2. Redovi

Neka je zadan niz realnih brojeva (a_n). Definiramo **niz parcijalnih suma** (s_n) kao

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\text{-ta parcijalna suma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uređeni par nizova $((a_n), (s_n))$ nazivamo **red**.
Red $((a_n), (s_n))$ kraće zapisujemo kao

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira**, ako niz parcijalnih suma (s_n) konvergira.
Ako je $s \in \mathbb{R}$ t.d. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ tada kažemo da je s **suma reda** i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Primjer

- Promatramo konstantan niz $a_n = 1, n \in \mathbb{N}$. Tada je
$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = 1 + \ldots + 1 = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, pa red $\sum a_n = \sum 1$ divergira.
- Promatramo red $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ za $|q| < 1$. Niz parcijalnih suma je
$$s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$
$$|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 \frac{1-q^n}{1-q}) = \frac{a_1}{1-q}.$$
Dakle,
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}, \quad \text{za } |q| < 1.}$$

Nužan uvjet konvergencije

Pretpostavimo da red $\sum a_n$ konvergira. To znači da postoji $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Dokazali smo:

ako red $\sum a_n$ konvergira, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ovo možemo čitati i kao:

ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tada red $\sum a_n$ divergira.

Zato se uvjet $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$ naziva **nužan uvjet konvergencije reda**.

Ovaj uvjet nije i dovoljan uvjet za konvergenciju reda (tj. ako je ispunjeno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, onda ne znamo kovergira li red $\sum a_n$ ili ne).

Primjeri

- Promatramo red $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ za $|q| \geq 1$. Provjerimo nužan uvjet konvergencije:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = \begin{cases} \infty, & \text{za } q > 1; \\ 1, & \text{za } q = 1; \\ \text{ne postoji}, & \text{za } q \leq -1. \end{cases}$$

  Zaključujemo da $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ za $|q| \geq 1$ divergira.
- Može se pokazati da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentan, iako je nužan uvjet konvergencije zadovoljen ($\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.)

Kako provjeriti konvergira li zadani red ili ne?

- Po definiciji je najčešće preteško (odrediti s_n i provjeriti konvergenciju niza s_n).
- Nužan uvjet konvergencije (daje odgovor samo u slučaju kada nije zadovoljen).
- Kriteriji konvergencije!

Naučit ćemo:

1. kriterij uspoređivanja,
2. D'Alambertov kriterij,
3. Cauchyev kriterij,
4. Leibnizov kriterij.

Prva tri kriterija se primjenjuju isključivo na redove s pozitivnim članovima (tj. redove oblika $\sum a_n$, gdje je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$).
Četvrti kriterij se primjenjuje samo na alternirajuće redove (tj. redove $\sum a_n$ takve da a_n i a_{n+1} imaju različite predznake za sve n).

Leibnizov kriterij

Neka je $\sum(-1)^n a_n$ alternirajući red. Ako vrijedi

1. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$,
2. postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ za sve $n \geq n_0$,

tada red $\sum a_n$ konvergira.

Kriterij uspoređivanja I

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima. Pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $c > 0$ takvi da je

$$a_n \leq c \cdot b_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tada vrijedi:

- Ako red $\sum a_n$ divergira, tada i red $\sum b_n$ divergira.
- Ako red $\sum b_n$ konvergira, tada i red $\sum a_n$ konvergira.

Kriterij uspoređivanja II

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi takvi da je $a_n > 0, b_n > 0, \forall n$. Pretpostavimo da postoji $c := \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ i da je $c \neq 0$ i $c \neq \infty$. Tada ili oba reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju, ili oba divergiraju.

D'Alambertov kriterij

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima. Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

- Ako je $q < 1$ tada red $\sum a_n$ konvergira.
- Ako je $q > 1$ tada red $\sum a_n$ divergira.

Cauchyev kriterij

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima. Neka je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

- Ako je $q < 1$ tada red $\sum a_n$ konvergira.
- Ako je $q > 1$ tada red $\sum a_n$ divergira.

Zadatak

Konvergiraju li sljedeći redovi?

1. $\sum \frac{n}{n+1}$
2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{1}{n^2}$
4. $\sum \frac{1}{n!}$
5. $\sum \frac{1}{n^n}$
6. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

Apsolutna konvergencija

Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Teorem

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira, onda i konvergira.

Obrat ne vrijedi! Navedite primjer.