derivacije dobiva se funkcija koja se naziva drugom derivacijom u oznaci y''.

Analogno se definira treća derivacija u oznaci y''', četvrta u oznaci $y^{(IV)}$ i tako dalje ...

Riješite zadatke:

1. Odredite četvrtu derivaciju $y^{(IV)}$ polinoma
$$y = 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 1.$$
2. Izračunajte vrijednost $y''(0)$ za funkciju
$$y = e^{x^2}.$$
3. Odredite formulu pete derivacije funkcije
$$y = \ln 2x.$$
Kako bi glasila formula 10. derivacije? A n-te?
4. Pokažite da funkcija
$$y = \frac{1}{2}x^2 e^x$$
zadovoljava diferencijalnu jednadžbu
$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Rješenja zadataka 1-3.

1. $y^{(IV)} = 360x - 48$
2. $y'' = 2e^{x^2}(1 + x^3)$
3. $y^{(V)} = \frac{24}{x^5}$, $y^{(X)} = -\frac{9!}{x^{10}}$; $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Formalno, zapis druge derivacije je derivacija po x prve derivacije:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

gdje je

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

formalni zapis koji se čita: "Dvaput deriviran y po varijabli x.

Primjer 7.14 *Pokazati da formula druge derivacije*

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

kod funkcije koja je parametarski zadana glasi:

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Primjena formalnog računa daje:

$$\begin{aligned} y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} \\ \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}} &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \end{aligned}$$

Zadatak 7.22 *Odredite y'' na elipsi zadanoj parametarski:*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Rješenje. Druga derivacija $y'' = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$.

7.11 Primjena derivacija u geometriji

Derivacija u geometriji ima značajnu ulogu u proučavanju kvalitativnih osobina krivulja i ploha. Ideja tangente u svojoj generalizaciji omogućava lokalnu organizaciju zakrivljenih ploha u ravninske.

1. Odredite domenu funkcije

   $$y = \ln\frac{x+1}{x-1}$$

   i napišite jednadžbu tangente u točki s apscisom $x = 2$.

2. Izračunajte površinu što je tangenta na krivulju

   $$y = x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + arctg\sqrt{x} - \sqrt{x},$$

   povučena u točki s apscisom $x = 3$ zatvara s koordinatnim osima.

3. Odredite domenu funkcije

$$y = \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}} + x\sin 4x$$

i napišite jednadžbu tangente u točki s apscisom $x = 1$.

4. Odredite jednadžbu tangente koja je na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ povučena u točki $(3, y < 0)$.

5. Izračunajte veličinu površine koju s koordinatnim osima zatvara tangenta povučena na hiperbolu $9x^2 - 16y^2 = 144$ u točki $(x < 0, 3)$

6. U kojoj je točki krivulje $y^2 = 2x^3$ tangenta okomita na pravac $4x - 3y + 2 = 0$?

7. Napišite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$ye^y = e^{x+1}$$

u točki $T(0, 1)$ zadane krivulje. Koliku površinu zatvaraju tangenta i normala s osi apscisa?

8. Funkcija je zadana formulom

$$f(x) = 2\arccos\frac{x-1}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

Nađite formulu inverzne funkcije. Nacrtajte inverznu funkciju i odre-dite jednadžbu tangente u točki $T(\frac{\pi}{3}, ?)$ grafa inverzne funkcije.

9. Odredite jednadžbe tangenata na graf funkcije

$$y = \frac{1-x}{2x+3}$$

okomitih na pravac $5x - y - 2 = 0$.

10. Izračunajte vrijednost parametra $k =?$ za koju je tangenta na graf funkcije

$$y = \ln(kx^2 - x + 1)$$

povučena u točki s apscisom $x = 3$ okomita na pravac $x+y+5 = 0$.

11. Koliku duljinu na tangenti, povučenoj na krivulju

$$arctg\frac{x}{y}+\frac{x}{y}=\ln(x^2+y^2)$$

u točki $(0,1)$, određuju točke u kojima tangenta siječe koordinatne osi?

12. Odredite domenu funkcije

$$y=\ln\frac{x-1}{x+1}$$

i nacrtajte u koordinatnom sustavu tangentu na graf funkcije povučenu u točki s apscisom $x=2$. Koliku duljinu ima dio tangente između njenih sjecišta s koordinatnim osima?

13. Napisati jednadžbu tangente i normale povučene na graf funkcije

$$y=(2x)^{3x}$$

u točki s apscisom $x=\frac{1}{2}$.

14. Napišite jednadžbe tangente i normale na krivulju

$$x^3+y^2+2x-6=0$$

u točki u kojoj je ordinata $y=3$.

15. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$y^4=4x^4+6xy$$

u točki $(1,2)$.

16. Naći jednadžbu tangente na krivulju

$$xy-tgx=0$$

u točki $A(\frac{\pi}{4},?)$.

17. Izračunajte površinu koju s osi $0x$ zatvaraju tangente na krivulju

$$3x^2-xy^2-3y+x=0$$

u točkama s ordinatom $y=1$.

18. Krivulja je zadana jednadžbom:

$$e^y \sin x - e^{-x} \cos y = 0.$$

Pokažite da točka $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ pripada krivulji. Napišite jednadžbu tangente povučene u zadanoj točki na zadanu krivulju.

19. Funkcija $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ naziva se area-sinus hiperbolni. Napišite formulu inverza i prvu derivaciju inverza zadane funkcije. Odredite jednadžbe tangente i normale na graf inverzne funkcije u točki s apscisom $x = 0$.

20. Funkcija je zadana formulom

$$y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{y-1}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

Napišite jednadžbu normale na graf funkcije inverzne zadanoj funkciji u točki s apscisom $x = \frac{\pi}{4}$. Nacrtajte graf inverzne funkcije.

21. Funkcija je zadana formulom

$$f(x) = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}}.$$

Odredite domenu. Izračunajte $f(0)$. Nađite jednadžbu tangenta na graf u ishodištu.

Kut pod kojim se sijeku krivulje u sjecištu računa se kao kut između tangenata na krivulje u njihovom sjecištu. Za kut φ između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$ u zajedničkoj točki $(x_0, y_0 = f(x_0) = g(x_0))$ vrijedi:

$$tg\varphi = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}.$$

22. Pod kojim kutevima sinusoide $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ sijeku os apscisa u ishodištu koordinatnog sustava?

23. Pod kojim se kutom sijeku parabole $y = (x-2)^2$ i $y = -4+6x-x^2$?

24. Pod kojim se kutem sijeku parabole $y = x^2$ i $y = x^3$?

25. Pokažite da se krivulje $y = 4x^2 + 2x + 8$ i $y = x^3 - x + 10$ diraju u točki $3, 34)$. Hoće li se dirati u u točki $(-2, 4)$?

26. Pokažite da se hiperbole $xy = a^2$ i $x^2 - y^2 = b^2$ sijeku pod pravim kutom.

Upute i rješenja prethodnih zadataka.

1. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

koja se rješava, nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika, analizom predznaka na brojevnom pravcu:

$x:$	$-\infty$		-1		1		∞
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$!$	$+$	

i glasi: $\mathcal{D} =< -\infty, -1 > \cup < 1, +\infty >$. Za tangentu imamo x-koordinatu dirališta $x_0 = 2$. Druga koordinata dobiva se po formuli

$$y_0 = \ln 3.$$

Koeficijent smjera tangente jednak je iznosu prve derivacije u točki dirališta:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1} \\ k = y'(x_0) &= -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

tako da jednadžba tangente može biti

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + \ln 3.$$

2. Koeficijent smjera tangente dobiva se postepeno:

$$\begin{aligned} y' &= \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ y'(3) &= \arcsin\sqrt{\frac{3}{4}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\pi\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 9}{24\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Druga koordinata dirališta dobiva se uvrštavanjem u funkcijsku formulu:

$$y_0 = 3 \cdot \arcsin\sqrt{\frac{3}{4}} + arctg\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}.$$

Jednadžba tangente za one koji, kao i vaši autori, nemaju računaljku, glasi:

$$y-\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}=\frac{4\pi\sqrt{3}+9\sqrt{3}-9}{24\sqrt{3}}(x-3).$$

Bez digitrona, sjecišta pravca s osi $0x$ i $0y$ su vrlo egzotična:

$$\begin{aligned} x &= \frac{45+27\sqrt{3}-20\pi\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{3}+9\sqrt{3}-9} \\ y &= \frac{12\pi+9-4\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Tražena površina je površina pravokutnog trokuta i glasi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{45+27\sqrt{3}-20\pi\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{3}+9\sqrt{3}-9}\cdot\frac{12\pi+9-4\sqrt{3}}{8}=\frac{260\pi\sqrt{3}+27\sqrt{3}+63+144\pi-240\pi^2}{64\pi+144-48\sqrt{3}},$$

približno u apsolutnoj vrijednosti 1.4958, odnosno 1.5 kvadrata.

3. Domena je rješenje

$$\frac{4-x}{2x-1}\geq 0.$$

Nultočke brojnika i nazivnika na brojevnom pravcu daju

$x:$	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$\frac{4-x}{2x-1}$		$-$	!	$+$	0	$-$	

domenu: $\mathcal{D}=<\frac{1}{2},4>$. Za tangentu treba:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= \sqrt{\frac{3}{1}}+\sin 4=\sqrt{3}+\sin 4 \end{aligned}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4-x}{2x-1}}}\cdot\frac{-(2x-1)-2(4-x)}{(2x-1)^2}+\sin 4x+x\cos 4x\cdot 4$$

$$y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-1-6}{1}+\sin 4+4\cos 4$$

Jednadžba tangente glasi

$$y-\sqrt{3}-\sin 4=\left(-\frac{7}{\sqrt{3}}+\sin 4+4\cos 4\right)(x-1)$$

ili približno $y=-7.4x+8.4$.

4. Deriviranjem lijeve i desne strane po x dobiva se

$$\begin{aligned} 2x+2yy' &= 0 \\ y' &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Točka dirališta ima koordinate $(3, -4)$, pa je

$$y'(3, -4) = \frac{3}{4}$$

i jednadžba tangente glasi:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}.$$

5. Prva koordinata dirališta dobiva se uvrštavanjem druge u jednadžbu hiperbole

$$\begin{aligned} 9x^2 &= 144 + 16 \cdot 9 \\ x^2 &= 32 \\ x &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Koeficijent smjera tangente dobiva se iz derivacije implicitno zadane funkcije:

$$\begin{aligned} 18x - 32yy' &= 0 \\ y' &= \frac{18 \cdot (-4)\sqrt{2}}{32 \cdot 3} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

otkuda jednadžba tangente glasi:

$$y - 3 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}(x + 4\sqrt{2}).$$

Rješavanjem jednadžbi nakon uvrštavanja $x = 0$, odnosno $y = 0$ dobivaju se sjecišta s osi $0y$ u $y = \frac{12-9\sqrt{2}}{4}$ i s osi $0x$ u $x = \frac{4\sqrt{2}-3}{2}$. Površina je pravokutnog trokuta

$$P = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{12 - 9\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2} - 3}{2} \right| = \frac{108 - 75\sqrt{2}}{16} = 0.12 \quad kvadrata.$$

6. Formula za računanje koeficijenta smjera tangente u proizvoljnoj točki krivulje dobiva se deriviranjem:

$$\begin{aligned} 2yy' &= 6x^2 \\ y' &= \frac{3x^2}{y} \end{aligned}$$

Zahtjev za okomitost tangente i zadanog pravca daje uvjet:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow k = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow y' = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} &= \frac{3x^2}{y} \\ y &= -4x^2 \end{aligned}$$

koji se uvrsti u jednadžbu krivulje:

$$\begin{aligned} 16x^4 &= 2x^3 \quad |:2x^2 \neq 0 \\ x &= \frac{1}{8} \\ y &= -4\frac{1}{64} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

i daje rješenje.

7. Koeficijent smjera tangente, tangenta i normala dobivaju se:

$$\begin{aligned} e^y y' + y e^y y' &= e^{x+1} \quad |(0,1) \\ y'e + y'e &= e \\ y' &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textit{tangenta}\ldots \qquad y = \frac{1}{2}x + 1 \\ &\textit{normala}\ldots \qquad y = -2x + 1 \end{aligned}$$

Tangenta siječe os $0x$ u točki $(-2, 0)$, a normala u $(1/2, 0)$. Tražena površina

$$P = \frac{2.5 \cdot 1}{2} = 1.25 \quad \textit{kvadrata}.$$

8. Inverz je formula koja računa x preko y:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} - \frac{\pi}{6} &= \arccos\frac{x-1}{2} \\ \cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{x-1}{2} \\ 2\cos\left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 &= x \\ f^{-1}(x) &= 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \quad |\cos\alpha = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f^{-1}(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \end{aligned}$$

Crta se sinusoida amplitude 2, periode 4π, početka u $-2\pi/3$, koja je podignuta za 1. Točka grafa

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

u kojem treba povući tangentu je

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\pi}{3} \\ y_0 &= 2\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 3, \end{aligned}$$

koeficijent smjera je

$$y' = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

pa jednadžba tangente glasi:

$$y - 3 = 0.$$

9. Koeficijent smjera tangente na pravac

$$y = 5x - 2$$

očito je

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{5} \\ y' &= \frac{-(2x+3) - 2(1-x)}{(2x+3)^2} = \frac{-5}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{5} = \frac{-5}{(2x+3)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} 2x+3=5 & 2x+3=5 \\ 2x=2 & 2x=-8 \\ x=1 & x=-4 \\ y=0 & y=\frac{5}{-5}=-1, \end{array}$$

stoga postoje dvije tangente:

$$\begin{aligned} t_1 \ldots \quad & x + 5y + 9 = 0 \\ t_2 \ldots \quad & x + 5y - 1 = 0. \end{aligned}$$

10. Tangenta povučena na zadani graf u točki $x = 3$ ima koeficijent smjera

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{kx^2 - x + 1} \cdot (2kx - 1) \\ y'(3) &= \frac{1}{9k-2} \cdot (6k-1) \\ y = -x - 5 \quad \Rightarrow & \quad y' = 1 \\ 9k - 2 &= 6k - 1 \\ k &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

11. Derivacija lijeve i desne strane po varijabli x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} + \frac{y - xy'}{y^2} &= \frac{1}{x^2 + y^2}(2x + 2yy') \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1} &= \frac{1}{1} \cdot (0 + 2y') \\ 2 &= 2y' \\ y' = 1 & \end{aligned}$$

Tangenta $y-1 = x$ odsjeca koordinatne osi u $(0,1)$ i $(-1,0)$, pa po Pitagorinu teoremu tražena duljina iznosi:

$$d^2 = 1 + 1$$

oko 1.4 jedinične duljine.

12. Domena je rješenje nejednadžbe

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

i dobiva se nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika na brojevnom pravcu:

$x:$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{x+1}$		$+$	!	$-$	0	$+$	

Domena je $\mathcal{D} =< -\infty, -1 > \cup < 1, +\infty >$. Ordinata dirališta dobiva se računanjem vrijednosti funkcije:

$$y_0 = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3,$$

a koeficijent smjera tangente je vrijednost prve derivacije:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \\ y'(2) &= 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

a iz jednadžbe tangente $y + \ln 3 = \frac{2}{3}(x-2)$ odrede se sjecišta s koordinatnim osima: $(0, -\frac{4}{3} - \ln 3)$ i $\frac{3\ln 3}{2} + 2, 0)$. Pitagorin poučak daje

$$\begin{aligned} d^2 &= (\frac{4}{3} + \ln 3)^2 + (\frac{3\ln 3}{2} + 2)^2 \\ d^2 &= \frac{13\ln^2 3}{4} + \frac{26\ln 3}{3} + \frac{52}{9} \\ d &\approx 74.4 \end{aligned}$$

13. Dirалište:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} \\ y_0 &= (2 \cdot \frac{1}{2})^{3\cdot\frac{3}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Koeficijent smjera tangente logaritamskim deriviranjem:

$$\begin{aligned} \ln y &= 3x \cdot \ln 2x \quad |' \\ \frac{1}{y}y' &= 3\ln 2x + 3x\frac{1}{2x}2x \\ y' &= 3. \end{aligned}$$

Jednadžba tangente je

$$y - 1 = 3(x - \frac{1}{2}),$$

a normale glasi

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}).$$

14. Apscisa dirališta dobiva se iz jednadžbe

$$x^3 + 2x + 3 = 0$$

pogađanjem: $x = -1$. Talijanski matematičar Cardano našao je postupak za rješavanje jednadžbi trećeg reda, ali to nažalost prelazi okvire kolegija "Matematike 1". Koeficijent smjera tangente:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yy' + 2 &= 0 \\ y' &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

daje jednadžbe:

$$\begin{aligned} &\textit{tangente}\ldots \qquad y - 3 = -\frac{5}{6}(x+1) \\ &\textit{normale}\ldots \qquad y - 3 = \frac{6}{5}(x+1) \end{aligned}$$

15. Derivacija implicitno zadane funkcije daje koeficijent smjera tangente:

$$\begin{aligned} 4y^3y' &= 16x^3 + 6y + 6xy' \\ 16y' &= 16 + 12 + 6y' \\ y' &= 2.8 = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

nakon čega jednadžba tangente glasi:

$$y - 2 = \frac{14}{5}(x-1),$$

a normale

$$y - 2 = -\frac{5}{14}(x-1).$$

16. Ordinata točke dobiva se rješavanjem jednadžbe:

$$\frac{\pi}{4}y - 1 = 0$$
$$y = \frac{4}{\pi} \approx 1.273,$$

dok se nakon koeficijenta smjera

$$\begin{aligned} y + xy' - \frac{1}{\cos^2 x} &= 0 \\ y' &= \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2} \approx 0.925 \end{aligned}$$

dobiva jednadžba tangente $y - 1.3 = 0.9(x - 0.8)$ s pristojnom pouzdanošću.

17. Dvije su točke krivulje s istom ordinatom

$$3x^2 - x - 3 + x = 0$$
$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$
$$y_1 = 3 \quad y_2 = 3$$

Koeficijenti smjerova dobivaju se derivacijom implicitno zadane funkcije:

$$\begin{aligned}
3x^2 - xy^2 - 3y + x &= 0 \\
6x - y^2 - 2xyy' - 3y' + 1 &= 0 \\
6x - y^2 + 1 &= y'(2xy + 3) \\
y' &= \frac{6x - y^2 + 1}{2xy + 3} \\
y'(1,3) &= \frac{6 - 9 + 1}{6 + 3} = -\frac{2}{9} \\
y'(1,3) &= \frac{-6 - 9 + 1}{-6 + 3} = \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

i daju dvije tangente:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$
$$y - 3 = \frac{14}{3}(x + 1)$$

Tangente sijeku os apscisa u točkama $(11/2, 0)$ i $(-23/4, 0)$, a sjecište je u točki $(-3/4, 25/6)$. Iz lijepog i preglednog crteža moguće je dobiti površinu trokuta:

$$P = \frac{\frac{45}{4} \cdot \frac{25}{6}}{2} = 23.4375 \quad kvadrata.$$

18. Provjera je trivijalna. Koeficijent smjera tangente nakon deriviranja:

$$\begin{aligned}
e^y y' \sin x + e^y \cos x + e^{-x} \cos y + e^{-x} \sin y \cdot y' &= 0 \quad |(0, \pi/2) \\
e^{\pi/2} + y' &= 0 \\
y' &= e^{\pi/2} \approx 4.810
\end{aligned}$$

daje tangentu:

$$y - \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

19. Area-sinus hiperbolni $Arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ima inverz:

$$\begin{aligned}
y &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\
e^y &= x + \sqrt{x^2 + 1} \\
(e^y - x)^2 &= x^2 + 1 \\
e^{2y} - 2xe^y + x^2 &= x^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{2y}-1 &= 2xe^y\\
x &= \frac{e^{2y}-1}{2e^y}\\
x=f^{-1}(y) &= \frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
shx &= \frac{e^x-e^{-x}}{2},
\end{aligned}$$

sinus hiperbolni. Prva derivacija sinusa hiperbolnog je

$$\frac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x}\cdot(-1))=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$$

ili kosinus hiperbolni. U točki

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
y_0 &= 0\\
y'(x_0) &= 1\\
y=x &
\end{aligned}$$

20. Inverz:

$$\begin{aligned}
2y-\pi &= \arcsin\frac{y-1}{3}\\
\sin(2y-\pi) &= \frac{y-1}{3}\\
3\sin(2y-\pi)-1 &= x\\
f^{-1}(x) &= 3\sin(2x-\pi)+1.
\end{aligned}$$

Tangenta na graf inverza:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \pi/4\\
y_0 &= f^{-1}(x_0)=3\sin(\pi/2-\pi)+1=-3+1=-2\\
y' &= 3\cos(2x-\pi)\cdot 2\\
y'(x_0) &= 0\\
tangenta\ldots &\quad y=-2\\
normala\ldots &\quad x=\pi/4.
\end{aligned}$$

21. Domena se dobiva rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}>0.$$

Nejednadžba se rješava analizom predznaka brojnika:

$$\begin{aligned}
1-\sqrt[3]{x} &= 0\\
x &= 1,
\end{aligned}$$

koji je pozitivan za $x < 1$. Nazivnik je uvijek pozitivan, kao rezultat drugog korjena. Pitanje je da li se korjenovati uvijek može. Analiza izraza pod korijenom počinje traženjem nultočaka:

$$\begin{aligned}
1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2} &= 0\\
/\sqrt[3]{x} &= t/\\
1+t+t^2 &= 0\\
t_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\\
t &\in \emptyset.
\end{aligned}$$

Nepostojanje nultočaka ukazuje da je izraz ispod korijena uvijek pozitivan.

$$\mathcal{D}=\mathcal{R}.$$

Nadalje, $f(0)=0$. Za jednadžbu tangente potrebno je odrediti koeficijent smjera:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}{1-\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}-(1-\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\
&= \frac{-\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}(1-\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1-x}\\
&= \frac{-2-2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2}-(1-\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x^2})}{6\sqrt[3]{x}(1-x)}\\
&= \frac{-3-3\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[3]{x}(1-x)}=-\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}(1-x)}
\end{aligned}$$

koji u ishodištu nije izračunljiv. Analizom granične vrijednosti:

$$\lim_{x\to 0}-\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}(1-x)}=\pm\infty$$

dobiva se beskonačno velik koeficijent smjera, čije je geometrijsko značenje vertikala $x=0$.

22. Vrijednosti:

$$\begin{aligned}
y_1'=\cos x &\Rightarrow y_1'(0)=1\\
y_2'=\cos x\cdot 2 &\Rightarrow y_2'(0)=2\\
tg\varphi &= \frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}\\
\varphi &= 18^o
\end{aligned}$$

23. Sjecište parabola:

$$(x-2)^2 = -4+6x-x^2$$

$$\begin{aligned}
2x^2 - 10x + 8 &= 0 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1' = 2(x-2) \Rightarrow y_1'(4) = 4 \qquad y_2'(1) = -2 \\
y_2' = 6 - 2x \Rightarrow y_2'(4) = -2 \qquad y_2'(1) = 4 \\
tg\varphi(4) = \frac{6}{-7}, \qquad \varphi = -41^o \Rightarrow 41^o \\
tg\varphi(1) = \frac{6}{7}, \qquad \varphi = 41^o.
\end{aligned}$$

Kutevi su u obje točke jednaki jer se za kut između pravaca uzima šiljasti kut.

24. Parabole imaju dva sjecišta: $(0,0)$ i $(1,1)$. Koeficijenti smjerova tangenti u sjecištima:

$$\begin{array}{lll}
y_1' = 2x & y_1'(0) = 0 & y_1'(1) = 3 \\
y_2' = 3x^2 & y_2'(0) = 0 & y_2'(1) = 3
\end{array}$$

ukazuju da se krivulje u ishodištu diraju, dok se u $(1,1)$ sijeku pod kutem:

$$tg\varphi = \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7} \Rightarrow \varphi = 8^o.$$

25. Točka $(3,4)$ zajednička je za obje krivulje. Iz računa:

$$\begin{array}{lll}
y_1' = 8x + 2 & y_1'(3) = 26 & y_1'(-2) = -14 \\
y_2' = 3x^2 - 1 & y_2'(3) = 26 & y_2'(-2) = 11
\end{array}$$

ispada da se u prvoj točki diraju, a u drugoj točki ne.

26. Računaje koeficijenta smjera za obje hiperbole:

$$\begin{array}{cc}
y + xy' = 0 & 2x + 2yy' = 0 \\
y' = -\frac{y}{x} & y' = \frac{x}{y}
\end{array}$$

vodi na uvjet okomitosti tangenti u zajedničkim točkama

$$y_1' \cdot y_2' = -\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = -1.$$

8 Primjene derivacija

Jednostavnost i razrađenost tehnike deriviranja omogućavaju primjenu derivacija u svim područjima ljudske djelatnosti. U ovoj zbirci su obuhvaćene primjene u geometriji.

8.1 Ekstremi. Intervali monotonosti

Funkcije koje se obrađuju u ovoj točki eksplicitno su zadane formulom

$$y = f(x).$$

Funkcija raste na intervalu $< a, b >$ ako vrijedi:

$$x_1, x_2 \in < a, b >, \quad x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ako na intervalu $< a, b >$ vrijedi

$$f'(x) > 0 \quad x \in < a, b >,$$

tada je funkcija rastuća na intervalu $< a, b >$.

Funkcija pada na intervalu $< a, b >$ ako vrijedi:

$$x_1, x_2 \in < a, b >, \quad x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Ako na intervalu $< a, b >$ vrijedi

$$f'(x) < 0 \quad x \in < a, b >,$$

tada je funkcija padajuća na intervalu $< a, b >$.

Interval monotonosti funkcije je interval na kojem funkcija stalno raste ili stalno pada.

Lokalni maksimum funkcije je vrijednost funkcije $f(x_1)$ za koju postoji $\delta > 0$ tako da

$$|x - x_1| < \delta \quad \Rightarrow f(x) < f(x_1).$$

Lokalni minimum funkcije je vrijednost funkcije $f(x_2)$ za koju postoji $\delta > 0$ tako da

$$|x - x_1| < \delta \quad \Rightarrow f(x) > f(x_2).$$

Singularna točka domene je ona vrijednost varijable x_0 za koju je

$$f'(x_0) = 0.$$

Lokalni minimumi i maksimumi nazivaju se lokalnim ekstremima funkcije. Lokalni ekstremi funkcije vrijednosti poprimaju samo u singularnim točkama, no postoje singularne točke u kojima funkcija ne poprima ekstremnu vrijednost.

Primjer 8.1 *Točka $x_0 = 0$ singularna je točka funkcije $y = x^3$, no funkcija u toj točki ne postiže lokalni ekstrem.*

Dokaz. Prva derivacija $y' = 3x^2$ očito pokazuje da je $x_0 = 0$ stacionarna točka. No, na intervalu $x \in < -\infty, 0 >$ vrijedi da je $y(x) < 0 = y(0) = 0$, dok na intervalu $x \in < 0, +\infty >$ vrijedi $y(0) = 0 < y(x)$.

Nužan uvjet za postojanje ekstrema u točki x_0 je:

$$f'(x_0) = 0.$$

Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema je promjena predznaka prve derivacije u nultočki.

Druga derivacija svojom pozitivnošću u singularnoj točki ukazuje na lokalni minimum, a svojom negativnošću ukazuje na lokalni maksimum. Slabe strane provjere drugom derivacijom su obaveza deriviranja i slučaj kad je i druga derivacija jednaka nuli, kao u primjeru.

Zadatak 8.1 *Odredite intervale monotonosti funkcije*

$$y = x^2 - 2x + 5.$$

Rješenje. Domena funkcije je $\mathcal{R}$. Nužan uvjet:

$$\begin{aligned} y' &= 2x - 2 \\ y' &= 0 \quad \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Analiza predznaka na brojevnom pravcu:

$$\begin{array}{l|ccccc} x: & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & \\ y & & \searrow & 4 & \nearrow & \end{array}$$

daje:
interval pada: $< -\infty, 1 >$
interval rasta: $< 1, +\infty >$
minimum u točki $T_{min} = (1, 4)$.

Zadatak 8.2 *Odredite intervale monotonosti funkcije*

$$y = \frac{x}{x-2}.$$

Rješenje. Domena funkcije očito je

$$\mathcal{D} =< -\infty, 2 > \cup < 2, +\infty >,$$

jer jedini uvjet na računanje vrijednost funkcije predstavlja dijeljenje koji u nuli nije definirano.

Prva derivacija

$$y' = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

definirana je na cijeloj domeni. Očito je da prva derivacija poprima samo negativne vrijednost, jer je nazivnik kao kvadrat, uvijek pozitivan broj.

Odgovor: Intervali pada funkcije su $< -\infty, 2 >$ i $< 2, +\infty >$.

Zadatak 8.3 *Za funkciju*

$$f(x) = x \ln x$$

odredite intervale monotonosti.

Rješenje. Budući se logaritmirati mogu samo pozitivni brojevi, domena funkcije je

$$\mathcal{D} =< 0, +\infty > .$$

Prva derivacija

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

ima nultočku za

$$\begin{aligned} \ln x + 1 &= 0 \\ \ln x &= -1|_e \\ x &= e^{-1} = \frac{1}{e} = 0.36788 \end{aligned}$$

Domena se ovom nultočkom dijeli na dva dijela:

$$\mathcal{D} =< 0, \frac{1}{e} > \cup < \frac{1}{e}, +\infty > .$$

Ni na jednom dijelu nultočaka više nema. Uzimanjem točke:

$$0.1 \in < 0, 0.36788 >$$

i uvrštavanjem u prvu derivaciju dobiva se

$$y'(0.1) = \ln 0.1 - 1 = -1.30$$

negativna vrijednost, koja zbog neprekidnosti prve derivacije na intervalu $< 0, \frac{1}{e} >$ povlači da je prva vrijednost negativna na cijelom intervalu. Naime, promjena predznaka neprekidne funkcije povlači nužno postojanje nultočke.

Analogno, uvrštavanjem vrijednosti varijable $10 \in < \frac{1}{e}, +\infty >$ u formulu prve derivacije:

$$y'(10) = \ln 10 + 1 = 3.30$$

pozitivna vrijednost ukazuje da je prva derivacija pozitivna na cijelom intervalu $< \frac{1}{e}, +\infty >$.

Odgovor: Interval rasta funkcije je $\frac{1}{e}, +\infty >$, a interval pada $< 0, \frac{1}{e} >$.

Napomena 8.1 *Promjena vrijednosti neprekidne funkcije slična je promjeni temperature.* ***Negativna temperatura*** *pri prirodnom, neprekidnom, prijelazu u* ***pozitivnu*** *mora* ***bar*** *u* ***jednom*** *trenutku biti* ***nula****. Eksplozija mine u snijegu ili puštanje CO_2 iz boce u požaru nisu neprekidne promjene temperature.*

Zadatak 8.4 *Ispitajte monotonost funkcije*

$$y = \arcsin(1 + x).$$

Rješenje. Domena funkcije dobiva se iz ograničenja:

$$\begin{aligned} -1 \leq 1 + x \leq 1 &| - 1 \\ -2 \leq x \leq 0 \\ \mathcal{D} = [-2, 0] \end{aligned}$$

Prva derivacija

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 + x)^2}} > 0$$

daje rast funkcije na cijeloj domeni $[-2, 0]$.

Zadatak 8.5 *Odredite lokalne ekstreme funkcije*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

Rješenje. Funkcija nije definirana u nultočki nazivnika:

$$\begin{aligned} x - 1 &\neq 0 \\ x &\neq 1 \\ \mathcal{D} = R \setminus \{1\} &= \ < -\infty, 1 > \cup < 1, +\infty > . \end{aligned}$$

Nultočke prve derivacije:

$$\begin{aligned} y' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2} &= 0 \\ \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} &= 0 | \cdot (x - 1)^2 \\ x(x - 2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Nultočke i točka prekida dijele skup realnih brojeva na tri dijela:

$$< -\infty, 0 > \cup < 0, 1 > \cup < 1, 2 > \cup < 2, +\infty > .$$

Uvrštavanjem u prvu derivaciju po jedne točke svakog segmenta dobiva se

$$\begin{aligned}
-2 \in < -\infty, 0 > \quad &\Rightarrow \quad y'(-2) = \frac{8}{9} > 0 \\
0.5 \in < 0, 1 > \quad &\Rightarrow \quad y'(0.5) = \frac{-0.75}{0.25} < 0 \\
1.5 \in < 1, 2 > \quad &\Rightarrow \quad y'(1.5) = \frac{-2.75}{0.25} < 0 \\
3 \in < 2, +\infty > \quad &\Rightarrow \quad y'(3) = \frac{3}{4} > 0
\end{aligned}$$

- točka lokalnog maksimuma $(0, -2)$, budući funkcija raste do 0, a zatim pada
- točka lokalnog minimuma $(2, 2)$, jer funkcija pada za manje, a raste za vrijednosti varijable veće od 2.

Zadatak 8.6 *Naći ekstreme funkcije*

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 3}.$$

Rješenje. Budući je funkcija definirana na cijelom $\mathcal{R}$, nužan uvjet traži nultočku prve derivacije:

$$\begin{aligned}
y' = \frac{3x^2(x^2+3) - x^3(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2} \quad &= \quad 0 \\
x^2 \quad &= \quad 0 \\
x_0 = 0 &
\end{aligned}$$

Nultočke druge derivacije dijeli domenu $\mathcal{D} = \mathcal{R}$ na dva dijela

$$< -\infty, 0 > \cup < 0, +\infty > .$$

Uvrštavanjem broja $-1 \in < -\infty, 0 >$ u formulu

$$y'(-1) = \frac{1 \cdot 10}{16} > 0,$$

a zatim $1 \in < 0, +\infty >$:

$$y' = \frac{1 \cdot 10}{14} > 0$$

postaje jasno da funkcija ne mijenja tok, već je rastuća na oba dijela. Zbog toga singularna točka nije točka ekstrema.

Zadatak 8.7 *Nađite lokalne ekstreme funkcije zadane formulom*

$$y = x^2 e^{-x}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{R} \\ y' = 2xe{-}x + x^2e^{-x} \cdot (-1) &= xe^{-x}(2-x) \\ y' = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2-x) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Analiza na brojevnom pravcu daje:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	
			min		*max*		

Zadatak 8.8 *Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije*

$$y = x\ln^2 x.$$

Rješenje. Domena je ograničena logaritmom:

$$\mathcal{D} =< 0, +\infty > .$$

Nultočke prve derivacije:

$$\begin{aligned} y' = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} &= 0 \\ \ln x(\ln x + 2) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= e^{-2} \end{aligned}$$

vode na analizu predznaka prve derivacije na domeni:

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Analiza daje rast funkcije na intervalima

$$< 0, \frac{1}{e^2} > \cup < 1, +\infty >$$

i pad funkcije na intervalu

$$< \frac{1}{e^2}, 1 > .$$

Lokalni maksimum iznosi $\frac{4}{e^2}$ i postiže se za $x_1 = \frac{1}{e^2}$, a lokalni minimum je točka $(1, 0)$.

Zadatak 8.9 *Odredite i klasificirajte lokalne ekstreme funkcije*

$$y = 2\sin 2x + \sin 4x.$$

Rješenje. Domena je $\mathcal{R}$. Prva derivacija:

$$\begin{aligned}
y' = 2\cos 2x \cdot 2 + \cos 4x \cdot 4 &= 0\\
4\cos 2x + 4\cos 4x &= 0| : 4\\
\cos 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x &= 0\\
\cos 2x + \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) &= 0\\
2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 &= 0, \qquad \cos 2x = t\\
2t^2 + t - 1 &= 0\\
t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}&\\
t_1 = -1; \qquad t_2 = \frac{1}{2}&
\end{aligned}$$

daje beskonačno mnogo nultočaka:

$$\begin{array}{cc}
\cos 2x = -1 & \cos 2x = \frac{1}{2}\\
2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathcal{Z} & 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathcal{Z}\\
x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathcal{Z} & x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathcal{Z}
\end{array}$$

pomoću kojih se analizira predznak prve derivacije na brojevnom pravcu:

x	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} \simeq -\frac{\pi}{2}$	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$

Analiza pokazuje da su lokalni minimumi funkcije u točkama $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}, k \in \mathcal{Z}$, dok lokalne maksimume funkcija postiže u točkama $\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}, k \in \mathcal{Z}$.

U slijedećim zadacima samostalno odgovorite na zahtjeve.

1. Odredite intervale monotonosti i ekstreme funkcije zadane formulom:

$$y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

2. Odredite domenu i intervale monotonosti funkcije

$$y = \frac{x}{ln^2 x}$$

3. Odredite domenu i intervale monotonosti funkcije

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

4. Odredite domenu, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$y = \ln \frac{2x-3}{x-1}$$

5. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$y = xe^{x-x^2}$$

6. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme slijedećih funkcija:

   (a)
   $$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$$

   (b)
   $$y = \frac{x^3 - x^2}{e^{-x}}$$

   (c)
   $$y = \ln^4 x - \ln^2 x$$

7. Odredite područje definicije i klasificirajte lokalne ekstreme funkcije

$$y = x - 2\sin^2 x$$

8. Odredite lokalne ekstreme funkcije:

$$y = \frac{x^3}{x^2+3}$$

9. Odredite intervale monotonosti funkcije:

$$f(x) = \frac{\ln x - x}{x}$$

Upute i rješenja zadataka 1.-9.

1. Domena $\mathcal{D} = (0, +\infty)$. Prva derivacija i njena nultočka:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^2} = \frac{1 - 2\ln x}{x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 - 2\ln x = 0 \\ \frac{1}{2} = \ln x \\ x = e^{1/2} \approx 1.649 \end{array}$$

Analiza predznaka na brojevnom pravcu:

$x:$	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
y'	!	$+$	0	$-$	
y	!	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	

daje odgovore:

- interval rasta: $(0, e^{1/2})$
- interval pada: $(e^{1/2}, +\infty)$
- (lokalni) maksimum $M = (e^{1/2}, \frac{1}{2e})$

2. Zbog nazivnika koji ne smije biti nula,

$$\mathcal{D} = <0, 1> \cup <1, +\infty> .$$

Prva derivacija:

$$y' = \frac{\ln^2 x - x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x(\ln x - 2)}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}.$$

Analiza predznaka provodi se nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika:

$$\begin{array}{cc} \ln x = 2 & \ln x = 0 \\ x = e^2 \approx 7.389 & x = 1. \end{array}$$

Na brojevnom pravcu:

$x:$	0		1		e^2		$+\infty$
y'	!	$+$	!	$-$	0	$+$	
y	!	$\nearrow$	!	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	

dobivaju se odgovori:

$$\begin{array}{rl} intervali \quad rasta & <0, 1> \cup <e^2, +\infty> \\ interval \quad pada & <1, e^2> \\ lokalni \quad minimum & (e^2, \dfrac{e^2}{4}) \end{array}$$

3. Domena: $\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \{-1, 1\}$ Iz formule prve derivacije

$$y' = \frac{x^2 - 1 - 2x \cdot x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$$

zaključuje se da je prva derivacija uvijek negativna, pa je funkcija padajuća na cijeloj domeni.

4. Domena je rješenje nejednadžbe:

$$\frac{2x-3}{x-1} > 0.$$

Nultočke brojnika i nazivnika na brojevnom pravcu daju

$x:$	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
$x\frac{2x-3}{x-1}$		$+$	$!$	$-$	0	$+$	

domenu

$$\mathcal{D} = <-\infty, 1> \cup <3/2, +\infty> .$$

Prva derivacija

$$y' = \frac{x-1}{2x-3} \cdot \frac{2(x-1)-(2x-3)}{x-1} = \frac{2x-1-2x+3}{(2x-3)(x-1)} = \frac{2}{(2x-3)(x-1)}$$

nakon analogne analize daje rastuću monotonost funkcije na cijeloj domeni.

5. Funkcija je definirana na cijelom $\mathcal{R}$. Prva derivacija i nultočke:

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x-x^2} + x \cdot e^{x-x^2} \cdot (1-2x) = e^{x-x^2} \cdot (1 + x - 2x^2) \\
y' &= 0 \\
2x^2 - x - 1 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

brojevni pravac:

$x:$	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	$-\frac{e^{-3/4}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	

intervali monotonosti:

$$\begin{aligned}
&\textit{intervali} \quad \textit{pada}: && <-\infty, -1/2> \cup <1, +\infty> \\
&\textit{interval} \quad \textit{rasta}: && <-1/2, 1>
\end{aligned}$$

$$\textit{lokalni} \quad \textit{minimum} \quad (-1/2, \frac{-e^{-3/4}}{2}), \qquad \textit{lokalni} \quad \textit{maksimum} \quad (1,1)$$

6. Rješenja:

(a) $\mathcal{D} = \mathcal{R}$.

$$y' = 2x^2 - 2$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow \quad x_= 1, x_2 = -1$$

$x:$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	

$$\begin{array}{rl} \textit{raste} & <-\infty,-1> \cup <1,+\infty> \\ \textit{pada} & <-1,1> \\ T_{max} = (-1, \dfrac{7}{3}) & T_{min} = (1, -\dfrac{1}{3}) \end{array}$$

(b) Područje definicije $\mathcal{R}$. Slijedi analiza prve derivacije. Radi jednostavnosti deriviranja, mudro je algebarski dotjerati formulu funkcije:

$$y = e^x(x^3 - x^2).$$

Nadalje:

$$\begin{aligned} y' &= e^x(x^3 - x^2) + e^x(3x^2 - 2x) = e^x(x^3 + 2x^2 - 2x) = xe^x(x^2 - 2x - 2) \\ y' &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_{2,3} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ x_2 &= -1 - \sqrt{3} \\ x_3 &= -1 + \sqrt{3} = 0.73 \end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$e^{-1-\sqrt{3}}(-14-4\sqrt{3})$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-2e^{-1+\sqrt{3}}(13-8\sqrt{3})$	$\nearrow$	

$$\begin{array}{rl} \textit{intervali pada} & <-\infty,-1-\sqrt{3}> \cup <0,-1+\sqrt{3}> \\ \textit{intervali rasta} & <-1-\sqrt{3},0> \cup <-1+\sqrt{3},+\infty> \\ \textit{lokalni minimumi}: & (-1-\sqrt{3}, -e^{-1-\sqrt{3}}(14+4\sqrt{3}) \approx -1.36), \\ & (-1-\sqrt{3}, -2e^{-1+\sqrt{3}}(13-8\sqrt{3}) \approx 3.56) \\ \textit{lokalni maksimum} & (0,0) \end{array}$$

(c) Domena je $<0,+\infty>$. Prva derivacija:

$$y' = 4\ln^3 x \cdot \frac{1}{x} - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x(2\ln^2 x - 1)}{x}$$

daje nultočke:

$$\begin{array}{lll} \ln x = 0 & \ln^2 x = \frac{1}{2} & \\ x_1 = 1 & \ln x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \ln x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ & x_2 = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 2 & x_3 = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0.5 \end{array}$$

koje na brojevnom pravcu daju analizu:

$x:$	0		$e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$		1		$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$		$+\infty$
y'	!	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	!	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

koja iznjedruje

- intervale pada: $< 0, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} > \cup < 1, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} >$
- intervale rasta: $< e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, 1 > \cup < e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, +\infty >$
- lokalni maksimum: $(1, 0)$
- lokalni minimumi: $(e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\frac{1}{4})$, $(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, -\frac{1}{4})$.

7. Područje definicije je $\mathcal{R}$. Prva derivacija

$$y' = 1 - 4\sin x \cos x = 1 - 2\sin 2x$$

daje kandidate za ekstreme u stacionarnim točkama:

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ 1 &= 2\sin 2x \\ 2x_1 &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{12} + k\pi \\ 2x_2 &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{aligned}$$

Analiza predznaka y' najočitija je na trigonometrijskoj kružnici. Radi neznanja o crtanju kružnice, autori su prisiljeni analizu napraviti na dijelu pravca:

$x:$	$\frac{5\pi}{12} - \pi$		$\frac{pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12} + \pi \equiv \frac{5\pi}{12} - \pi$
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Analiza klasificira

- lokalni maksimumi za $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$
- lokalni minimumi za $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

8. Domena $\mathcal{R}$. Iz formule

$$y' = \frac{3x^2(x^2+3) - 2x \cdot x^3}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4+9x^2}{(x^2+3)^2}.$$

slijedi da je nemoguće naći nultočku, pa time ni ekstrem.

9. Domena

$$\mathcal{D} = < 0, +\infty > .$$

Prva derivacija

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{x} - 1)x - (\ln x - x)}{x^2} = \frac{1 - x - \ln x + x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

je pozitivna na intervalu $< e, +\infty >$, a negativna na $< 0, e >$, pa su to i intervali rasta, odnosno pada.

8.2 Točke infleksije. Intervali konveksnosti i konkavnosti

Konveksno prema gore je zakrivljen graf funkcije koji odozdo omeđuje konveksni dio ravnine. Na intervalu konveksne zakrivljenosti druga derivacija je pozitivna.

Konkavno prema gore je zakrivljen graf funkcije koji odozdo omeđuje konkavni dio ravnine. Na intervalu konkavne zakrivljenosti druga je derivacija negetivna.

Točka infleksije je točka grafa $(x_0, f(x_0))$ u kojoj funkcija mijenja način zakrivljenosti. U točki infleksije druga derivacija jednaka je nuli, no obrat ne vrijedi.

Zadatak 8.10 *Odredite točke infleksije grafa funkcije*

$$y = e^{-x^2}.$$

Rješenje. Domena funkcije cijeli je $\mathcal{R}$.

Prva derivacija

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

Druga derivacija

$$y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Nultočke druge derivacije:

$$\begin{aligned}
-2e^{-x^2}(1-2x^2) &= 0 \\
1-2x^2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{1}{2} \\
x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
x_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Analiza predznaka druge derivacije izvodi se na brojevnom pravcu:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cup$	$e^{-1/2}$	$\cap$	$e^{-1/2}$	$\cup$	

Zaključak je da su točke infleksije $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$ i $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2})$.

Zadatak 8.11 *Nađite točke infleksije polinoma*

$$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7.$$

Rješenje. Domena je $\mathcal{R}$. Kandidate za točke infleksije nakon deriviranja su:

$$\begin{aligned}
y' &= 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12 \\
y'' &= 36x^2 - 60x - 24 \\
36x^2 - 60x - 24 &= 0| : 12 \\
3x^2 - 5x - 2 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Analiza na brojevnom pravcu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\cup$	$-\frac{322}{27}$	$\cap$	-43	$\cup$	

pokazuje da se infleksija postiže u točkama domene $x_1 = -\frac{1}{3}$ i $x_2 = 2$.

Zadatak 8.12 *Odredite intervale monotonosti i točke infleksije funkcije*

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rješenje. Funkcija je definirana na svim realnim brojevima. Prva i druga derivacija daju:

$$y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(1+x^2)(1+x^2+2(1-x^2))}{(1+x^2)^4}$$

$$\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\sqrt{3}$$

$$x_3 = \sqrt{3}$$

Analiza predznaka druge derivacije na brojevnom pravcu daje:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cup$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cap$	0	$\cup$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cap$	

intervale konveksnosti:

$$< -\sqrt{3}, 0 > \cup < \sqrt{3}, +\infty >,$$

intervale konkavnosti:

$$< -\infty, -\sqrt{3} > \cup < 0, \sqrt{3} >$$

i točke infleksije:

$$(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}), (0,0), (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$$

Slijedeće zadatke pokušajte riješiti samostalno. Nemojte se zadržavati na zadatkima koji su vam teški, već nastojte riješiti što više zadataka.

1. Odredite intervale zakrivljenosti i točke infleksije grafova funkcija:

   (a)
   $$y = 3x^5 - 2x^6$$

   (b)
   $$y = \frac{x^4}{x^3-1}$$

   (c)
   $$y = xe^{1-x}$$

   (d)
   $$y = \frac{x}{x^2+1}$$

(e)

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$

(f)

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

(g)

$$y = \arcsin \frac{1}{x-1}$$

2. Nadjite točke infleksije funkcija:

(a)

$$y = e^{-x^2}$$

(b)

$$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$$

(c)

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

(d)

$$y = \sin^3 x$$

Upute i rješenja

1. *Prvi zadatak*

(a) Domena je $\mathcal{R}$. Slijedi

$$\begin{aligned} y' &= 15x^4 - 12x^5 \\ y'' &= 60x^3 - 60x^4 = 60x^3(1-x) \\ y'' = 0 & \quad \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\cap$	0	$\cup$	1	$\cap$	

$$\begin{aligned} konveksna: & \quad <0,1> \\ konkavna: & \quad <-\infty,0> \cup <1,+\infty> \\ Infleksija: & \quad (0,0) \quad i \quad (1,1) \end{aligned}$$

(b) Domena je $\mathcal{R} \setminus \{1\}$. Nadalje:

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2}$$

$$y'' = \frac{(6x^5-12x^2)(x^3-1)^2 - 2(x^3-1)\cdot 3x^2 \cdot (x^6-4x^3)}{(x^3-1)^4}$$

$$= \frac{6x^2(x^3-1)[(x^3-2)(x^3-1) - x^3(x^3-4)]}{(x^3-1)^4}$$

$$y'' = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt[3]{2}$$

$x:$	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$-$	!	$+$	
y		$\cup$	$\frac{2\sqrt[3]{2}}{-3}$	$\cap$	0	$\cap$	!	$\cup$	

$$konveksnost :< -\infty, -\sqrt[3]{2} > \cup < 1, +\infty >$$

$$konkavnost :< -\sqrt[3]{2}, 1 >$$

$$Infleksija : (-\sqrt[3]{2}, -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3})$$

(c) Domena je opet $\mathcal{R}$ bez ograničenja. Dalje slijedi prva, druga derivacija, analiza i odgovor:

$$y' = e^{1-x} + xe^{1-x}\cdot(-1) = e^{1-x}(1-x)$$

$$y'' = -e^{1-x} - e^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$x:$	$-\infty$		2		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$	$\frac{2}{e}$	$\cup$	

$$konkavnost : \quad < -\infty, 2 >$$

$$konveksnost : \quad < 2, +\infty >$$

$$Infleksija : \quad (2, \frac{2}{e})$$

(d) Računanje vrijednosti funkcije nema ograničenja, pa je $\mathcal{D} = \mathcal{R}$. Prva i druga derivacija:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}} \cdot (4x-3x^2) = \frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)}}$$

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(4-6x)\cdot\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2} - \frac{2(4x-3x^2)}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^2}}\cdot(4x-3x^2)}{\sqrt{(2x^2-x^3)^4}}$$

$$= \frac{3(4-6x)(2x^2-x^3) - 2(4x-3x^2)^2}{3\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^4}\cdot 3\sqrt[3]{2x^2-x^3}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6x^2(4-6x)(2-x)-2x^2(4-3x^2)^2}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^4}}\\
&= \frac{2x^2[3(8-12x-4x+6x^2)-(4-24x+9x^2)]}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}}\\
&= \frac{2x^2(9x^2-24x+20)}{9\sqrt[3]{(2x^2-x^3)^5}}.
\end{aligned}
$$

Analiza predznaka druge derivacije slijedi nakon otkrivanja nultočaka brojnika i nazivnika. Nultočke brojnika:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{24 \pm \sqrt{576-720}}{18} \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{R}\\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Nultočke nazivnika:

$$
\begin{aligned}
2x^2 - x^3 &= 0\\
x^2(2-x) &= 0\\
x_1 = 0 & \qquad x_2 = 2
\end{aligned}
$$

Analiza zakrivljenosti na brojevnom pravcu

$$
\begin{array}{lccccccccc}
x: & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty\\
y'' & & + & ? & + & ? & - & \\
y & & \cup & 0 & \cup & 0 & \cap &
\end{array}
$$

daje interval konveksnosti $< -\infty, 2 >$ i interval konkavnosti $< 2, +\infty >$. Točka $(2,0)$ je točka grafa u kojoj funkcija mijenja zakrivljenost, pa je to točka infleksije.

(e) Domena funkcije je rješenje nejednadžbe

$$
\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} > 0.
$$

Budući ni brojnik ni nazivnik nemaju nultočaka, rješenje nejednadžbe je cijeli $\mathcal{R}$ ili nejednadžbu uopće nije moguće zadovoljiti. Budući postoji $y(0)$,

$$
\mathcal{D} = \mathcal{R}.
$$

Deriviranje:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \frac{\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)(\sqrt{x^2+1}+x)-\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}\\
&= \frac{2x-\sqrt{x^2+1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}-x-(2x+\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}-x)}{x^2+1-x^2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4x^2}{\sqrt{x^2+1}} \\
y'' &= \frac{8x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot 4x^2}{x^2+1} = \frac{8x(x^2+1) - 4x^3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{4x^3+8x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}
\end{aligned}$$

Nazivnik je uvijek pozitivan. Nultočke brojnika omogućavaju analizu predznaka druge derivacije na brojevnom pravcu:

$$\begin{aligned}
4x(x^2+2) &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lccccc}
x: & -\infty & & 0 & & +\infty \\
y'' & & - & 0 & + & \\
y & & \cap & 0 & \cup &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
Infleksija: &\quad (0,0) \\
konveksnost: &\quad <0,+\infty> \\
konkavnost: &\quad <-\infty,0>
\end{aligned}$$

(f) Prvi je problem domena:

$$-1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1.$$

Rješava se posebno lijeva, posebno desna nejednadžba:

$$\begin{array}{cc}
-1 \leq \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} \leq 1 \\
0 \leq 1 + \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} - 1 \leq 0 \\
0 \leq \frac{x-1+1}{x-1} & \frac{1-x+1}{x-1} \leq 0 \\
0 \leq \frac{x}{x-1} & \frac{2-x}{x-1} \leq 0
\end{array}$$

Rješenje lijeve nejednadžbe je $<-\infty,0> \cup <1,+\infty>$, rješenje desne $<-\infty,1> \cup <2,+\infty>$, a obje nejednadžbe mogu zadovoljiti brojevi iz intervala

$$<-\infty,0> \cup <2,+\infty> .$$

Konveksnost, konkavnost i točke infleksije zahtijevaju deriviranje:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(x-1)^4-(x-1)^2}} = -\left((x-1)^4-(x-1)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
y'' &= \frac{1}{2}\left((x-1)^4-(x-1)^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(4(x-1)^3-2(x-1)\right) \\
&= \frac{(x-1)(4x^2-8x+4-2x+2)}{2\sqrt{[(x-1)^4-(x-1)^2]^3}} \\
&= \frac{(x-1)(2x^2-5x+3)}{\sqrt{[(x-1)^4-(x-1)^2]^3}}
\end{aligned}$$

Nultočke brojnika su $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{3}{2}$. Nultočke nisu u domeni. Analiza predznaka druge derivacije na domeni:

$x:$	$-\infty$		0			2		$+\infty$
y''		$-$	$!$	*izvan*	*domene*	$?$	$+$	
y		$\cap$	$-\frac{\pi}{2}$		$?$	$\frac{\pi}{2}$	$\cup$	

daje konveksnost za $< 2, +\infty >$ i konkavnost za $< -\infty, 0 >$. Točaka infleksije nema.

2. Rješenja drugog zadatka:

(a) Domena polinoma je $\mathcal{R}$. Derivacije:

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 30x^2 + 12 \\ y'' &= 36x^2 - 60x \end{aligned}$$

odmah daju točke infleksije, jer je očito da za $x_1 = 0$ i za $x_2 = 5/6$ druga derivacija mijenja predznak, a graf funkcije zakrivljenost.

(b) Domena funkcije je $\mathcal{R}$. Derivacije:

$$\begin{aligned} y' &= 3\sin^2 x \cdot \cos x \\ y'' &= 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x = 3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

ukazuju na nultočke druge derivacije:

$$\begin{array}{cc} \sin x = 0 & 2\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ x = k\pi, \quad k \in \mathcal{Z} & 2\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \\ & 3\cos^2 x = 1 \\ & \cos^2 x = \frac{1}{3} \\ & \cos x = \pm\frac{1}{3} \\ & x_1 = \pm \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi \\ & x_2 = \pm \arccos\frac{-1}{3} + 2k\pi \end{array}$$

Budući su sve nultočke druge derivacije jednostruke, istina je da su točke infleksije funkcije nultočke druge derivacije:

$$\begin{aligned} (k\pi, 0), & \qquad k \in \mathcal{Z} \\ (\pm \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi, \pm\frac{16\sqrt{2}}{27}), & \qquad k \in \mathcal{Z} \\ (\arccos -\frac{1}{3} + 2k\pi, \frac{16\sqrt{2}}{27}), & \qquad k \in \mathcal{Z} \\ (\arccos\frac{1}{3} + (2k+1)\pi, -\frac{16\sqrt{2}}{27}), & \qquad k \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

8.3 L'Hospitalovo pravilo

Neodredjenost u računanju limesa dolazi kada uvrštavanje vrijednosti c dovodi do diskusije tipa

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0},$$

odnosno

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}.$$

L'Hospital je dokazao da, ako u tom slučaju postoji

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

onda je taj limes jednak početnom.

Primjer 8.2 *L'Hospitalovo je pravilo očito na primjeru*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=L'H=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1,$$

što je u poglavlnu o limesu funkcije pokazano pokusom.

Zadatak 8.13 *Primjenom L'Hospitalovog pravila odredite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$$

Rješenje. Očito da uvrštavanje u formulu funkcije čiji se limes traži dovodi do nedoumice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\frac{-\infty}{-\infty}.$$

L'Hospital predlaže deriviranje posebno brojnika i nazivnika:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{tgx}=\frac{0}{0}\\ &= L'H=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 x}}=4\end{aligned}$$

Zadatak 8.14 *Odrediti*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{ctgx}.$$

Rješenje. Budući uvrštavanje

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \frac{-\infty}{\infty}$$

daje neodređenost, Pokušava se deriviranjem brojnika i nazivnika doći do odredljivog izraza
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{ctgx} = L'H = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\frac{0}{0}.$$
Primjena L'Hospitalovog pravila nije ograničena:

$$-\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = L'H = -\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0,$$

a uzastopno ponavljanje pravila garantira da je konačni limes jednak početnom.

Primjenom L'Hospitalovog pravila, odredite slijedeće limese:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{20}}{e^{2x}} = \qquad (0)$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \qquad (0)$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x + arctgx}{x} = \qquad (1)$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \qquad (-\frac{1}{3})$$

5. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x} = \qquad (\infty)$$

6. $$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \cdot \cot x = \qquad (0)$$

7.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5} = \qquad (\infty)$$

8.
$$\lim_{x\to q} \frac{\ln x}{x-1} = \qquad (1)$$

9.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \qquad (\frac{1}{2})$$

10.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\ln x} = \qquad (-\infty)$$

Oprezno s L'Hospitalovim pravilom:

11.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$$

Rješenje. L'Hospitalovo pravilo u ovom slučaju daje

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

koji se ne može odrediti. Stoga početni limes rješavamo pouzdanom klasikom:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} : \frac{x}{x} = \lim x_{\to}\infty \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} = 1,$$

jer je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sinx}{x} = 0$$

zbog ograničenih vrijednosti $\sin x$ i neograničene vrijednosti kojom se $\sin x$ dijeli.

U neodredjene oblike spadaju:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) &= 0\cdot\infty \\ \lim_{x\to c} f(x)-g(x) &= \infty-\infty \\ \lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= 1^\infty;\quad 0^0;\quad \infty^0. \end{aligned}$$

Elementarnim transformacijama i korištenjem zamjene limesa i neprekidnih funkcija navedeni se oblici transformiraju u izraze na koje se smije primijeniti L'Hospitalovo pravilo.

Zadatak 8.15 *Izračunajte*

$$\lim_{x\to 0} \arcsin x ctgx.$$

Rješenje. Trigonometrijskim identitetom

$$ctgx = \frac{1}{tgx}$$

dobiva se zapis funkcije na koji se može primijeniti L'Hospitalovo pravilo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \arcsin x ctgx &= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{tgx} = \frac{0}{0} \\ &= L'H = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zadatak 8.16 *Nađite*

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

Rješenje. U ovom slučaju izraz se nasilno, ali pravilno transformira u podobnu formulu:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zadatak 8.17 *Odredite*

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right].$$

Rješenje. Uvrštavanjem kritične vrijednosti dobiva se zaista

$$\infty - \infty.$$

Za primjenu L'Hospitalovog pravila funkcija mora imati oblik razlomka:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right] &= \lim_{t\to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{0}{0} \\ &= L'H = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{t}{t(t+1)} \\ &= L'H = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t+1+t} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Riješite nadalje:

12.

13.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\cdot tgx = \qquad (2)$$

14.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\ln x = \qquad (0)$$

15.

$$\lim_{x\to\infty} x^6\cdot e^{-x}$$

16.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}) = \qquad (\frac{1}{2})$$

17.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}) = \qquad (\frac{1}{6})$$

18.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \qquad (1)$$

dosjetka je bizarna:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = \ldots$$

Zadatak 8.18 *Odredite*

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$$

Rješenje. Uvrštavanjem se dobiva upravo neodređeni oblik 0^0. Prispodoba na oblik pogodan za računanje limesa zahtijeva transformaciju

$$(\sin x)^{tgx} = e^{\ln(\sin x)^{tgx}} = e^{tgx\cdot\ln\sin x}$$

koja se poziva na odnos međusobno inverznih funkcija:

$$e^{\ln a} = a.$$

Nadalje, zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije, moguće je zapisati:

$$\lim_{x\to 0} e^{tgx\cdot\ln\sin x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx}},$$

pa se računanje svodi na nalaženje

$$\begin{aligned} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{ctgx}} &= {}^{L'H} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} \\ &= e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot tgx}{1}} = e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Odredite i posljednje limese:

19.
$$\lim_{x\to 0} x^x = \qquad (1)$$

20.
$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x-1}} = \qquad (e)$$

21.
$$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}} = \qquad (1)$$

22.
$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \qquad (1)$$

23.
$$\lim_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}} = \qquad (e^3)$$

24.
$$\lim_{x\to 1}(\tan\frac{\pi x}{4})^{\tan\frac{\pi x}{2}} = \qquad (e^{-1})$$

Konačno, samo za najzahtjevnije:

25.
$$\lim_{x\to 0}(\frac{\pi}{2}-arctgx)^{\frac{1}{\ln x}} = \qquad (1)$$

26.
$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(1-e^{-x})}} = \qquad (e)$$

8.4 Asimptote grafa funkcije

Postoje vertikalna

$$x = c \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

horizontalna

$$y = d \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

možebitno kosa

$$\begin{aligned} y &= kx + l \\ k &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \\ l &= \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) \end{aligned}$$

Zadatak 8.19 *Naći asimptote grafa funkcije*

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Rješenje. Domena funkcije bit će rješenje nejednadžbe:

$$x^2 - 1 > 0.$$

Nejednadžba se rješava nalaženjem onih točaka x na brojevnom pravcu, za koje je

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_1 = 1 \qquad & x_2 = -1 \end{aligned}$$

Analiza predznaka izraza $x^2 - 1$ na brojevnom pravcu dat će interval u kojem je izraz $x^2 - 1$ pozitivan:

$x:$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1:$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Budući da nazivnik isključuje nultočke, domena je:

$$\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Vertikalne asimptote traže se u rubovima domene:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{0} = +\infty,$$

pa je pravac $x = -1$ prva vertikalna asimptota

Računanje

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty,$$

daje i drugu vertikalnu asimptotu $x = 1$ i to su jedine vertikalne asimptote.

Horizontalna asimptota traži se ispitivanjem limesa u beskonačnim rubovima domene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} : \frac{x^2}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}}} \\
/x^2 = \sqrt{x^4}/ & \\
&= \frac{1}{\sqrt{0-0}} = +\infty,
\end{aligned}$$

pa nema horizontalne asimptote prema $+\infty$. Posve analogno nema je ni prema $-\infty$, jer je zbog **parnosti** funkcije graf simetričan:

$$\frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Svejedno je da li se uvrštavaju pozitivni ili njima suprotni, negativni x-evi.

Kosa asimptota traži koeficijent smjera:

$$\begin{aligned}
a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} : \frac{x}{x} \\
a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} \\
/x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2}/ & \\
a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1
\end{aligned}$$

i odsječak na osi y:

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{\infty - \infty}{\infty}.
\end{aligned}$$

Omiljeno L'Hospitalovo pravilo ovdje nema uporišta za primjenu, budući je neodređen brojnik. Preostaje pokušaj prebacivanja iracionalnosti iz brojnika u nazivnik, odnosno racionalizacija brojnika:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{x^2 + x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1} + x(x^2-1)} \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x^3 - x} : \frac{x^3}{x^3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} + 1 - 0} \\
b &= \frac{0}{1+1-0} = 0
\end{aligned}$$

Rezultati pokazuju da postoji kosa asimptota za $x \to +\infty$:

$$y = x.$$

Asimptota se za drugu stranu domene, $x \to -\infty$ traži analognim postupkom:

$$\begin{aligned}
a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} : \frac{x}{x} \\
/x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}/ \\
a &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} \\
a &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1-0}} = -1.
\end{aligned}$$

Analogno se računa koficijent b u jednadžbi kose asimptote $y = ax + b$:

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + x \right) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \\
b = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{x^2 - x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1} - x(x^2-1)} \\
= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} - x^3 + x} : \frac{x^3}{x^3} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 \cdot (-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}) - 1 + 0} \\
b &= \frac{0}{-1 - 1 + 0} = 0,
\end{aligned}$$

pa je asimptota kojoj se graf funkcije priljubljuje za izuzetno negativne vrijednosti argumenta:

$$y = -x.$$

Zadatak 8.20 *Nađite asimptote krivulje*

$$y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

Rješenje.

Vertikalna asimptota nalazi se na temelju domene:

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Ispitivajući

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = \frac{-16}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{-16}{+0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{16}{-0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^3}{x^2-4} = \frac{16}{+0} = +\infty$$

dobivaju se dvije vertikalne asimptote:

$$x = -2 \quad i \quad x = 2.$$

Horizontalne asimptote dobiti se mogu nakon ispitivanja

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} : \frac{x^3}{x^3} = \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}} = \frac{2}{-0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} : \frac{x^3}{x^3} = \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

koje pokazuje da ih nema.

Kose asimptote postoje ako postoje konačni limesi:

$$a = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1-\frac{4}{x^2}} = 2$$
$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-4)}{x^2-4}$$
$$b = \lim_{x\to +\infty} \frac{8x}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = 0$$

koji u ovom zadatku daju desnu kosu asimptotu

$$y = 2x.$$

Lijeva beskonačnost ispituje se u nadi da postoji i lijeva asimptota:

$$a = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1-\frac{4}{x^2}} = 2$$
$$b = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-4)}{x^2-4}$$
$$b = \lim_{x\to -\infty} \frac{8x}{x^2-4} : \frac{x^2}{x^2} = 0.$$

Asimptota kojoj se graf funkcije priljubljuje težeći u beskonačnost s lijeve strane je isti pravac

$$y = 2x.$$

Zadatak 8.21 *Odredite asimptote funkcije*

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}.$$

Rješenje. Domena funkcije dobiva se rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{x^3}{x+3} \geq 0.$$

Rješenja nejednadžbe nalaze se analizom predznaka izraza $\frac{x^3}{x+3}$
na brojevnom pravcu. Analiza se provodi nakon nalaženja nultočaka brojnika i nazivnika, jer je za te x-eve nemoguće odrediti predznak razlomka:

$$x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3.$$

Analiza na brojevnom pravcu:

$x:$	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$\frac{x^3}{x+4}$		$+$	$!$	$-$	0	$+$	

daje domenu kao uniju područja na kojim razlomak poprima pozitivne vrijednosti. Točka -3 isključuje se iz domene, jer dijeljenje nulom nije definirano. Domena je tako:

$$< -\infty, -3 > \cup [0, +\infty > .$$

Vertikalna asimptota dobiva se ispitivanjem limesa:

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\frac{-27}{0}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\frac{0}{3}} = 0.$$

U ovom slučaju, jedina vertikalna asimptota je

$$x = -3.$$

Slijedi ispitivanje horizontalne asimptotičnosti:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+3} : \frac{x^3}{x^3}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{0-0}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x3}{x+3}} = \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+3} : \frac{x^3}{x^3}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{0-0}} = +\infty.$$

Kosa asimptota zahtijeva nalaženje koeficijenta smjera i odsječka na osi y:

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x+3}} : \sqrt{\frac{x}{x}} \\
a &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = 1 \\
b &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x^3} + x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3} + x\sqrt{x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^2(x+3)}{\sqrt{x^3(x+3)} + x(x+3)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt{x^3(x+3)} + x(x+3)} : \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3} \cdot (\frac{x}{x} + \frac{1}{x})} + 1 \cdot (1 + \frac{3}{x}} \\
&= \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Slijedi da je desna kosa asimptota

$$y = x - \frac{3}{2}.$$

Lijeva asimptota dobiva se nakon slične analize. Koeficijent smjera dobiva se analogno:

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x}{x+3}} : \sqrt{\frac{x}{x}} \\
&/jer \quad je \quad x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}/ \\
a &= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = -1
\end{aligned}$$

Sličan račun za b:

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x \right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^3} + x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x+3}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x^2(x+3)}{\sqrt{x^3(x+3)} - x(x+3)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt{x^3(x+3)}+x(x+3)} : \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3}\cdot(\frac{x}{x}+\frac{1}{x})}+1\cdot(1+\frac{3}{x})} \\
&= \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

nažalost, ne pali, jer se u računanju javljaju nedefinirani izrazi poput $\sqrt{x^3}$ koji za $x \to -\infty$ ipak nije definiran. Stoga navedeno nema smisla, ali se malim trikom može prispodobiti na analogiju:

$$
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{-x^3}{-x+3}}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}}-x\right)
$$

Korektan račun za b:

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}}-x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}-x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^3}+x\sqrt{x-3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2(x-3)}{\sqrt{x^3(x-3)}+x(x-3)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x^3(x-3)}+x(x-3)} : \frac{x^2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^3}{x^3}\cdot(\frac{x}{x}+\frac{1}{x})}+1\cdot(1+\frac{3}{x})} \\
&= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

pa je lijeva asimptota

$$
y = -x + \frac{3}{2}.
$$

Slijedeće zadatke pokušajte riješiti samostalno. Nemojte odmah gledati u rješenja. Odredite prvo domenu, a zatim ispitajte limese na rubovima domene. Oni ukazuju na postojanje ili izostanak vertikalnih i horizontalnih asimptota. Postojanje horizontalne asimptote isključuje kosu asimptotu.

1. Odredite asimptote slijedećih krivulja:

   (a)

$$
y = \frac{x^3}{x^2-1}
$$

(b)
$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$$
(c)
$$y = \sqrt{x^2-4}$$
(d)
$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$
(e)
$$y = x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$
(f)
$$y = xe^{\frac{1}{x}}$$
(g)
$$y = \ln(e + \frac{1}{x})^x$$
(h)
$$y = \frac{\sin x}{x}$$
(i)
$$y = 2x + \arctan\frac{x}{2}$$

1. *Rješenje.*
   (a) Vertikalne asimptote: $x = 1$ i $x = -1$, horizontalnih nema, kosa asomptota: $y = x$.
   (b) Vertikalnih asimptota nema. Horizontalne asimptote: $y = 1$ i $y = -1$.
   (c) Vertikalnih i horizontalnih nema. Kose asimptote su: $y = x$ za $x \to +\infty$ i $y = -x$ za $x \to -\infty$.
   (d) Vertikalna asimptota je $x = -1$. Kosa asomptota: $y = \frac{1}{2}x - 1$.
   (e) Vertikalna asimptota: $x = 2$. Horizontalne nema. Kosa asomptota: $y = x + \frac{1}{2}$.

(f) Vertikalna: $x = 0$. Kosa asimptota: $y = x + 1$. Račun:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= 0\cdot e^{+\infty} = 0\cdot\infty = neodr. \\
\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = L'H = \lim_{x\to 0^+}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty \\
\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0. \\
\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} &= \infty\cdot e^{0} = \infty \\
k = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \\
l = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

(g) Vertikalna asimptota $ex + 1 = 0$. Kosa asimptota: $y = x + \frac{1}{e}$.
Svojstvo logaritmiranja potencija daje zapis formule:

$$y = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right).$$

Domenu čine brojevi koji zadovoljavaju

$$e + \frac{1}{x} > 0$$

Nejednadžba se rješava analizom predznaka izraza

$$e + \frac{1}{x}$$

na brojevnom pravcu:

$$\begin{aligned}
e + \frac{1}{x} &= 0 \\
x &= -\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$x:$	$-\infty$		$-1/e$		0		∞
$e+\frac{1}{x}$		$+$	0	$-$	!	$+$	

Domena je $\mathcal{D} =< -\infty, -\frac{1}{e} > \cup < 0, +\infty >$. Ispitavanje rubova domene:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1/e} x\cdot\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) &= -\frac{1}{e}\cdot(-\infty) = +\infty \\
\lim_{x\to 0} x\cdot\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) &= 0\cdot(-\infty) = neodr.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = L'H = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e+\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = \pm\infty\cdot\ln e = \pm\infty$$

Kosa asimptota:

$$\begin{aligned}
k = \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x} &= 1\\
l = \lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}\\
L'H &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}-0}{\frac{-1}{x^2}}\\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(h) Vertikalne asimptote nema. Horizontalna asimptota je x-os.

(i) Vertikalne i horizontalne asimptote nema. Kosa asimptota je $y = 2x + \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
k = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\arctan\frac{x}{2}}{x} &= \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x}\right) = 2+\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\\
&= 2+0 = 2\\
l = \lim_{x\to\infty}\left(2x+\arctan\frac{x}{2}-2x\right) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

8.5 Kvalitativni graf funkcije

Crtanje kvalitativnog grafa podrazumijeva grafički opis domene, intervala rasta, pada i ekstreme, konveksne, konkavne zakrivljenosti i točaka infleksije te konačno asimptota.

Zadatak 8.22 *Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije:*

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje.

i Domenu funkcije čine svi brojevi osim 0: $\mathcal{D} = \mathcal{R}\setminus\{0\}$.

ii Analiza predznaka prve derivacije

$$y' = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

vodi na rješavanje jednadžbe:

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x-1) &= 0 \\ x_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

nakon koje slijedi ispitivanje monotonosti:

$$\begin{array}{lccccccc} x: & -\infty & & 0 & & \frac{1}{2} & & +\infty \\ y' & & - & ! & - & 0 & + & \\ y & & \searrow & ! & \searrow & \frac{e^2}{4} & \nearrow & \end{array}$$

Druga derivacija

$$y'' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} (2x^2 - 2x + 1)$$

nema nultočku a predznak ne mijenja ni u točki prekida, pa je pozitivna na cijeloj domeni, što znači da je graf konveksan.

iii Ponašanje na rubovima domene:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot e^0 = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{+\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = L'H = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = L'H = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} == e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot e^0 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

Kvalitativni graf je jednostavan i nalazi se u prilogu.

Zadatak 8.23 *Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije*

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Rješenje. Domena funkcije

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \setminus \{-1\}.$$

Prva derivacija ima formulu

$$y = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

iz koje se očitavaju nultočke: $x_1 = 0$ i $x_2 = -3$ koje su potrebne u analizi rasta i pada funkcije:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$	$-\frac{27}{8}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

iz koje je vidljiva točka minimuma $(-3, -\frac{27}{8})$.

Druga derivacija:

$$y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

ima nultočku u nuli. Analiza predznaka druge derivacije:

$x:$	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$	0	$\cup$	

daje točku infleksije $(0, 0)$.

Vertikalnu asimptotu $x = -1$ pokazuje

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty.$$

Horizontalne asimptote nema, a kosa asimptota:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = -1$$

ima jednadžbu

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

i asimptota je kojoj graf prijanja na obje strane prema beskonačnosti. Graf se nalazi u prilogu, na kraju zbirke.

1. Nacrtajte grafove slijedećih funkcija:

   (a)
   $$y = x^3 + \frac{x^4}{4}$$

   (b)
   $$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

(c)
$$y = x + \frac{1}{x}$$

(d)
$$y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

(e)
$$y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

(f)
$$y = xe^{-x}$$

(g)
$$y = \frac{e^x}{x}$$

(h)
$$y = xe^{\frac{1}{x-2}}$$

(i)
$$y = x^2 \ln x$$

(j)
$$y = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$$

(k)
$$y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

2. Ispitajte tok funkcije i skicirajte graf:

(a)
$$y = \frac{2x}{\ln^2 x}$$

(b)
$$y = \frac{e^{-3x}}{1 - x}$$

(c)
$$y = xe^{-\frac{1}{x}}$$

(d)

$$y = \arctan \frac{x}{x+1}$$

(e)

$$y = \frac{x^2+1}{2x+1}$$

(f)

$$y = \frac{(3x+2)^2}{3x-1}$$

(g)

$$y = x\sqrt{1-x^2}$$

3. Ispitati tok i nacrtati graf funkcije zadane formulom

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

4. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije

$$y = \arcsin \frac{1}{1+x^2}$$

5. Ispitati tok i nacrtati graf

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

9 Integrali i primjene

Integralni račun rješava vrlo jednostavno izreciv, no i netrivijalno rješiv problem izračunavanje površine ravninskog lika. Osim u geometriji, integralima se rješavaju problemi gibanja, potrošnje energije, pa i ekonomski problemi.

9.1 Definicija odredjenog integrala

Primjer 9.1 *Izračunajte površinu omeđenu u koordinatnoj ravnini vertikalama* $x = 2$, $x = 4$, *osi apcisa i grafom funkcije* $f(x) = 3$.

Rješenje. Nakon crtanja, površina je jednaka 6 kvadratnih jedinica.

Određeni integral u oznaci

$$\int_2^4 3dx$$

predstavlja zadatak naveden u primjeru. Rješenje zadatka zapisuje se

$$\int_2^4 3dx = 6.$$

Zadatak 9.1 *Izračunajte površinu omeđenu pravcem $y = 3x$, vertikalama $x = 0$ i $x = 3$, te osi $0x$. Zapišite zadatak pomoću oznake za određeni integral.*

Rješenje. Nakon crtanja, zadatak se svodi na računanje površine pravokutnog trokuta i dobiva se 13.5 kvadratnih jedinica. Zapisano integralom:

$$\int_0^3 3xdx = 13.5$$

Zadatak 9.2 *Odredite površinu omeđenu pravcem $y = 2x + 5$ odozgo, vertikalama $x = -2$ i $x = 3$ slijeva i sdesna, te osi apscisa odozdo. Izrazite zadatak integralom.*

Rješenje. Nakon crtanja, površina dobivenog trapeza jednaka je

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{11+1}{2} \cdot 5 = 30$$

kvadratnih jedinica. Zadatak iskazan integralom:

$$\int_{-} 2^3 (2x+5)dx = 30kv.$$

Zadatak 9.3 *Izračunajte*

$$\int_0^{10} (10 - x)dx =$$

Rješenje. U koordinatnoj ravnini nacrta se pravac $x + y = 10$ i traženi integral upravo je površina pravokutnog trokuta i iznosi 50 kvadrata.

Newton-Leibnitzova formula daje uputu za računanje površine ispod grafa funkcije $y = f(x)$, iznad osi apscisa, lijevo od vertikale $x = b$ i desno od $x = a$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

gdje je

$$F'(x) = f(x)$$

najveći problem koji se sastoji u nalaženju antiderivacije podintegralne funkcije.

Antiderivacija je problem koji se naziva neodredjenim integralom:

$$\int f(x)dx$$

Antiderivaciju potenciranja uvijek je moguće pronaći:

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} \cdot dx &= \ln|x| + c,\end{aligned}$$

gdje je || radi šire definicije podintegralne od primitivne funkcije.

Jedino pravilo koje vrijedi prilikom integriranja je

$$\int(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \cdot \int f(x)dx + \beta \cdot \int g(x)dx.$$

Integriranje se izvodi pogađanjem antiderivacije. Algebarskim metodama, supstitucijom i parcijalnom integracijom podintegralna funkcija može se pripremiti do oblika prepoznatljivog za pogađanje.

Riješite Newton-Leibnitzovom formulom nekoliko slijedećih zadataka.

1. Izračunati površinu koju omedjuju graf funkcije

$$y = x^2,$$

vertikalni pravci $x = 1$ i $x = 3$ i os apscsa: $y = 0$.

2. Izračunajte površinu koju omeđuju parabola $xy = 12$, os apscisa i vertikale $x = 2$ i $x = 6$.

3. Odredite veličinu jednog od dijelova koje parabola

$$y = x^3 - 4x$$

zatvara s koordinatnom x-osi.

4. Odredite veličinu površine ispod grafa funkcije

$$y = \sqrt{x}$$

koja se duž x-osi proteže od 0 do 9.

5. Koliko je velika jedna od površina koju sinusoida $y = \sin x$ zatvara s x-osi?

Rješenja.
1. $P = 26/3$; 2.

9.2 Neposredno integriranje

Jedini način rješavanja integrala je pogađanje formule koja derivirana daje podintegralnu formulu. Diferencijal dx ukazuje na varijablu u podintegralnoj funkciji. Ostali brojevi koji se javljaju ispod integrala su konstante. Integrirati se može samo po jednoj varijabli.

Tablica neodredjenih integrala

1.
$$\int dx = x + c$$

2.
$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

3.
$$\int \frac{dx}{x} \cdot dx = \ln|x| + c$$

4.
$$\int e^x \cdot dx = e^x + c; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

5.
$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c; \qquad \int \cos x \cdot dx = \sin x + c$$

6.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \cdot dx = tgx + c; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$$

7.
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\frac{x}{a} + c$$

8.
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln |\frac{x-a}{x+a}| + c$$

9.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + c$$

10.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

11.
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{a} + c$$

12.
$$\int \sqrt{x^2 + A} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \cdot \ln x + \sqrt{x^2 + A} + c$$

Ostali neodredjeni integrali, ako su riješeni, možda se nalaze u nekom od priručnika namjenjenog inženjerima ili studentima. Opet valja napomenuti da nije svaki integral rješiv.

Zadatak 9.4 *Odredite*
$$\int \sqrt{2px} dx$$

Rješenje. U podintegralnoj funkciji broj p je konstanta, pa zbog linearnosti operatora antiderivacije:

$$\int \sqrt{2px} dx = \int \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} dx = \sqrt{2p} \cdot \int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c,$$

što se može, ali i ne mora srediti. Ovisno o zadatku.

Zadatak 9.5 *Nađite*

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx &= \int \frac{x^4-x^2-2}{x^{\frac{2}{3}}}dx \\ &= \int \left(x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{-2}{3}}\right)dx \\ &= \frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} - \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 2\frac{x^13}{\frac{1}{3}} + c \\ &= \frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + c\end{aligned}$$

gdje je posljednji redak radi šminke, a i da pokaže algebarsku spretnost autora zbirke.

Zadatak 9.6 *Odredite*

$$\int \frac{dx}{x^2+7}.$$

Rješenje. Jednostavnom primjenom tablice

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x}{\sqrt{7}} + c.$$

Zadatak 9.7 *Riješite*

$$\int tg^2 x dx$$

Rješenje. Pomoću osnovnih trigonometrijskih identiteta podintegralna funkcija poprima oblik pogodan za pogađanje primitivne funkcije:

$$\begin{aligned}\int tg^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + c\end{aligned}$$

Zadatak 9.8 *Integrirajte*

$$\int \frac{dx}{3x^2+5}.$$

Rješenje. Nasilnim izlučivanjem 3 u nazivniku dobiva se

$$\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}} arctg \frac{x}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + c$$

Zadatak 9.9 *Odredite*

$$\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx &= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx - 2\int dx + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx \\ &= \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x - 2x + \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^x\end{aligned}$$

Zadatak 9.10 *Izračunajte*

$$\int_0^1 3^x e^x dx.$$

Rješenje. Računanje određenog integrala izvodi se po Newton-Leibnitzovoj formuli i sastoji se od nalaženja primitivne funkcije za podintegralnu funkciju. Pravilom o potenciranju potencija jednakih baza, moguće je podintegralnu funkciju svesti na oblik iz tablice:

$$\begin{aligned}\int_0^1 3^x e^x dx &= \int_0^1 (3e)^x dx = \left.\frac{(3e)^x}{\ln 3e}\right|_0^1 \\ &= \frac{3e}{\ln 3e} - \frac{1}{\ln 3e} = 3.40932\end{aligned}$$

Zadatak 9.11 *Odredite vrijednost određenog integrala:*

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x^3} dx.$$

Rješenje. Algebarskom transformacijom:

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right) dx$$

integral se svede na dva integrala općih potencija:

$$\int_{-2}^{-3} x^{-2} dx - 2\int_{-2}^{-3} x^{-3} dx.$$

Primjenom tablice, po Newton-Leibnitzovoj formuli dobiva se:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{-2}^{-1} - 2\,\frac{x^{-2}}{-2}\bigg|_{-2} -1 &= \\
= 1 - \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{-8}\right) &= \\
= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{-3}{8} & \\
= \frac{5}{4} &
\end{aligned}$$

Zadatak 9.12 *Izračunajte*

$$\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \left[\frac{1}{x(1-\sqrt{x})} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-x)}\right] dx$$

Rješenje: svođenjem podintegralnog izraza na zajednički nazivnik dobiva se:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}{x(1-x)} dx &= \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{2}} \frac{1-x}{x(1-x)} dx \\
&= \ln x|_{e/2}^{3e/2} = \ln\frac{3e}{2} - \ln\frac{e}{2} = \ln 3
\end{aligned}$$

Primjenom tablice i jedinog nam pravila odredite formule u slijedećim zadacima:

1. Neposredno integrirajte:

   (a)
   $$\int (\frac{1-x}{x})^2 \quad dx =$$

   (b)
   $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad dx =$$

   (c)
   $$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} \quad dx =$$

   (d)
   $$\int \sqrt{1-\sin 2x} \quad dx =$$

2. Odredite vrijednost određenih integrala:

   (a)
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} =, \qquad \ln 2 - 1$$

   (b)
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} tg^2 x \cdot dx =,$$

3. Izračunajte vrijednosti određenih integrala:

   (a)
$$\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x} \cdot dx =,$$

   (b)
$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =,$$

Rješenja.

1. zadatak:

   (a) $-1/x - 2\ln x + x + c$

   (b) $\frac{2\sqrt{x}}{3}(x+3) + c$

   (c)
$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{x^4 + \frac{1}{x^4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x^8+1+2x^4}{x^4}}}{x^3} dx = \int \frac{\frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^2}}{x^3} dx =$$
$$\int \frac{x^4+1}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5}\right) dx = \ln x + \frac{x^{-4}}{-4} + c = \ln x - \frac{1}{4x^4} + c$$

   (d)
$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} \quad dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x} dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx =$$
$$\int |\sin x - \cos x| dx = \begin{cases} \sin x - \cos x, & x \in [-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi], \quad k \in \mathcal{Z} \\ \cos x - \sin x, & x \in [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi], \quad k \in \mathcal{Z} \end{cases}$$

2. Određeni integrali: a) 0.693, b) 0.73.

3. Analogno a) 11.25 b) 0.56

Slijedeći zadaci su složeniji zadaci neposrednog integriranja. Integrirajte algebarskim svođenjem integrala na tablične.

1. Integrirajte

$a) \quad \int (3-x^2)^3 dx =$	$b) \quad \int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx =$
$c) \quad \int (1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}dx =$	$d) \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx =$
$e) \quad \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx =$	$f) \quad \int ctg^2 x dx =$
$g) \quad \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$	$h) \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx =$

2. Izračunajte

$a) \quad \int_0^1 x\sqrt[3]{x}dx =$	$b) \quad \int_1^{256} \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx =$
$c) \quad \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^3} =$	$d) \quad \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$
$e) \quad \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$	$f) \quad \int_2^0 (2+x^2)^3 dx =$
$g) \quad \int_{-1}^{-3} \frac{x^3-2x+4}{x}dx =$	$h) \quad \int_3^4 \frac{x^2}{1-x^2}dx =$
$i) \quad \int_0^{2\pi} (2\sin x + 3\cos x)dx =$	$j) \quad \int_{-3}^{1} (x^2+2x-3)dx =$

3. Izračunajte:
   a) $\int_0^1 (3^x - 4^x)dx \qquad \int_{-1}^{1} 5^x 3^{-x} dx$

Rješenja:

1. zadatak:

$$a) 27x - 9x^3 + \frac{9x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + c \qquad b) a\ln x - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + c$$
$$c) \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{15}x^3\sqrt[4]{x^3} + c \qquad d) \frac{2}{-5^x \ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x \ln 2} + c$$
$$e) \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x + c \qquad f) - ctgx - x + c$$
$$g) x - arctgx + c \qquad h) \ln|x+\sqrt{x-1}| + \ln|x-\sqrt{x-1}| + c$$

2. zadatak:

a)$\frac{3}{4}$; b)$\frac{8}{15}(2^{15}-1)$; c)$-\frac{4}{9}$; d)$-\frac{9}{2}$; e)1; f)$-4\frac{4}{35}$; g)$1\frac{1}{3}+4\ln 3$; h)-1.09; i)0; j)$-7\frac{2}{3}$

3. zadatak:
   a) $\frac{2}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 4}$; b)$\frac{16}{15(\ln 5 - \ln 3)}$

9.3 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije sastoji se u zamjeni dijela formule u podintegralnoj funkciji koja ovisi o x, zapisanog kao $k(x)$, formulom koja će ovisiti o novoj varijabli t:

$$k(x) = \varphi t$$

Izbor $k(x)$ mora biti takav, da je moguće potpuno uvesti varijablu t pod integral:

$$\begin{aligned} k(x) &= \varphi(t) \\ x = k^{-1}(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Potrebno je zamijeniti i diferencijal dx sa dt, zamijeniti debljinu niti integriranja. Preslikavanje

$$x \longrightarrow k(x)$$

mora biti bijektivno definirana funkcija.

Zadatak 9.13 *Supstitucijom odredite*

$$\int \sqrt[3]{5-6x} dx$$

Rješenje. Nema pravila koji dio podintegralne funkcije zamijeniti i koju funkciju izabrati za zamjenu. U ovom slučaju mudro je uzeti:

$$\begin{aligned} 5-6x &= t^3 \\ -6dx &= 3t^2 dt \\ dx &= -\frac{t^2}{2} dt, \end{aligned}$$

jer nakon uvrštavanja dobiva se prepoznatljiva podintegralna funkcija

$$\int \sqrt[3]{t^3} \cdot \frac{-t^2 dt}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \int t^3 dt = -\frac{1}{2} \frac{t^4}{4} + c$$

Budući zadatak traži nalaženje primitivne funkcije za $\sqrt[3]{5-6x}$, u rezultat se mora vratiti varijabla

$$x = \frac{5-t^3}{6},$$

pa je tražena primitivna funkcija:

$$\int \sqrt[3]{5-6x} dx = -\frac{1}{8} \left(\frac{5-t^3}{6} \right)^4 + c$$

Zadatak 9.14 *Odredite*

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx.$$

Rješenje. Ovaj integral posebno je značajan, jer je u **brojniku** sadržana derivacija nazivnika. Lukavo je cijeli nazivnik zamijeniti novom varijablom:

$$\begin{aligned} x^2-5x+7 &= t \\ (2x-5)dx &= dt \end{aligned}$$

jer je tada integral po novoj varijabli bitno jednostavniji:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x^2-5x+7| + c.$$

Zadatak 9.15 *Odredite*

$$\int x^2 e^{x^3} dx.$$

Rješenje. U ovom je zadatku faktor x^2 prispodobiv do na konstantu, derivaciji argumenta eksponencijalne funkcije:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{x^3} dx &= /x^3 = t \\ & \quad\; 3x^2dx = dt/ \\ &= \int x^2 \cdot e^t \cdot \frac{dt}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3} + c \end{aligned}$$

Zadatak 9.16 *Pogodnom supstitucijom riješite*

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Rješenje. Metodom izrazito upornog gledanja moguće je u brojniku otkriti derivaciju izraza x^2, pa izvršiti zamjenu:

$$\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2xdx &= dt \\ \int \frac{x\frac{dt}{2x}}{\sqrt{1-t^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{2}\arcsin t + c = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + c \end{aligned}$$

Ovaj zadatak je vrlo težak i zahtijeva puno iskustva.

Zadatak 9.17 *Riješite*

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

Rješenje. Supstitucija

$$\begin{aligned} e^x - 1 &= t \\ e^x dx &= dt \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^x}{t} \cdot \frac{dt}{e^x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c \ln|e^t - 1| + c$$

Zadatak 9.18 *Zgodnom supstitucijom otkrijte*

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}}$$

Rješenje. Ponekad je zgodno zamijeniti nezgodnu funkciju jednostavnom:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} &= / \arcsin x = t \\ & \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = dt \\ & \quad dx = \sqrt{1 - x^2} dt / \\ &= \int \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \sqrt{1 - x^2} dt \\ &= \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} (\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

Zadatak 9.19 *Riješite neodređeni integral:*

$$\int \frac{x - \sqrt{arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx.$$

Rješenje. Prije supstitucije integral se rastavi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \sqrt{arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx &= \int \frac{x}{1 + 4x^2} dx - \int \frac{\sqrt{arctg 2x}}{1 + 4x^2} dx \\ & \quad \Bigg/ \begin{array}{cc} 1 + 4x^2 = t & arctg 2x = s \\ 8x dx = dt & \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2dx = ds \\ dx = \frac{dt}{8x} & dx = \frac{(1 + 4x^2) ds}{2} \end{array} \Bigg/ \\ &= \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{8x} - \int \frac{\sqrt{s}}{1 + 4x^2} \cdot \frac{(1 + 4x^2) ds}{2} \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int s^{\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{1}{8} \ln(1 + 4x^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} arctg x^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

Zadatak 9.20 *Odredite*

$$\int a \cdot e^{-mx} dx.$$

Rješenje. Supstitucija $-mx = t$ daje:

$$\int a \cdot e^t \cdot \frac{dt}{-m} = -\frac{a}{m} e^t + c = -\frac{a}{m} e^{-mx} + c$$

Zadatak 9.21 *Odredite*

$$\int (\cos x + \sin x)^2 dx.$$

Rješenje. Nakon kvadriranja:

$$\begin{aligned}
\int (\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x) dx &= \int dx + \int \cos 2x dx \\
&= /2x = t, \quad dx = \frac{dt}{2} \\
&= x + \int \cos t \cdot \frac{dt}{2} = x + \frac{1}{2} \cdot (-\sin t) + c \\
&= x - \frac{1}{2} \sin 2x + c
\end{aligned}$$

Zadatak 9.22 *Naći*

$$\int tgx dx.$$

Rješenje. Definicija tangensa i činjenica da je sinus derivacija kosinusa:

$$\begin{aligned}
\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \Bigg/ \\
&= \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{-\sin x} \\
&= -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + c \\
&= -\ln \cos x + c
\end{aligned}$$

kao primitivnu funkciju.

Zadatak 9.23 *Nađite*

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

Rješenje. Supstitucija

$$\sin x = t$$
$$\cos x dx = dt$$

daje

$$\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Zadatak 9.24 *Odredite primitivnu funkciju:*

$$\int \cos^2 x dx.$$

Rješenje. Koristiti identitet

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

i supstituciju:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\
&= 2x = t, \quad 2dx = dt \\
&= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \cos t \frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\sin t) \\
&= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c
\end{aligned}$$

Kod rješavanja neodređenog integrala rezultat nije jednoznačan. Točnost primitivne funkcije dovoljno je provjeriti deriviranjem. Derivacija mora biti jednaka podintegralnoj funkciji.

1. Zamijenom varijabli integrirajte:

   (a)
   $$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

   (b)
   $$\int x^2 \sqrt{1 + x^3} \quad dx =$$

   (c)
   $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (1 + x)} =$$

(d)
$$\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} =$$
(e)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$$
(f)
$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} =$$
(g)
$$\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx =$$
(h)
$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx =$$
(i)
$$\int e^x\sqrt{a-be^x}dx =$$
(j)
$$\int \sin^5 x\cdot\cos x \quad dx =$$

2. Pogodno odabranom supstitucijom integrirajte:

(a)
$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$$
(b)
$$\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$$
(c)
$$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$
(d)
$$\int x\cdot ctg(x^2+1)dx$$

(e)

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx$$

(f)

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$$

(g)

$$\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$$

(h)

$$\int \frac{e^{arctgx} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx$$

Rješenja.

1. Supstitucija:

(a)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} 1-x^2 = t^2 \\ -2xdx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{-tdt}{t} = -t = -\sqrt{1-x^2} + c$$

(b)

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{1+x^3}dx &= \left\{ \begin{array}{c} 1+x^3 = t^2 \\ 3x^2dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int x^2 \cdot t \cdot \frac{2tdt}{3x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{3} \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{(1+x^3)^3} \end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\ (1+x)} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2arctg\sqrt{x} + c$$

(d)

$$\int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ \frac{-1}{x^2}dx = dt \end{array} \right\} = \int \sin t \cdot \frac{-x^2dt}{x^2} = \cos\frac{1}{x} + c$$

(e)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{2tdt}{t \cdot \sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + c$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} &= \left\{\begin{array}{c}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array}\right\} = \int \frac{xdt}{x\cdot t\cdot \ln t} = \\ &= \left\{\begin{array}{c}\ln t = s\\ \frac{1}{t}dt = ds\end{array}\right\} = \int \frac{tds}{t\cdot s} = \ln(\ln(\ln x)) + c\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx &= \left\{\begin{array}{c}arctg\frac{x}{2} = t\\ \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}dx = dt\\ dx = \frac{4+x^2}{2}dt\end{array}\right\} = \int \frac{t}{4+x^2}\cdot\frac{4+x^2}{2}dt\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} = \frac{1}{4}arctg^2\frac{x}{2} + c\end{aligned}$$

(h)

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{x} = t\\ \frac{-1}{x^2}dx = dt\end{array}\right\} = \int \frac{e^t}{x^2}\cdot(-x^2)dt = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

(i)

$$\begin{aligned}\int e^x\sqrt{a-be^x}dx &= \left\{\begin{array}{c}a-be^x = t^2\\ -be^x dx = 2tdt\end{array}\right\} = \int e^x\cdot t\cdot\frac{2tdt}{-be^x} = -\frac{2}{b}\cdot\frac{t^3}{3}\\ &= -\frac{2}{3b}\left(\sqrt{a-be^x}\right)^3 + c\end{aligned}$$

(j)

$$\int \sin^5 x\cdot\cos x \quad dx = \left\{\begin{array}{c}\sin x = t\\ \cos x dx = dt\end{array}\right\} = \int t^5 dt = \frac{1}{6}\sin^6 x + c$$

2. Prikladno je odabrati:

(a)

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \left\{\begin{array}{c}\ln x = t\\ \frac{1}{x}dx = dt\end{array}\right\} = \int \frac{\sin t}{x}\cdot xdt = -\cos\ln x + c$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx &= \int \frac{1}{\cos^2 3x}dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx\\ &= \left\{\begin{array}{cc}3x = t & \cos 3x = t\\ 3dx = dt & -\sin 3x\cdot 3dx = dt\end{array}\right\}\\ &= \int \frac{1}{\cos^2 t}dt + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}\cdot\frac{ds}{-3\sin 3x}\\ &= \frac{1}{3}tg3x - \frac{1}{3}\cdot\frac{s^{-1}}{-1} = \frac{1}{3}tg3x + \frac{1}{3\cos 3x} + c\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \left\{ \begin{array}{c} \sin x + \cos x = t \\ (\cos x - \sin x) dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{\sin x - \cos x}{t} \cdot \frac{dt}{\cos x - \sin x} = -\ln|\sin x + \cos x| + c\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int x \cdot ctg(x^2+1) dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int x \cdot ctgt \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t}{\sin t} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \cos t = s \\ -\sin t dt = ds \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{-ds}{s} = -\ln|\cos(x^2+1)| + c\end{aligned}$$

(e)

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \left\{ \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{x \cdot t} \cdot x dt = \ln(\ln x) + c$$

(f)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(4 - \ln^2 x)} &= \left\{ \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{x dt}{x(4 - t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2 - 4} \\ &= -\frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \right| + c\end{aligned}$$

(g)

$$\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin^2 x = t \\ 2 \sin x \cos x dx = dt \\ \sin 2x dx = dt \end{array} \right\} = \int e^t dt = e^{\sin^2 x} + c$$

(h)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{arctgx} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx &= \int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2} dx + \int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} arctgx = t & \ln(x^2+1) = s \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dt & \frac{1}{x^2+1} 2x dx = ds \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{e^t}{1+x^2} \cdot (1+x^2) dt + \int \frac{x \cdot s}{1+x^2} \cdot \frac{(x^2+1) ds}{2x} + arctgx \\ &= e^{arctgx} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{2} + arctgx \\ &= e^{arctgx} + \frac{1}{4} \ln^2(x^2+1) + arctgx + c\end{aligned}$$

9.4 Integral racionalne funkcije

Racionalne funkcije su omjeri polinoma. Racionalne funkcije jedine su koje možemo računati pomoću četiri osnovne računske operacije. Racionalne funkcije se mogu u potpunosti integrirati. Integriranje se provodi direktno ili metodom supstitucije.

Primjer 9.2 *Dokazati neodređeni integral iz tablice*

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

Rješenje. Racionalnu funkciju potrebno je rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 - a^2} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \quad | \cdot (x-a)(x+a) \\
1 &= A(x+a) + B(x-a) \\
x = a \Rightarrow \quad & \frac{1}{2a} = A \\
x = -a \Rightarrow \quad & \frac{1}{-2a} = B \\
\frac{1}{x^2 - a^2} &= \frac{\frac{1}{2a}}{x-a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x+a}
\end{aligned}$$

Nakon čega je integriranje lagano supstitucijom:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int dxx - a - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} \\
&= \frac{1}{2a} \left(\ln|x-a| - \ln|x+a| \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c
\end{aligned}$$

Zadatak 9.25 *Integrirajte*

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Rješenje. Potrebno je rastaviti racionalnu funkciju u jednostavnije racionalne funkcije:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3 + 1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} \quad | \cdot (x^3 + 1) \\
1 &= A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \\
x = -1 \quad : \quad & \begin{array}{c} 1 = A \cdot 3 \\ A = \frac{1}{3} \end{array}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lcc}
x=0 & : & \begin{array}{c} 1=\frac{1}{3}+C \\ C=-\frac{2}{3} \end{array} \\
x=1 & : & \begin{array}{c} 1=\frac{1}{3}+2B-\frac{4}{3} \\ B=1 \end{array}
\end{array}
$$

Integriranje je jednostavnije:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1-\frac{4}{3}}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} x^2-x+1=t & x-\frac{1}{2}=s \\ (2x-1)dx=dt & dx=ds \\ & x^2-1+\frac{1}{4}=s^2 \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int \frac{ds}{s^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}
$$

Zadatak 9.26 *Odredite*

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$

Rješenje. Brojnik ima stupanj jednak nazivniku. Moguće je dijeljenje brojnika i nazivnika:

$$
\begin{array}{rcl}
(x^3+1) & : & (x^3-5x^2+6x)=1 \\
\underline{-x^3+5x-6x} & & \\
5x^2-6x+1 & & \\
\dfrac{x^3+1}{x^3-5x+6x} & = & 1+\dfrac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}
\end{array}
$$

Zadatak je sada jednostavniji:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x+6x}dx = \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Integral racionalne funkcije zahtijeva faktorizaciju nazivnika:

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x^2-3x-2x+6) = x(x-3)(x-2).$$

Racionalna funkcija rastavlja se na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \quad | \cdot (x^3-5x^2+6x) \\
5x^2-6x+1 &= A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2) \\
x=0 &: \frac{1}{6}=A \\
x=3 &: -\frac{9}{2} \\
x=2 &: \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

i integral sada glasi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx &= \int dx+\int \frac{\frac{1}{6}}{x}dx+\int \frac{-\frac{9}{2}}{x-2}dx+\int \frac{\frac{28}{3}}{x-3}dx \\
&= x+\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{28}{3}\ln|x-3|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+c
\end{aligned}$$

Supstitucijom se velik broj integrala svodi na integrale racionalnih funkcija.

Zadatak 9.27 *Naći primitivnu funkciju:*

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}.$$

Rješenje. Supstitucija $e^x=t$, $e^x dx=dt$ daje

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{dt}{t}}{t^2-t} &= \int \frac{dt}{t^2(t-1)} \\
\frac{1}{t^2(t-1)} &= \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-1} \quad | \cdot t^2(t-1) \\
1 &= At(t-1)+B(t-1)+Ct^2 \\
t=0 &: B=-1 \\
t=1 &: C=1 \\
t=2 &: A=-1 \\
\int \frac{dt}{t^2(t-1)} &= -\int \frac{dt}{t}-\int \frac{dt}{t^2}+\int \frac{dt}{t-1} \\
&= -\ln|t|+\frac{1}{t}+\ln|t-1| \\
&= -x+e^{-x}+\ln|e^x-1|+c
\end{aligned}$$

1. Integrirajte slijedeće racionalne funkcije.

(a)
$$\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx =$$
$(-2\ln x + 2\ln(x-2) - \frac{1}{x-2} + c)$

(b)
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \cdot dx =$$
$\ln(x-2)(x+5) + c$

(c)
$$\int \frac{x^4}{x^3-1}dx =$$
$(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c)$

(d)
$$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} \cdot dx =$$
$x - 15\ln|x-2| + 20\ln|x-3| + c$

(e)
$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} \cdot dx =$$
$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + c$

(f)
$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} \cdot dx =$$
$\frac{5}{4}\ln(x^2+4) + \frac{25}{18}\arctan\frac{x}{2} - \frac{5}{24}\ln(x^2+1) + \frac{11}{36}\arctan x + c$

2.
$$\int \frac{dx}{1-x^2} =$$
$(\frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}|)$

3. Izračunajte određene integrale slijedećih racionalnih funkcija:

(a)
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x} = \qquad (\frac{1}{5}\ln\frac{12}{7})$$

(b)

$$\int_3^4 \frac{x^2}{x^2-3x+2}dx = \qquad (3.5+13\ln 2-5\ln 3)$$

(c)

$$\int_{-2}^0 \frac{2x-3}{(x-2)^2}dx = \qquad (\frac{1}{4}-2\ln 2)$$

(d)

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2+x+1}dx = \qquad (-\frac{3}{2}-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}})$$

(e)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^6}{x^2-1}dx =, \qquad (-0,0014)$$

(f)

$$\int_2^3 \frac{x^3+x^2}{x^3-3x+2}dx = \qquad (2.23)$$

(g)

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+3}dx = \qquad (2.77)$$

9.5 Zamjena varijabli u određenom integralu

Rezultat određenog integrala je broj. Promjena varijable integriranja povlači i promjenu granica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt; \qquad \begin{array}{c} a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta) \end{array}$$

Primjer 9.3 *Treba izračunati*

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

Rješenje. U ovom zadatku pogodna je trigonometrijska supstitucija:

$$\begin{aligned} x &= a\sin t \\ dx &= a\cos t dt \\ t &= \arcsin\frac{x}{a} \\ \alpha &= \arcsin 0 = 0 \\ \beta &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nakon supstitucije i promjene granica:

$$
\begin{aligned}
\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot a\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}dt\\
&= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t dt\\
& \Bigg/ \begin{array}{cc} \sin t = s & s_D=\sin 0 = 0\\ \cos t dt = ds & s_G = \sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array} \Bigg/\\
&= a\int_0^1 s^2 ds = a\cdot \left.\frac{s^3}{3}\right|_0^1 = \frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

Zadatak 9.28 *Izračunati*

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\cdot dx$$

Rješenje. Supstitucija mijenja granice:

$$
\begin{gathered}
e^x-1=t^2\\
e^x dx = 2tdt\\
e^x+3=t^2+4\\
t_D=\sqrt{e^0-1}=0\\
t-G=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2
\end{gathered}
$$

i novi integral glasi:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{e^x\cdot t}{t^2+4}\cdot\frac{2tdt}{e^x} &= 2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}dt\\
&= 2\int_0^2\frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 dt - 8\int_0^2\frac{dt}{t^2+4}\\
&= 2t|_0^2 - 8\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}|_0^2\\
&= 4-4(0-\frac{\pi}{4}) = 4+\pi
\end{aligned}
$$

Zadatak 9.29 *Izračunajte*

$$\int_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

Rješenje. Supstitucija

$$\begin{gathered}3x+1=t^2\\ 3dx=2tdt\\ dx=\tfrac{2}{3}tdt\\ x=\tfrac{t^2-1}{3}\\ t=\sqrt{3x+1}\\ t_D=1\\ t_G=4\end{gathered}$$

daje integral racionalne funkcije:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{\frac{2}{3}tdt}{2\cdot\frac{t^2-1}{3}+t} &= \int_1^4 \frac{tdt}{t^2-1+\frac{3}{2}t}\\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{2t+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{t^2-1+\frac{3}{2}t}\\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{2t+\frac{3}{2}}{t^2-1+\frac{3}{2}t}dt-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int_1^4 \frac{dt}{(t+\frac{3}{4})^2-\frac{25}{16}}\\
&= \begin{matrix} t^2-1+\frac{3}{2}t=v & & t+\frac{3}{4}=s\\ (2t+\frac{3}{2})dt=dv & & dt=ds\\ v_D=\frac{3}{2} & & s_D=\frac{7}{4}\\ v_G=21 & & s_G=\frac{19}{4}\end{matrix}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{21}\frac{dv}{v}-\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{4}}^{\frac{19}{4}}\frac{ds}{s^2-\frac{25}{16}}\\
&= \frac{1}{2}\ln v|_{\frac{3}{2}}^{21}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\cdot\ln\left|\frac{s-\frac{5}{4}}{s+\frac{5}{4}}\right||_{\frac{7}{4}}^{\frac{19}{4}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln 21-\ln\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{10}\left(\ln\frac{\frac{7}{2}}{6}-\ln\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln 14-\frac{3}{10}\ln\frac{7}{2}\approx 0.94
\end{aligned}$$

Izračunajte vrijednosti određenih integrala:

1.
$$\int_5^9 x^2\cdot\sqrt{x-5}\cdot dx=$$

$(\frac{524}{3})$

2.
$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=,$$

$(2-\frac{\pi}{2})$

3.
$$\int_1^e \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} =$$
(8/3)

4. Izračunajte

a) $\int_3^4 x(x^2-13)^{23}$

b) $\int_{-2}^0 (5-2x)^9 dx$

c) $\int_2^6 \sqrt{2x-3}dx$

d) $\int_2^{10} \frac{x}{\sqrt{2x+5}}dx$

e) $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{1-x}dx$

f) $\int_0^2 e^{-\frac{5}{2}x}dx$

g) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$

h) $\int_0^3 \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$

i) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

j) $\int_{-2}^1 \frac{2x+5}{x^2+5x+4}dx$

j) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^3 x dx$

k) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^5 x \cos x dx$

Rješenja. a)$-5.86 \cdot 10^{12}$; b)$1.73 \cdot 10^8$; c)$8\frac{2}{3}$; d)$11\frac{1}{3}$; e)-2.69; f)0.4; g)0.5; h)$-\ln 5$; i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{11}{24}$; k) $\frac{21}{128}$

9.6 Integral trigonometrijskih funkcija

Integrali trigonometrijskih funkcija rješavaju se neposredno, primjenom iz srednje škole naučenih trigonometrijskih identiteta.

Primjer 9.4 *Izračunajte:*
$$\int_0^1 \sin(2t+3)\cos(3t-1)dt$$

Ovakav zadatak rješava se primjenom formula za pretvaranje produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj:

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

Rješenje primjera:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(2t+3)\cos(3t-1)dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(5t+2)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(4-t)dt \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(5t+2)}{5}|_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(4-t)}{-1}|_0^1 \\ &= -\frac{1}{10}(\cos 7 - \cos 2) - \frac{1}{2}(\cos 3 - \cos 4) \approx 0.05\end{aligned}$$

1. Izračunajte primjenom formula za pretvaranje umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj:

   (a)
   $$\int_0^{2\pi} 3\sin(2x-\pi)\cdot 6\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2})dx$$
   (-24)

   (b)
   $$\int_0^1 -3\cos(2\pi\varphi+\frac{\pi}{2})\cdot 3\cos(-3\pi\varphi-\frac{\pi}{4})d\varphi$$
   (0)

   (c)
   $$\int_0^{\pi/6} \sin 5x \cos x dx =$$
   $-\frac{1}{24}$

   (d)
   $$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}dx =$$
   $1\frac{173}{385} - \frac{123}{770}\sqrt{3}$

   Integrali tipa
   $$\int \sin^m x \cos^n x dx$$
   trivijalni su ako je bar jedan od cijelih brojeva m ili n neparan. Primjerice, za $m = 2k+1$ integral prelazi u
   $$\int \sin^{2k}\cdot\cos^n x\cdot\sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

koji supstitucijom $\cos x = t$ prelazi u rješivi integral polinoma:

$$\int (1-t^2)^k \cdot t^n dt.$$

Analogno u slučaju da je $n = 2k+1$ neparan broj:

Primjer 9.5

$$\begin{aligned}
\int \sin^6 x \cdot \cos^9 x dx &= \int \sin^6 x \cdot \cos^8 x \cdot \cos x dx \\
&= \int \sin^6 x (1-\sin^2 x)^4 \cdot d(\sin x) = /\sin x = t/ \\
&= \int t^6 (1-t^2)^4 dt = \int t^6 (1 - 4t^2 + 6t^4 - 4t^6 + t^8) dt \\
&= \frac{t^7}{7} - 4\frac{t^9}{9} + 6\frac{t^{11}}{11} - 4\frac{t^{13}}{13} + \frac{t^{15}}{15} + c \\
&= \frac{\sin^7 x}{7} - 4\frac{\sin^9 x}{9} + 6\frac{\sin^{11} x}{11} - 4\frac{\sin^{13} x}{13} + \frac{\sin^{15} x}{15} + c
\end{aligned}$$

Integrali tipa

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

u kojim su potencije parne rješavaju se identitetima

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$

Primjer 9.6

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx &= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \cdot \sin^2 3x dx \\
&= \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 6x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 6x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cos 6x dx \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 12x) dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 6x \cdot \frac{1}{6} d(\sin 6x) \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin 12x}{12} - \frac{1}{48}\frac{\sin^3 6x}{3} + c
\end{aligned}$$

2. Izračunajte slijedeće integrale:

   (a) $\int_0^1 \sin^5 x dx$

   (b) $\int_2^\pi \sin^4 x \cos^3 x dx$

   (c) $\int_2^{4.5} \frac{dx}{\cos x}$

   (d) $\int_1^{2\pi} \sin^4 5x \cos^6 5x dx$

   Rješenja: a)0.089; b)0; c)-3.76; d)$\frac{3\pi}{2^7}$.

U rješavanju se primjenjuje i posebna, trigonometrijska, supstitucija:

$$\begin{aligned} tg\frac{x}{2} &= t \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

kojom trigonometrijski integral prelazi u integral racionalne funkcije koji je uvijek moguće razriješiti.

Primjer 9.7 *Riješite*

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Rješenje. Univerzalna supstitucija daje

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t|+c = \ln|1+tg\frac{x}{2}|+c \end{aligned}$$

Zadatak 9.30 *Univerzalnom trigonometrijskom supstitucijom integrirajte*

$$\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \\
&= \int \frac{2dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} \\
&= \arctan(t+1) = arctg(1+tg\frac{x}{2}) + c
\end{aligned}$$

Ipak, osnovna metoda integriranja je pažljivo gledanje:

Primjer 9.8 *Integrirati*

$$\int \frac{1+2\cos x}{\sin x(3-\cos x)} dx.$$

Rješenje. Integral rješava supstitucija:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+2\cos x}{\sin x(3-\cos x)} dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \Bigg/ = \int \frac{1+2t}{\sin x(3-t)} \cdot \frac{dx}{-\sin x} = \\
&= \int \frac{1+2t}{(1-t^2)(t-3)} dt \\
rastav: & \\
\frac{1+2t}{(1-t)(1+t)(t-3)} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t-3} \\
1+2t &= A(1+t)(t-3) + B(1-t)(t-3) + C(1-t)(1+t) \\
t = 1 &: \quad A = -\frac{1}{4} \\
t = 3 &: \quad C = \frac{7}{8} \\
t = -1 &: \quad B = \frac{1}{8} \\
integral: & \\
\int \frac{1+2t}{(1-t^2)(t-3)} dt &= -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{7}{8}\int \frac{dt}{t-3} \\
&= \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{8}\ln|1+t| + \frac{7}{8}\ln|t-3| \\
&= \frac{1}{4}\ln|1-\cos x| + \frac{1}{8}\ln|1+\cos x| + \frac{7}{8}\ln|\cos x - 3| + c
\end{aligned}$$

U slijedećim zadacima integrirajte primjenom univerzalne trigonometrijske supstitucije:

1. U slijedećim zadacima integrirajte primjenom univerzalne trigonometrijske supstitucije, ako ne ide drugačije:

   (a)
$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\cdot \sin x} =$$

   (b)
$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x \cdot \sqrt{1+\sin^2 x}} =$$

   (c)
$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} \cdot dx =$$

2. Integrirajte:
$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$$

3. Supstitucijom $t = tgx$ riješite:

   (a)
$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} \cdot dx =$$

   (b)
$$\int_0^{\pi} 2\frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x} \quad =, \qquad (\frac{\pi}{12})$$

4. Izračunajte:

   a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ b) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{5+4x}$

   c) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$ d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

   Rješenja: a)$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; b)0.0877; c)$1 + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$; d)$-4(-\frac{3+6\sqrt{2}}{8} \ln 2 + \frac{243\sqrt{2}+216}{1024}\pi + \frac{2+\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

9.7 Integrali iracionalnih funkcija

Funkcije u kojima se javljaju maštovite kombinacije korjena integriraju se supstitucijama. Ruski matematičar Čebišev otkrio je uvjete pod kojima postoje primitivne funkcije iracionalnih funkcija, no to prelazi okvire ovog kolegija.

Primjer 9.9 *Riješite*

$$\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

Rješenje. Supstitucija je vrlo egzotična:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} &= \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{x^2}+1=z^2 \\ -\frac{2}{x^3}dx = 2zdz \\ \frac{1+x^2}{x^2}=z^2 \\ 1+x^2=x^2z^2 \end{array}\right\} = \int \frac{-zx^3dz}{x^4\cdot xz} = -\int \frac{dz}{x^2} \\
&= -\int (z^2-1)dz = z - \frac{z^3}{3} + c \\
&= \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3x^2}\right)+c
\end{aligned}$$

Nisu ipak sve supstitucije egzotične. Većinom su prirodne:

Primjer 9.10 *Integrirati*

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$$

Rješenje. Prirodna supstitucija uklanja drugi korjen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} &= \left\{\begin{array}{c} 1+2x^2=z^2 \\ 4xdx=2zdz \end{array}\right\} = \int \frac{x^3\cdot\frac{zdz}{2x}}{z^3} = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{z^2-1}{2}\cdot dz}{z^2} = \frac{1}{4}\int dz - \frac{1}{4}\int z^{-2}dz
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2}+\frac{1}{4(1+2x^2)}+c$$

Zadatak 9.31 *Pogodnom supstitucijom riješite integral:*

$$\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx &= \left\{\begin{array}{cc} x=t^6 & t_D=1 \\ dx=6t^5dt & t_G=2 \end{array}\right\} = \int_1^2 \frac{t^2\cdot 6t^5dt}{t^6(t^3+t^2)} = \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} \\
\frac{1}{t(t+1)} &= \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1 &= A(t+1)+Bt \\
t=0, \quad A=1 & \qquad t=-1, \qquad B=-1 \\
\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx &= 6\int_1^2 \frac{1}{t} - 6\int_1^2 \frac{1}{t+1} \\
&= 6(\ln t - \ln t+1)|_1^2 \approx 1.73
\end{aligned}
$$

Integrali koje je Čebišev proučavao imaju zapis

$$
\int x^m(a+bx^n)^p dx, \qquad m,n,p \in \mathcal{Q}
$$

i rješiv je u tri slučaja:

- $p \in \mathcal{Z}$
- $\frac{m+1}{n}$ cijeli broj, supstitucija
$$
a+bx^n = z^q, \qquad p = \frac{s}{q}.
$$
- $\frac{m+1}{n}+p$ cijelobrojno, supstitucija
$$
ax^{-n}+b = z^q.
$$

9.7.1 Trigonometrijska supstitucija

Iako nisu uvijek pogodne, moguće je primijeniti ih u situacijama ako integral sadrži iracionalnosti:

$$
\begin{array}{cc}
\sqrt{a^2-x^2} & x = a\sin t \\
\sqrt{x^2-a^2} & x = \frac{a}{\cos t} \\
\sqrt{x^2+a^2} & x = a\tan t.
\end{array}
$$

Tada se podintegralna funkcija svodi na trigonometrijsku, trigonometrijska na racionalnu, a racionalna se funkcija može integrirati.

Primjer 9.11

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x=\sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right\} = \int \cos t \cdot \cos t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t \cos t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}
$$

Primjer 9.12

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \left\{ \begin{array}{c} x = a\tan t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{(a^2\tan^2 t + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{a^3}\int \frac{adt}{\cos^2 t \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^3 t}} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + c = \Big/ \sin t = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{a\tan t}{\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}} \Big/ \\
&= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + c
\end{aligned}$$

Primjer 9.13

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} &= \Big/ \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{\cos t} \\ dx = \frac{\sqrt{2}\sin t}{\cos t}dt \end{array} \Big/ = \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\sqrt{\frac{2}{\cos^2 t} - 2}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin t}{\cos^2 t}dt \\
&= \int \frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{2dt}{\cos^3 t} \\
&= \int \frac{2\cos t dt}{\cos^4 t} = /\sin t = s \quad \cos t dt = ds/ = 2\int \frac{ds}{(1-s^2)^2} \\
\frac{1}{(1-s)^2(1+s)^2} &= \frac{A}{1-s} + \frac{B}{1+s} + \frac{C}{(1-s)^2} + \frac{D}{(1+s)^2} \quad | \cdot (1-s^2)^2 \\
1 &= A(1-s)(1+s)^2 + B(1+s)(1-s)^2 + C(1+s)^2 + D(1-s)^2 \\
t = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}, & \qquad t = -1 \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\
t = 0 \Rightarrow A + B = \frac{1}{2}, & \qquad t = 2 \Rightarrow 3A - B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = B = \frac{1}{4} \\
2\int \frac{ds}{(1-s^2)^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{ds}{1-s} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{1+s} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{(1-s)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{(1+s)^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\ln|1-s| + \ln|1+s|\right) + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + \frac{2\sin t}{\cos^2 t} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\right| + \frac{2\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{\frac{a^2}{x^2}} + c
\end{aligned}$$

Složeniji integrali koji se rješavaju pogodnom supstitucijom.

1. Riješite supstitucijom:

$$\begin{array}{llllll} a) & \int x(3x^2-1)dx & b) & \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} & c) & \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx \\ d) & \int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x}dx & e) & \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} & f) & \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

Rješenja.

1. zadatak

a) $\frac{1}{42}(3x^2-1)^7+c$, b)$\ln|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}|+c$; c) $\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3-3(1+\sqrt{x})^2+8(1+\sqrt{x})-4\ln(1+\sqrt{x})+c$; d)$\ln x+\ln 2\cdot\ln|\ln x+\ln 2|+c$ e)$\ln\left|\frac{\sqrt{e^x-1}-1}{\sqrt{e^x-1}+1}\right|+c$ f)$\arccos\frac{1}{x}+c$

9.8 Parcijalna integracija

Primjenjuje se kada je moguće u podintegralnoj funkciji razlučiti dva faktora:

$$\int f(x) = \int u(x)\cdot dv(x) \quad ,$$

gdje je

$$dv(x) = v'(x)\cdot dx$$

Metoda porcijalne integracije ne nalazi primitivnu funkciju odmah, već nalaženje prebacuje na drugi faktor podintegralne funkcije u nadi da će tada biti jednostavnije:

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x).$$

Primjer 9.14 *Integrirati*

$$\int x\ln x dx$$

Rješenje. funkciju $u(x)$ mudro je izabrati tako, da se deriviranjem pojednostavni. Faktor koji ostaje $dv(x)$ treba biti moguće integrirati. Budući je ovo jedini univerzalni naputak, odabir je prepušten rješavaču. Pogreške nema, jedino nije poželjno dobiti složeniju podintegralnu funkciju od prethodne. Odluka

$$\begin{array}{cc} u=\ln x & dv = xdx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=\frac{x^2}{2} \end{array}$$

prebacuje integraciju na jednostavniju funkciju:

$$\begin{aligned}
\int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + c
\end{aligned}$$

Primjer 9.15 *Treba odrediti*

$$\int \arcsin x dx$$

Rješenje. U primjeru je isključena svaka dvojba:

$$\begin{array}{cc}
u = \arcsin x & dv = dx \\
du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v = x
\end{array}$$

Dobiveni integral integrira se supstitucijom:

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} 1 - x^2 = t^2 \\ -2x dx = 2t dt \end{array} \right\} = x \arcsin x - \int \frac{x \frac{t dt}{-x}}{t} \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Zadatak 9.32 *Izintegrirati*

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & dv = dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx & v = x \end{array} \right\} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} 1 + x^2 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \end{array} \right\} = x\ln(x+\sqrt{1+x^2} - \int \frac{t dt}{t} \\
&= x\ln(x+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} + x
\end{aligned}$$

Moguće je zavrtiti se u krug

Zadatak 9.33 *Izračunajte*

$$\int e^x \cos x dx$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{array} \right\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx
\end{aligned}$$

Početak i završetak daju neodređeni integral kao rješenje jednadžbe s jednom nepoznanicom:

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
\int e^x \cos x dx + \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\
\int e^x \cos x dx &= \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 9.34 *Izračunajte*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$$

Rješenje. Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & dv = \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{\sin x} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{x}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x} \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \cos x = t & t_D = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin x dx = dt & t_G = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{dt}{-\sin x} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1 - t^2} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right| - \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right| \right) \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \ln \frac{\sqrt{2} + 2}{2 - \sqrt{2}} \approx 0.19195
\end{aligned}$$

Zadatak 9.35 *Izračunajte*

$$\int_1^e \sin \ln x dx.$$

Rješenje. Vrtuljak s određenim integralom:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \sin \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{cc} u = \sin \ln x & dv = dx \\ du = \cos \ln x \cdot \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right\} = x \sin \ln x|_1^e - \int_1^e \cos \ln x dx \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = \cos \ln x & dv = dx \\ du = -\sin \ln x \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right\} = e \sin 1 - (x \cos \ln x|_1^e + \int_1^e \sin \ln x dx) \\
2\int_1^e \sin \ln x dx &= e \sin 1 - e \cos 1 + 1 \\
\int_1^e \sin \ln x dx &\approx 0.9
\end{aligned}$$

Zadaci:

1. Parcijalnom itegracijom integrirajte:

   (a)
   $$\int (\frac{\ln x}{x})^2 \quad dx =$$

   (b)
   $$\int x^2 \cdot \sin 2x \cdot dx =$$

   (c)
   $$\int e^{\sqrt{x}} \cdot dx =$$

   (d)
   $$\int x \cdot \sin^2 x \cdot dx =$$

   (e)
   $$\int x \cdot arctgx \cdot dx =$$

   (f)
   $$\int \cos^2 \ln x dx =$$

2. Izračunajte vrijednost odredjenog integrala primjenom parcijalne integracije:

(a)

$$\int_e^{e^2} \ln x dx =, \qquad (e^2)$$

(b)

$$\int_e^{2e} x \ln x dx =, \qquad (\frac{1}{4}e^2(8\ln 2+3)$$

(c)

$$\int_1^{e} \ln^2 x \cdot dx =, \qquad (0.718)$$

(d)

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx =, \qquad (e-\frac{5}{e})$$

(e)

$$\int_0^{1} \frac{x^2 \arctan x}{x^2+1} dx = \qquad (-0.08)$$

(f)

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx =, \qquad (1)$$

(g)

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx =, \qquad (\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^{\pi}})$$

Zahtjevnost zadataka integriranja svodi se na primjenu identiteta koji nisu uobičajeni.

Zadatak 9.36 *Otkrijte*

$$\int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \Bigg/ \begin{array}{c} t = arctgx \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{array} \Bigg/ = \int \frac{e^t}{\sqrt{1+tg^2t}} dt = \Bigg/ \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}} \Bigg/ \\
\int e^t \cos t dt &= \left\{ \begin{array}{cc} u = e^t & dv = \cos t dt \\ du = e^t dt & v = \sin t \end{array} \right\} e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^t & dv = \sin t dt \\ du = e^t dt & v = -\cos t dt \end{array} \right\} \\
&= e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt \\
\int e^t \cos t dt &= \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) = \frac{e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}(x+1),
\end{aligned}$$

a nejasnoće pojasnite u trigonometrijskom dodatku.

9.9 Primjene neodređenog integrala

Diferencijalna jednadžba je jednadžba u kojoj se traži formula funkcije, a u jednadžbu ulaze formule derivacija tražene funkcije. Neodređeni integral je sredstvo za rješavanje jednostavnih diferencijalnih jednadžbi.

Gibanje je promjena položaja u odnosu na fiksiranu točku prostora 0. Jednadžba gibanja je funkcija koja računa položaj tijela $s(t)$ u odnosu na za zadani trenutak t. Brzina gibanja u trenutku t računa se po formuli $v(t) = \dot{s}(t)$ za proizvoljni trenutak t. Akceleracija u trenutku t:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t).$$

Često je poznatom silom ili impulsom određena akceleracija tijela, kao u svemiru pri paljenju motora.

Zadatak 9.37 *Tijelo se giba pravocrtno s ubrzanjem koje se mijenja po formuli*

$$a = 6t - 12.$$

U početnom je trenutku $t = 0$ imalo početnu brzinu $v_0 = 9m/s$ i nalazilo se na $s_0 = 10m$ desetom metru od točke orijentira. Nađite:

a) brzinu i zakon gibanja točke i

b) iznos ubrzanja, brzine i položaj točke u 2. sekundi gibanja.

c) trenutak u kojem je brzina najmanja.

Rješenje.

a) brzina je rješenje diferincijalne jednadžbe po varijabli t:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 6t - 12 \quad |\int \quad dt \\ v &= \int (6t-12)dt \\ v &= 3t^2 - 12t + c \end{aligned}$$

gdje je c konstanta koja se nalazi iz takozvanog početnog uvjeta:

$$\begin{aligned} v_0 = v(t_0) &= 9 \\ 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + c &= 9 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

pa je formula za računanje trenutačne brzine:

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

Jednadžba gibanja koja računa trenutačan položaj tijela na pravcu u odnosu na točku orijentira rješenje je jednadžbe

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= 3t^2 - 12t + 9 \quad | \int \quad dt \\
s(t) &= t^3 - 6t^2 + 9t + c \\
s_0 = s(0) &= c = 10 \\
s(t) &= t^3 - 6t^2 + 9t + 10
\end{aligned}$$

b) vrijednosti ubrzanja, brzine i položaj tijela u drugoj sekundi ubrzanja jesu redom

$$\begin{aligned}
a(2) &= 0 \\
v(2) &= -3m/s \\
s(2) &= 12.m
\end{aligned}$$

c) nužan uvjet lokalnog ekstrema funkcije $v = v(t)$ je

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= 0 \\
6t - 12 &= 0 \\
t &= 2,
\end{aligned}$$

pa je u drugoj sekundi brzina najmanja. Ovdje se radi o brzini suprotnoj od smjera akceleracije, jer se do druge sekunde tijelo usporava, ali sve blaže i blaže. Nakon druge sekunde tijelo se počinje ubrzavati.

Zadatak 9.38 *Na visini od 30 metara izbačen je kamen vertikalno brzinom od $20m/s$. Odredite formulu za računanje trenutne brzine i visine leta u polju sile teže s $g = 9.81m/s^2$. Izračunajte najveću visinu leta i vrijeme za koje će pasti. Otpor zraka zanemariti.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
a(t) &= g = -9.81 \\
v(t) &= \int a dt = \int -g dt = -gt + c \\
v(0) &= 20m/s = -g \cdot 0 + c \\
v(t) &= -gt + 20 \\
h(t) = s(t) &= \int (-gt + 20) dt = -g\frac{t^2}{2} + 20t + c \\
h(0) &= 30 = -g \cdot 0 + 20 \cdot 0 + c \\
h(t) &= -g\frac{t^2}{2} + 20t + 30
\end{aligned}$$

Najveći domet je maksimum funkcije $h(t)$. Nužan uvjet maksimuma daje mogući trenutak t:

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) = 0 &= -gt + 20 \Rightarrow t = \frac{20}{g} \approx 2.04s,\\ h(2) &= -g\frac{4}{2} + 20 \cdot 2 + 30 = 50m.\end{aligned}$$

Iz jednadžbe gibanja moguće je izračunati trenutak t u kojem će tijelo biti na visini $h(t) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= -g\frac{t^2}{2} + 20t + 30\\ t_{1,2} &= \frac{-20 \pm \sqrt{400+600}}{-5} = \frac{-20 \pm \sqrt{1000}}{-5} = 10.3; -2.3\end{aligned}$$

Budući je izuzetno mala vjerojatnost puta u prošlost, let će trajati malo više od 10 sekundi.
U slučaju da se tijelo ne giba pravocrtno, nastoji se gibanje rastaviti na komponente i odrediti jednadžba gibanja za svaku komponentu.

Primjer 9.16 *Granata iz haubice ispaljena je početnom brzinom v_0, pod kutom φ prema horizontali. Odrediti gibanje granate.*

Rješenje. Gibanje se rastavlja u komponentu visine $h(t)$ na kojoj je granata i komponentu horizontalne udaljenosti od mjesta lansiranja $s(t)$. Visina u trenutku t jednaka je

$$h(t) = v_0 t \sin\varphi - \frac{g}{2}t^2,$$

dok se udaljenost od mjesta ispaljivanja računa po formuli

$$s = v_0 t \cos\varphi.$$

Dobivene jednadžbe predstavljaju parabolu u hs koordinatnom sustavu, a parabola se dobiva eliminacijom parametra t:

$$\begin{aligned}t &= \frac{s}{v_0\cos\varphi}\\ h &= v_0\frac{s}{v_0\cos\varphi}\sin\varphi - \frac{g}{2}\frac{s^2}{v_0^2\cos^2\varphi}\\ h &= s\tan\varphi - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}s^2\end{aligned}$$

Zadatak 9.39 *Izračunajte za koji kut se pri istoj brzini granate ostvaruje najveći domet?*

Rješenje. Domet je druga nultočka jednadžbe parabole u (h, s) koordinatnom sustavu:

$$s_2 = D = \frac{2v_0}{g}\sin 2\varphi$$

i najveći je za $\varphi = 45^o$.

Zadaci

1. Svemirski brod ubrzava po formuli $a = 12t^2 + 6t$. Sekundu nakon početka ubrzavanja brod je imao brzinu $8m/s$ i nalazio se na 6. metru od točke orijentira. Odredite jednadžbu gibanja broda i izračunajte brzinu i položaj u trenutku ubrzavanja. Izračunajte brzinu i položaj 5 sekundi od početka ubrzavanja. Koloki je put brod prešao u 5. sekundi od početka ubrzavanja?
   Rješenje. $s = t^4+t^3+t+3$, $v = 4t^3+3t^2+1$, $s(0) = 3pc$, $v_0 = 1pc/s$, $v(5) = 576m/s$, $s(5) = 758m$, put u 5. sekundi je $758 - 305 = 453m$

2. Tijelo je izbačeno u zrak brzinom v_0. Odredite formulu za računanje trenutne brzine i visine.
   Rješenje. $v(t) = -gt + v_0t$, $s = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t$.

9.10 Primjene odredjenog integrala

Odredjeni integrali primjenjuju se za izračunavanje ukupnosti veličina koje nisu pravilne homogene.

9.10.1 Primjene odredjenog integrala u geometriji

Newton-Leibnitzova formula modificira se u slučaju da je površina u $x0y$ ravnini omeđena vertikalama $x = a$ i $x = b$ slijeva i sdesna, grafom funkcije $y = f(x)$ s gornje, a grafom funkcije $y = g(x)$ s donje strane:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Ako se dio ravnine nalazi između horizontala $y = c$ i $y = d$, a lijeva i desna krivulja imaju implicitne jednadžbe $x = \varphi(y)$ i $x = \psi(y)$, tada se površina tog dijela ravnine može računati formulom

$$\int_c^d (g(y) - f(y))dy.$$

Primjer 9.17 *Površina koju zatvaraju $y = x^3$, pravac $y = 8$ i os $0y$ računa se integralom*

$$\int_0^8 \sqrt[3]{y}dy = \left.\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^8 = 12$$

Primjer 9.18 *Dio ravnine omeđen hiperbolom*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i pravcem $x = 2a$ ima površinu koja se rješava integralom:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{b}{a}\int_a^{2a}\sqrt{x^2-a^2}dx = \left\{\begin{array}{cc} x = \frac{a}{\cos t} & a = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow t = 0 \\ dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t} & 2a = \frac{2a}{\cos t} \Rightarrow t = \pi/3 \end{array}\right\} \\
&= 2\frac{b}{a}\int_0^{\pi/3}\int a\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{a\sin t}{\cos t}dt = 2ab\int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt \\
&= \left\{\begin{array}{cc} \sin t = s & \sin 0 = 0 \\ \cos t dt = ds & \sin\pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} = 2ab\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{s^2}{(1-s^2)^2} \\
\frac{s^2}{(1-s^2)^2} &= \frac{A}{1-s} + \frac{B}{1+s} + \frac{C}{(1-s)^2} + \frac{D}{(1+s)^2} \quad (1-s^2)^2 \\
s^2 &= A(1+s)^2(1-s) + B(1-s)^2(1+s) + C(1+s)^2 + D(1-s)^2 \\
s = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}, & \quad s = -1 \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\
s = 0 \Rightarrow A + B = -\frac{1}{2}, & \quad s = 2 \Rightarrow 3A - B = -\frac{1}{2}; \qquad A = B = -\frac{1}{4} \\
&= \left.\frac{ab}{2}\left(\ln(1-s) - \ln(1+s) + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s}\right)\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

Zadatak 9.40 *Izračunajte površinu obaju dijela na koje parabola $y = 2x$ dijeli krug $x^2 + y^2 \leq 8$.*

Rješenje. Točke u kojim se sijeku parabola i kružnica su

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right. \Rightarrow x^2 + 2x - 8 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = 2 \\
y &= \pm 2
\end{aligned}$$

Radi očite simetričnosti, računa se površina omeđena parabolom, kružnicom i osi $0x$:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 \left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{x}\right) dy = \left\{ \begin{array}{cc} y = 2\sqrt{2}\sin t & 0 = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow t = 0 \\ dy = 2\sqrt{2}\cos t dt & 2 = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow t = \pi/4 \end{array} \right\} \\ &= 8\int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\bigg|_0^2 = 4\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2t) dt - \frac{8}{6} = \pi + 2 - \frac{4}{3} \\ &= \pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Jedan od traženih dijelova ima duplo veću površinu od tražene i iznosi

$$P_1 = 2\pi + \frac{4}{3},$$

dok je površina drugog, većeg dijela dopunjak do površine čitavog kruga

$$6\pi - \frac{4}{3}.$$

Zadatak 9.41 *Izračunajte površinu zatvorenu pravcem $y = 2x$ između parabola $y = x^2 i\ y = \frac{x^2}{2}$*

. *Rješenje.* Iz crteža je jasno da se površina računa u dva dijela:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 (2x - x^2) dx + \int_2^4 (2x - \frac{x^2}{2}) dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\bigg|_0^2 + (x^2 - \frac{x^3}{6})\bigg|_2^4 \\ &= 4 - \frac{8}{3} + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Zadaci računanja površine dijela ravnine omedjenog grafovima funkcija i koordinatnih osi:

1. Izračunajte površine koje su omedjene:
   (a) parabolom $y = 4x - x^2$ i osi apscisa. (10.67)
   (b) grafom funkcije $y = \ln x$, osi OX i pravcem $x = e$.(1)
   (c) lukom krivulje $y = tgx$, $x = \frac{\pi}{4}$ i osi x. (0.35)
   (d) dijelom grafa $y = x^3 - 3x + 2$, osi x i vertikalama u točkama ekstrema funkcije.(4)

2. Izračunati površinu ograničenu krivuljama:
   (a) $y = \sin x$, $y = \cos x$ osi apscisa i pravcem $2x = \pi$ (0.6)
   (b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i pravcem $x = 1$. (1.1)

(c) $y = \frac{1}{1+x^2}$ i $y = \frac{x^2}{2}$. (1.2)

3. Izračunajte površinu lika omedjenog krivuljom $y = x^2$ i pravcem $y = 4$. ($10\frac{2}{3}$.)

4. Izračunati veličinu površine koju omedjuje os ordinata i grafovi funkcija $y = tgx$ i $y = \frac{2}{3}\cos x$. (0.2)

5. Izračunajte veličinu površine omedjene pravcima $x = 0$, $y = e$, lukom hiperbole $xy = 4$ i normalom u točki $(1, 4)$ zadane hiperbole. Normala je okomica na tangentu u dirallištu. (36)

6. Izračunati veličinu površine koju odredjuju grafovi funkcija $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$. (0.3)

7. Izračunajte površinu izmedju hiperbole $xy = 2$ i pravca $2y + x = 5$. (0.98)

8. Odredite veličinu površine omedjene krivuljom

$$y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$$

i pravcima $y = 1$ i $x = 0$. (0.36)

9. Odredite veličinu površine omedjene krivuljama $y^2 = x$, $xy = 1$, $x = 3$ i osi apscisa. (1.7)

10. Odredite veličinu površine omedjene krivuljama: $y = 1 - x^2$, $y = 3 + 2x - x^2$ i osi apscisa. (6)

11. Izračunajte površinu omedjenu krivuljama $y = \sqrt{x+2}$ i $y = \frac{1}{2}x + 1$. (4)

12. Nadjite veličinu površine omedjene:

   (a) krivuljama $2 + x = y^2$ i $2y = x + 2$. (6)

   (b) parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $x + y = 0$. (4.5)

   (c) grafom $y = 2^x$, horizontalom $y = 2$ i osi $x = 0$. (0.56)

13. Odredite veličinu površine omedjene

(a) grafom funkcije $y = |\log x|$ i osi apscisa od $x = 0.1$ do $x = 10$. (6.4)

(b) krivuljama $y = (x+1)^2$ i $x = \sin(\pi x)$ i osi apscisa $y = 0$ za $0 \leq y \leq 1$. (0.97)

Zadatak 9.42 *Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $x = y^2 - 2y + 2$ i pravcem $2x + y = 9$.*

Rješenje. Krivulja je parabola okrenuta, zbog pozitivnosti y^2, prema pozitivnom dijelu osi $0x$. Jednadžba $y^2 - 2y + 2 = 0$ nema rješenja, pa parabola ne presijeca os $0y$. Iz modificirane jednadžbe $x = (y-1)^2 + 1$ dobiva se tjeme u $(1,1)$. Sjecišta pravca i elipse su:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} x = y^2 - 2y + 2 \\ 2x + y = 9 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{9-y}{2} &= y^2 - 2y + 2 \\ 2y^2 - 3y - 5 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = -1; \frac{5}{2} \\ x_1 = 5; \qquad & x_2 = \frac{13}{4} \\ T_1 = (-1, 5) \quad T_2 = (\frac{5}{2}, \frac{13}{4}) \end{aligned}$$

Iz ovih podataka moguće je nacrtati pravac i parabolu. Traženu površinu lakše je dobiti integralom duž osi $0y$:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{5/2} \left(\frac{9-y}{2} - (y^2 - 2y + 2) \right) dy = \int_{-1}^{5/2} \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} y - y^2 \right) dy \\ &= \left(\frac{5}{2} y + \frac{3}{2} \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{5/2} \\ &= \frac{25}{4} + \frac{3}{2} \frac{25}{8} - \frac{125}{24} - \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 7 \frac{7}{48} \end{aligned}$$

Zadatak 9.43 *Izračunati površinu koja je omeđena krivuljama $y^2 = 2x + 1$ i $y = x + 1$.*

Rješenje. Za $x = 0$ u jednadžbi parabole dobivaju se sjecišta s osi ordinata: $(0, 1)$ i $(0, -1)$. Sjecišta s pravcem su $(0, -1)$ i $(4, 3)$.

$$P = \int_{-1}^{3} (y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}) dy = 3.5$$

14. Izračunajte površinu ograničenu krivuljama $2x = y^2$ i $2y = x^2$. (4/3)

9.10.2 Volumen rotacionog tijela

Rotaciono tijelo nastaje rotacijom geometrijski određene površine oko neke istaknute osi.

Ako se površina u koordinatnoj ravnini nalazi s jedne strane osi $0x$, ako je slijeva i sdesna omeđena vertikalama $x = a$, $x = b$, ako se gornja granica može opisati jednadžbom $y = f(x)$, a donja $y = g(x)$, tada se volumen tijela koje nastaje rotacijom površine oko osi $0x$ računa integralom

$$V = \pi \int_a^b \Big(f^2(x) - g^2(x) \Big)\, dx$$

Primjer 9.19 *Treba izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi x površine omeđene krivuljama $y = |x^3|$ i $y = -x^2 + 2$.*

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \Big((-x^2+2)^2 - x^6 \Big)\, dx = 2\int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4 - x^6) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{x^7}{7} \right]\Bigg|_0^1 = \frac{572}{105}\pi jed^3 \end{aligned}$$

Zadatak 9.44 *Izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom oko osi $0x$ površine omeđene krivuljama $4y = x^2$ i $y^2 = 4x$.*

Rješenje. Nakon nalaženja sjecišta

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{x^2}{4} \\ \frac{x^4}{16} = 4x \\ x(x^3 - 4^3) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 4 \quad y = 16 \Rightarrow \qquad T(4,16)$$

i crtanja parabola, volumen je jednak

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{4x})^2 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right] dx = \pi \left(4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^4 \\ &= \frac{96}{5}\pi \end{aligned}$$

Površina koja rotira može biti smještena u potpunosti s desne strane osi $0y$ i biti određena s

$$0 \leq a \leq x \leq b$$

i

$$g(x) \leq y \leq f(x).$$

Ako takva površina rotira oko osi $0y$, volumen kroz koji površina u prostoru prolazi računa se po formuli:

$$V = 2\pi \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

9.10.3 Duljina luka krivulje

Duljina krivulje grafa $y = f(x)$ od točke $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$ jednak je

$$l_{a,b} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Primjer 9.20 *Naći duljinu krivulje $y = \arcsin e^{-x}$ od točke $x = 0$ do točke $x = 1$ znači izračunati integral*

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-2x}}}dx = \left\{ \begin{array}{c} 1 - e^{-2x} = t^2 \\ 2e^{-2x}dt = 2tdt \end{array} \right. \\ &= \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{tdt}{e^{-2x} \cdot t} = \int_0^{\sqrt{1-e^{-2}}} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - t}{1 + t} \right| \Bigg|_0^{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \ln(e + \sqrt{e^2 - 1}) \end{aligned}$$

Zadaci.

1. Odredite duljinu luka grafa funkcije

   $$y = x^{3/2}.$$

   između nultočke i točke s apscisom $x = 4$.

2. Izračunajte duljinu grafa eksponencijalne funkcije

   $$y = e^x$$

   za $-1 \leq x \leq 3$.

Rješenje.

1. $\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = 9.07$
2. $\int_{-1}^3 \sqrt{1 + e^{2x}}dx = /1 + e^{2x} = t^2/ = 20.72$

Zadatak

1. Izračunajte duljinu luka parabole $y^2 = 5x - x^2$ između nultočaka.
2. Izračunajte duljinu lančanice $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ok točke s apscisom $x = 0$ do točke u kojoj je $x = a$
3. Odredite opseg astroide
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$
4. Izračunajte duljinu luka krivulje
$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$$
od $y = 1$ do $y = e$.
5. Izračunajte duljinu krivulje
$$y = \ln \sin x$$
između točaka $x = \frac{\pi}{3}$ i $x = \frac{2\pi}{3}$.

Rješenja.

1. 8.23
2. $s = \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{\frac{-2x}{a}}} dx = \frac{1}{2} a(e - \frac{1}{e})$
3. $6a$
4. $\frac{e^2+1}{4}$
5. $\ln 3$

Parametarski zadanoj krivulji duljina se računa po formuli
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt,$$
gdje su $x(t)$ i $y(t)$ formule koje računaju koordinate točke krivulje po parametru t.

Primjer 9.21 *Odrediti duljinu cikloide*

$$\begin{aligned} x &= 2(t-\sin t) \\ y &= 2(1-\cos t) \end{aligned}$$

između točke s parametrom 0 i točke s parametrom 2π.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2(1-\cos t) \\ \dot{y} &= 2\sin t \\ \dot{x}^2+\dot{y}^2 &= 4(2-2\cos t) \\ s &= \int_0^{2\pi} \int 8(1-\cos t)dt = \Big/ \frac{1-\cos t}{2} = \sin^2\frac{t}{2} \Big/ \\ s &= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 2\sqrt{2}\cdot \left.\frac{-\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^{2\pi} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

10 Ogledni primjerci ispitnih zadataka

Matematika 1

1. Odredite najveći kut u trokutu u kojem su vrhovi točke:

$$A = (2, 3, 4) \quad B = (5, 9, 8), \quad C = (3, 6, -1).$$

2. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije zadane formulom:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}.$$

3. Nacrtajte tangentu povučenu na graf funkcije

$$y = e^{x^2+x-2}$$

u točki s apcisom $x = 1$. Odredite duljinu dijela tangente izmedju njenih sjecišta s koordinatnim osima.

4. Izračunajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} = .$$

5. Kolika je veličina površine koju omedjuju krivulje:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad i \quad y = x^2$$

Matematika 1

1. Zadane su točke $A = (2, 3, 1)$ i $B = (0, -2, -3)$. Zadan je i vektor

$$\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

Izračunajte:

$$((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{a}) - \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{AB} = .$$

2. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti, kao i točke infleksije funkcije zadane formulom:

$$y = \ln^2 x.$$

3. Nacrtajte tangentu na krivulju

$$y + \ln(3 - 2x) = 4$$

u točki s koordinatom $x = 1$. Koliko je velika površina koju s koordinatnim osima zatvara tangenta?

4. Izračunajte i rezultat zaokružite na stotinku:

$$\int_0^3 x^2 e^{-x} dx =$$

5. Kolika je veličina jedne od površina koju sinusoida

$$y = 2\sin(3x - \pi)$$

zatvara s koordinatnom osi OX?

Matematika 1

1. Izračunajte volumen i oplošje tetraedra čiji su vrhovi odredjeni točkama:

$$O = (0,0,0); A = (2,3,-1); B = (3,3,3); C = (-1,-2,4).$$

2. Nacrtajte tangente na graf funkcije

$$y = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 6x - 6$$

   u točkama infleksije grafa.

3. $$\int_2^4 \ln \frac{1}{2x-3} \cdot dx =$$

   Rezultat zaokružite na desetinku.

4. Kolika je veličina površine koju omedjuju:

$$x + y = 8 \quad i \quad xy = 12.$$

5. Odredite domenu, ispitajte monotonost i zakrivljenost grafa, ponašanje na rubovima domene i nacrtajte graf funkcije:

$$y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

Matematika 1

1. Neka je $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$. Odredite:
   (a) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
   (b) $|\overrightarrow{a}|$
   (c) kut izmedju $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$
2. Napišite jednadžbu tangente i nacrtajte tangentu na graf funkcije $y = x^2 - \ln x$ u točki s $x = 1$. Odredite koordinate sjecišta tangente i osi apscisa.
3. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije
$$y = x \cdot e^{x-x^2}.$$
4. Izračunajte i rezultat zaokružite na stotinku:
$$\int_{-1}^{1} (1 + \frac{x}{2})^3 \cdot dx = .$$
5. Kolika je površina jednog od likova omedjenog krivuljama $y = \cos x$ i $y = \sin x$.

Matematika 1

1. Točke $A(3,0,2)$, $B(-1,0,1)$; $C(2,0,3)$ i $D(0,-5,0)$ odredjuju tetraedar. Odredite volumen tetraedra i njegovu visinu ako on leži na trokutu ABC.

2. Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije
$$y = e^{2x} + e^x + 1$$
u točki s apscisom $x = 0$. Odredite površinu koju tangenta zatvara s koordinatnim osima.

3. Nacrtajte graf funkcije
$$y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$
tako da ispitate domenu, monotonost, zakrivljenost i ponašanje na krajevima domene.

4. Izračunajte i zaokružite do na stotinku:
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} \cdot dx =$$

5. Koliku površinu zatvaraju graf funkcije
$$y = 2\sin(3x + \pi)$$
i krivulja $3(x^2 + y) = \pi x$.

Matematika 1

1. Točke $A(3,0,5)$, $B(0,1,0)$ i $O(0,0,0)$ odredjuju ravninu u kojoj se nalaze. Nadjite bar jedan vektor okomit na ravninu. Odredite bar jedan kut u trokutu OAB.

2. Kolika je površina trokuta kojeg s koordinatnim ravninama zavara tangenta na
$$y = \sin^2 x$$
u točki za čiju apscisu vrijedi
$$tgx = 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Odredite domenu, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije
$$y = \ln \frac{2x-3}{x-1}.$$

4. Rezultat zaokružite na desetinku:
$$\int_4^7 x\sqrt{x^2-13}dx =$$

5. Odredite površinu omedjenu krivuljama $y = e^x$, $\quad y = e^{-x}$ i $y = e$.

Matematika 1

1. Za zadane točke $A = (2, 3, 0), B = (3, 2, 1)$ i $C = (4, 4, 1)$ izračunajte

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{CA}.$$

2. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9})$$

u točki s apscisom $x = 4$. Koliku duljinu na tangenti odsijecaju njena sjecišta s koordinatnim osima?

3. Izračunajte i zaokružite na stotinku:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{1 - 2\sin x} \cdot dx = .$$

4. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

5. Odredite površinu koju zatvaraju grafovi funkcija zadanih sa: $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$.

11 Algebarski dodatak

11.1 Potenciranje binoma

U prvom razredu srednje škole u programu je algebra. Poznata je formula kvadrata binoma:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Nešto manje ostaje u sjećannju formula

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Pogotovo

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Proučavanjem koeficijenata, Pascal je dobio "trokut" koji daje koeficijente za slijedeću potenciju:

$$\begin{array}{lllllllll}
(a+b)^1 & \Rightarrow & 1 & 1 \\
(a+b)^2 & \Rightarrow & 1 & 2 & 1 \\
(a+b)^3 & \Rightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 \\
(a+b)^4 & \Rightarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
(a+b)^5 & \Rightarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
(a+b)^6 & \Rightarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & \vdots
\end{array}$$

Zadatak 11.1 *Nastavite trokut.*

Rješenje. Prvi koeficijenat u rastavu $(a+b)^7$ bit će 1. slijedeći će biti jednak zbroju prvog i drugog u rastavu $(a+b)^6$ i iznosi 7 Treći koeficijent rastava $(a+b)^7$ jednak je zbroju drugog i trećeg koeficijenta u prethodnom rastavu $(a+b)^6$ i iznosi 21. Četvrti koeficijent u 7. redu jednak je zbroju trećeg i četvrtog koeficijenta u 6. redu, što iznosi 35. Za njim slijedi na petom mjestu ponovo 35 kao zbroj četvrtog i petog člana u redu iznad. Potom opet 21, pa 7 i na kraju 1:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Prvi i posljednji koeficijent uvijek je 1.

Drugi i pretposljednji koeficijent uvijek je:

$$n.$$

Treći i pretpretposljednji koeficijenti su rezultati

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Četvrti gledani s obiju strana su

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Zanimljivo je da se koeficijenti podudaraju s brojevima kombinacija na lotu. Tako je broj kombinacija pri izvlačenju 3 različite kuglice iz bubnja sa 7 različitih kuglica:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Primjer 11.1 *Broj kombinacija na izvlačenju lota 6/45 bio bi*

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

dok bi na lotu 7/39 bio

$$\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}.$$

Binomni koeficijent u oznaci

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$$

koji se čita n povrh k računa se na računaljci programom nCr kao broj kombinacija na lotu k/n. Više o tome doznat će oni koji budu upisali "Vjerojatnost i statistiku".

11.2 Potenciranje

Potenciranje prirodnim eksponentom definira se induktivno:

$$\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^n &= x \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Množiti i dijeliti mogu se potencije jednakih baza:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad x^m : x^n = x^{m-n}$$

i jednakih eksponenata:

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n \quad x^n : y^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

Potenciranje **negativnim** eksponentom:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

prirodno je proširenje množenja i dijeljenja potencija, kao na primjeru

$$x^3 : x^7 = x^{-3} = \frac{1}{x^3}.$$

Korjenovanje m-tim korjenom prirodno je proširenje potencija na razlomljene eksponente:

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}},$$

a prirodnost se vidi na primjeru

$$\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2.$$

11.3 Trigonometrijski identiteti

Trigonometrijski identiteti izvode se iz definicija:

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad ctgx \cdot tgx = 1,$$

a mogu biti posljedica Pitagorina poučka:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Slijedi izvod

$$\begin{aligned}
tg^2x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \\
\cos^2 x \cdot tg^2x &= 1-\cos^2 x \\
\cos^2 x(tg^2x+1) &= 1 \\
\cos^2 x &= \frac{1}{tg^2x+1} \\
\sin^2 x &= \frac{tg^2x}{tg^2x+1}
\end{aligned}$$

Literatura

[1] Marušić S.:Matematka I: udžbenik s riješenim primjerima, FPZ, Zagreb, 2003.

[2] Kurepa S.: Matematička analiza, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.

[3] Danko P.E., Popov A.G., Kozhevnikova T.YA.: Higher mathematics in problems and exercises, Mir Publishers, Moscow, 1983.

[4] Horvatić K.:Linearna Algebra I, II, III, Matematički odjel PMF-a Sveučilišta u Zagrebu i HMD, Zagreb, 1995.

[5] Kovač Striko E.: Matematika II, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 1999.

[6] Pavković-Svrtan-Veljan: Matematika-zbirka zadataka s uputama i rješenjima, Školska knjiga, Zagreb, 1983.