Uvod u elementarnu logiku

U doradi

Srećko Kovač[1]
http://www.ifzg.hr/~skovac/index.html

5. studenoga, 7. svibnja 2007.
prva inačica 18. 01. 2001., ispravljeno 9.01.2002.

[1]skovac@ifzg.hr,

SADRŽAJ

UVOD. ŠTO JE LOGIKA?

Uvod u logiku na početku studija filozofije!? Može se odgovoriti da je to smisleno a također i u skladu s tradicijom filozofije i logike. Uvod u logiku doista je ujedno i jedan uvod u filozofiju. Logika otvara i omogućuje filozofijski pristup predmetu. S njom filozofija započinje, a širenjem i dogradnjom logike dograđuje se i razvija i sama filozofija. U jednom širem smislu naziva ‘logika’, filozofija se čak i svodi na logiku.

Logika je na određen način pretpostavka svih znanosti (prirodnih i humanističkih). U svim se znanostima nešto tvrdi, zaključuje i dokazuje. Sam oblik koji imaju tvrdnje, način kako se zaključuje i tvrdnje dokazuju, ne zanima samo filozofe po struci, nego i stručnjake u drugim na drugim poljima, osobito ako su to opće, apstraktne ili formalne discipline. Stoga se logika u ovoj ili onoj mjeri studira, osim na odjelima filozofije, i u sklopu studija studija matematike, informatike, računarstva i umjetne inteligencije, jezikoslovlja, teologije. Osim toga, svaka disciplina ima svoju primijenjenu logiku, logiku primijenjenu na posebno predmetno područje dotične znanosti, što čini metodologiju te znanosti.

Neki konačan i sasvim zadovoljavajući odgovor na pitanje o tom što je to logika, nećemo moći odmah dati. Što je to logika, postajat će nam bliže i jasnije što ćemo dublje ulaziti u sam predmet logike, što ćemo se više njim baviti. Tek ćemo na kraju ovoga tečaja moći imati potpuniji pojam o logici.

Na početku ipak možemo dati prethodni, preliminarni odgovor na naše pitanje, stvoriti neki pretpojam same logike. Tu možemo poći od našega svakodnevnoga života, od načina kako svakodnevno razmišljamo, govorimo i razgovaramo.

0.1 LOGIKA KAO NAUK O VALJANU ZAKLJUČIVANJU

Često se logika određuje kao nauk o valjanom ili ispravnom zaključivanju. Stoga ćemo logiku pokušati sebi približiti na nekoliko jednostavnih primjera zaključaka.

Svatko će moći bez ikakova predznanja iz logike prosuditi jesu li to dobri, ispravni zaključci, onako kako obično prosuđujemo zaključke u svakodnevnom životu. Onima koji su u srednjoj školi imali logiku, to će biti lako prepoznatljivi primjeri nekih oblika zaključka. Ti će nam primjeri poslužiti da na njima pokažemo određene osobitosti logike.

Evo jednostavnoga primjera:

Svi su glazbenici umjetnici.
Svi su violinisti glazbenici.

Svi su violinisti umjetnici.

Uočavamo smislenu povezanost navedenih iskaza. Zaglavak, kažemo, logički (ili nužno) proizlazi (slijedi) iz premisa.

Oni s predznanjem iz logike prepoznat će da je to kategorični silogizam, prvoga lika (figure), i to način (mod) koji se u tradiciji nazivlje *Barbara*. Svaki redak sadrži jedan sud (kao misaoni oblik), odnosno jedan iskaz koji je jezični izraz suda. Sudovi, odnosno iskazi iznad vodoravne crte nazivlju se premisama (veća i manja), a sud (iskaz) ispod crte nazivlje se zaglavkom (konkluzija). Sudovi se pak sastoje od pojmova (veći, manji i srednji), koje izražujemo nazivima. Za zaključak koji je logičan, koji je dobro, ispravno izgrađen, kažemo u logici da je valjan.

O čem ta valjanost ovisi? U čem se sastoji?

0.1.1 OČUVANJE ISTINITOSTI

Promatramo li sadržajnu stranu zaključka, te provjeravamo istinitost sudova/iskaza koji se u njem javljaju, uočit ćemo određenu *apstraktnost* valjana zaključivanja, određenu neovisnost o sadržaju. Vidjet ćemo naime da u valjanu zaključku ne moraju svi sudovi/iskazi biti istiniti, te da, primjerice, na istinu možemo zaključiti iz neistina.

a) Evo primjera u kojem su premise neistinite a zaglavak istinit:

Svi su znanstvenici umjetnici.
Svi su violinisti znanstvenici.

Svi su violinisti umjetnici.

Kako vidimo, istinu možemo dobrim, valjanim zaključivanjem dobiti i iz neistine. Dakle, da bi zaglavak bio istinit, nije nužno da i premise budu istinite. To nam je već prva naznaka apstraktnosti predmeta logike. No pogledajmo dalje.

b) U sljedećem su zaključku svi iskazi neistiniti:

Svi su glazbenici violinisti.
Svi su umjetnici glazbenici.

Svi su umjetnici violinisti.

Vidimo da ni zaglavak ne mora biti istinit da bi zaključak bio valjan.

To je još jedna potvrda da je ono u čem se sastoji logičnost nešto apstraktno.

Navedimo i primjere s miješanim, istinitim i neistinitim premisama. U prvom je primjeru zaglavak istinit:

Svi su glazbenici violinisti.
Neki su umjetnici glazbenici.

Neki su umjetnici violinisti.

U drugom je primjeru zaglavak neistinit:

Svi su violinisti glazbenici.
Svi su znanstvenici violinisti.

Svi su znanstvenici glazbenici.

No valjanost se zaključivanja, s obzirom na istinitost sudova/iskaza koji se u njem javljaju, sastoji u tom što **nikada iz istinitih premisa valjanim zaključivanjem ne dobivamo neistinit zaglavak**. Pođemo li od istinitih premisa, ako smo valjano zaključivali, možemo biti sigurni da je i zaglavak istinit – da je, dakle, u zaključku očuvana istinitost. Ako, dakle, u nekom predloženom zaključku uočimo da su premise istinite, a zaglavak neistinit, možemo biti sigurni da taj zaključak nije valjan.

0.1.2 FORMALNA PRAVILNOST

Da bismo prosudili valjanost nekoga zaključka, moramo li uopće znati jesu li sudovi/iskazi koji se u njem javljaju, istiniti ili neistiniti?

Svi su konektori operatori.
Svi su replikatori konektori.

Svi su replikatori operatori.

Valjanost toga zaključka lako možemo prosuditi ako i ne znamo što znače uporabljeni pojmovi, odnosno uporabljeni nazivi. Očito je, prema tome, da valjanost u zaključivanju ne ovisi o našem poznavanju pojmova i odgovarajućih predmeta o kojima se govori. Konkretni pojmovi koje smo u primjerima upotrebljavali, ne čine logičku bit zaključka. Iznova i još izrazitije uočavamo apstraktnost, formalni karakter predmeta logike.

Svi navedeni zaključci imaju neki zajednički **oblik** (lat. *forma*). Možemo stoga ići i korak dalje, pa zaključak izraziti tako da umjesto konkretnih pojmova uvedemo određene simbole, **shematska slova** (varijable, u širem smislu).

Svi **M** jesu **P**.
Svi **S** jesu **M**.

Svi **S** jesu **P**.

Umjesto svakoga od upotrijebljenih shematskih slova možemo u konkretnome zaključku staviti bilo koji naziv za pojam. Ako smo dosljedno uvrštavali – uvijek isti naziv stavili za isti simbol – svaki će put zaključak biti valjan.

Što je s izrazima ‘svi’, ‘jesu’? Možemo li i njih po volji mijenjati? Evo primjera za promjenu tih izraza u zaključku:

Svi su glazbenici umjetnici.
Neki su violinisti glazbenici.

Svi su violinisti umjetnici. *Nije dobro!*

U drugom je iskazu ‘svi’ zamijenjeno s ‘neki’ te zaključak nije dobar. Treba i u zaglavku ‘svi’ zamijeniti s ‘neki’.

Vidimo da su za valjanost zaključivanja bitni izrazi kao što su ‘svi’, ‘nijedan’, ‘neki’, ‘jesu’ (‘su’), ‘nisu’. Ne možemo ih po volji mijenjati a da zaključak ostane valjan. One imaju specifično logičko značenje. Zbog toga ih se često nazivlje logičkim česticama (ili logičkim izrazima).

Stoga možemo reći da se valjanost u zaključivanju sastoji i u određenoj formalnoj pravilnosti po kojoj zaglavak izvodimo iz premisa. Pritom su bitne logičke čestice, dok su drugi izrazi (na mjestu shematskih slova, varijabla) po volji zamjenljivi. U ispravnom konkretnom zaključku moramo moći uočiti njegov opći logički oblik (shemu). Taj oblik možemo izraziti pomoću shematskih slova i logičkih čestica.

U naš već dijelom simbolizirani jezik možemo uvesti daljnje simbole i pisati ovako:

M *a* P
S *a* M

S *a* P

‘***a***’ nam tu skraćuje izraz ‘svi jesu’.

Otuda i onaj naziv *Barbara*, koji kazuje da se tri suda (iskaza) ***a*** nižu jedan za drugim.

U hipotetičnom zaključku (modus ponens) možemo uporabiti shematska slova **p** i **q** za sudove/iskaze. Tu se javlja i logička čestica ‘ako... onda’:

Ako **p,** onda **q**
p

---

q

Ako je ljeto, more je toplo.
Ljeto je.

More je toplo.

Pomoću shematskih slova i logičkih čestica mi zapravo možemo prikazati same logičke oblike, sheme, u svoj njihovoj apstraktnosti. Takovim prikazom logičke oblike stavljamo gotovo doslovce na papir, pretvaramo ih u vidljive jezične izraze, u zapis.

0.1.3 ODREDBA LOGIKE

Promotrimo li gornje primjere možemo uočiti da su pojmovi sastavnice suda, a sudovi sastavnice zaključka. Zaključak na neki način objedinjuje pojmove i sudove. Metode, kojima se logika na općenit način također bavi, nisu drugo nego sustavna uporaba navedenih logičkih oblika, i to osobito zaključaka – npr. u dokazivanju neke postavke.

To je i razlog da se, kako smo već rekli, logika često određuje kao **nauk o valjanu zaključivanju**. Valjanost se zaključivanja očituje u međusobnoj povezanosti **oblikâ** mislî te u usklađenosti tih oblika s **idealnim** pravilima mišljenja. Iz tih osobina proizlazi formalni i idealni karakter logike.

Logika istražuje **oblik, formu** mišljenja, tj. međusobne odnose misli, neovisno o njihovu konkretnom sadržaju, a ne stvarni, predmetni sadržaj mišljenja. Kad kažemo ‘logika’, uobičajeno se misli upravo na formalnu logiku, to je logika u užem smislu.

Iako se logika ne bavi predmetnom istinom kao druge znanosti, nego samo oblicima očuvanja istinitosti, formom pomoću koje se čuva istinitost, ona je ipak pretpostavka sviju znanosti. U svakoj znanosti valja ispravno zaključivati, dokazivati, ispravno misliti, da bi se iz danih istina (spoznaja) mogle izvoditi druge istine (spoznaje).

Formalna je logika ujedno i *prvi korak filozofijske analize*. U logici analiziramo vlastito mišljenje, vlastit jezik (refleksija) i izlučujemo formalnu stranu nekih temeljnih filozofijskih pojmova, kao što je istina, predmetnost ("bitak") itd. Te pojmove zatim u filozofiji analiziramo i s drugih strana, produbljujemo ih proširujući, dograđujući samu logiku, napuštajući njezin formalni okvir. Filozofija takoreći izrasta iz logike i raste s logikom.

Logika se bavi **idealnim** pravilima mišljenja, bez obzira na to kako se ona u konkretnom slučaju ostvarivala. Stoga neki logičari, da bi odvojili logiku od psihologije, govore o *'čistoj'* logici. Prema tome, logika se ne bavi empirijskim istraživanjem kako se u određenim duševnim okolnostima (čuvstva, afekti, stresovi itd.) stvarno odvija mišljenje, ne bavi se stvarnim 'procesom mišljenja' – to ne bi bila logika, nego psihologija mišljenja. Isto se tako ne bavi empirijskim istraživanjem jezika u kojem se misaoni oblici očituju. Time se bavi jezikoslovlje (lingvistika).

No idealna logička pravila nisu bez povezanosti sa stvarnim odvijanjem mišljenja. Iako ne pokazuju kako se stvarno misli, ona pokazuju kako treba misliti, kako se ispravno zaključuje. Logička su pravila u tom smislu **norme** mišljenja, logika normira mišljenje.

0.2 LOGIČKI JEZIK

0.2.1 UMJETNI LOGIČKI JEZIK

Pristup logici, obradu logike možemo sebi na neki način olakšati ako logičke oblike analiziramo onako kako se ostvaruju u jeziku, ne npr. izravno kao oblike mišljenja. Jezični izraz nešto je što se lakše nego sama misao dade objektivirati, učiniti izvanjski, zorno dostupnim – može se zapisati i na taj se zapis možemo po volji vraćati – i što se zatim lakše dade obrađivati, provjeravati, nego sama misao, koja nam izmiče.

Pogodno je za potrebe logičke teorije izgraditi poseban, umjetan jezik, koji isključuje iz jezika sve elemente, sve izražajne mogućnosti, koje nisu važne za logiku, a sadržane su (i to obilato) u naravnim jezicima (kao što su hrvatski, engleski, hindi i sl.).

U tom umjetnom logičkom jeziku ne radi se samo o shematizaciji, formalizaciji običnoga jezika pomoću shematskih slova (kako smo vidjeli prije), nego o pravom novom jeziku. Njime ćemo moći izraziti konkretne, istinite, odnosno, neistinite iskaze, a ne samo opće oblike, sheme (kao npr. ‘Svi **S** jesu **P’**), koje same po sebi nisu iskazi, nisu istiniti, odnosno neistiniti.

Prevedemo li konkretne iskaze, primjerice, hrvatskoga jezika konkretnim iskazima logičkoga jezika, u tom će se prijevodu očitovati samo ono što je logički važno. Budući da nas tu ne ometaju nikakovi logički nevažni izrazi, konotacije, tako prevedeni iskazi bit će vrlo prikladni za logičku analizu, izlučivanje samih logičkih oblika.

0.2.2 SINTAKSA I SEMANTIKA LOGIČKOGA JEZIKA

Taj će jezik, s jedne strane, sadržavati određene **izraze**, a s druge strane, **vrjednovanje** kojim se izrazima određena oblika pridružuje neko značenje (kao njihova vrijednost). Tako će i **opis** logičkoga jezika imati dvije razine:

1. opis na razini **izraza**, koji nazivljemo sintaksom;

2. opis na razini **značenja** izraza, koji nazivljemo semantikom.

Semantiku možemo pojednostavniti tako da značenja svedemo na opseg (ekstenziju). Npr. možemo sasvim zanemariti odredbu čovjeka (što je čovjek, koje obilježje čini bit čovjeka, npr. obdarenost govorom, umom, društvenost i sl.) i držati na umu samo to na koje sve pojedinačno biće možemo primijeniti riječ ‘čovjek’, a na koje ne – o kojem je sve predmetu istinito reći da je čovjek, a o kojem nije. Na taj način, dakle, zanemarujemo sam sadržaj pojmova predmeta i zadržavamo samo njihov **opseg**.

0.2.3 PREDMETNI JEZIK I METAJEZIK

Baveći se logičkim jezikom, govorit ćemo o njem i opisivati ga. Kojim ćemo se jezikom, međutim, služiti govoreći o tom jeziku? Rabit ćemo hrvatski jezik u koji ćemo mjestimice uključivati i neke posebne simbole i izraze (npr. iz teorije skupova).

Općenito, jezik o kojem govorimo, kojim se bavimo, jest **predmetni jezik**, a jezik kojim govorimo o predmetnom jeziku **metajezik**.

Rasvijetlimo tu razliku na *primjeru*. Rečenica:

‘$\rightarrow$’ je simbol logičkoga jezika.

kazuje nešto o logičkome jeziku, koji je naš predmetni jezik, i to da sadrži simbol ‘$\rightarrow$’. No ta rečenica nije rečenica samoga toga logičkoga jezika, nego hrvatska rečenica, ne predmetnojezična nego metajezična rečenica.

Važno je pritom razlikovati **porabu** i **spominjanje** izrazâ (riječî, rečenica i sl.). Npr. pogledajmo rečenicu:

Krk je otok u Jadranskom moru.

U toj rečenici spominjemo otok Krk i Jadransko more, i to rabeći izraze, riječi ‘Krk’, ‘otok’, ‘Jadransko more’. Želimo li spomenuti samu riječ ‘Krk’, tj. reći nešto o samoj toj riječi, stavljamo ju u navodnike ili ju ističemo, npr. kurzivom:

‘Krk’ ima tri slova.
Krk ima tri slova.

Tu, rabeći navod, odnosno isticanje, spominjemo riječ.

Slično, u primjeru “$\rightarrow$’ je simbol logičkoga jezika’, spominjemo ‘$\rightarrow$’, a rabimo primjerice riječ ‘simbol’. ‘$\rightarrow$’ možemo spomenuti i bez navodnika. Kako ‘$\rightarrow$’ nije sastavnica hrvatske abecede, možemo se poslužiti njegovom razlikovnošću kako bismo ga istakli i spomenuli, te jednostavno reći:

$\rightarrow$ je simbol logičkoga jezika.

Izraze nekoga jezika možemo spominjati i tako da ih ističemo u zasebnome retku, kao gore kada smo u zasebnome retku navodili rečenice ‘Krk je otok u Jadranskom moru’ i “Krk’ ima tri slova’. Izraze nekoga jezika možemo, napokon, spominjati i na opisni način. Ime ‘Krk’ možemo spomenuti opisnim izrazom ‘ime najvećega otoka u Jadranskom moru’, ‘ime koje se sastoji redom od petnaestoga, dvadesettrećega i petnaestoga slova hrvatske abecede’.

0.3 ELEMENTARNA LOGIKA

Razmislimo o izrazima iz primjera na početku ovoga uvoda kao što su ‘svi’, ‘neki’, ili ‘pas’, ‘životinja’ i sl.? Što znače te riječi, na što se odnose?

U elementarnoj logici, u smislu kako danas rabimo taj naziv, uzimljemo da se one odnose na **pojedinačne predmete** (*individuals*). 'Svi' se odnosi na sve pojedinačne predmete o kojima je riječ, 'neki' na neke (barem jedan) od tih predmeta, 'violinist' na bilo koji pojedinačan predmet za koji kažemo da je violinist, i sl. Logika u kojoj se javljaju samo dvije razine: (1) predmeti o kojima je riječ i (2) svojstva i relacije među tim predmetima, jest logika **prvoga reda**. Ona je **opsegovna** jer 'pojmove' uzimlje samo u njihovu odnosu prema predmetima, ne obzirući se na sadržaj pojma.

Baveći se elementarnom logikom bavit ćemo se najprije

1. logičkim **jezikom**, njegovom sintaksom i semantikom, gdje ćemo u sklopu semantike definirati logički pojam **istine**; zatim

2. **očuvanjem istinitosti** iskaza pod promjenama značenja svih simbola osim specifično logičkih; i naposljetku

3. valjanim zaključivanjem u okviru formalnoga, **deduktivnoga sustava**.

No kako bismo sebi olakšali svladavanje elementarne logike, najprije ćemo kao njezin uvodni i ogledni dio obraditi **iskaznu** logiku. Ona će nam poslužiti kao mali uzorak logike na kojem ćemo moći u jednostavnijem obliku upoznati glavne logičke pojmove i metode. Zatim ćemo prijeći na logiku **prvoga reda**, u kojoj se dublje raščlanjuju oblici kojima se bavi iskazna logika, čime ćemo iscrpiti cijelu elementarnu logiku.

U **iskaznoj** logici još nema predmeta i izraza koji im se pririču. Tu ćemo samo promatrati kako sastavljeni iskazi logički ovise o jednostavnima kao svojim sastavnicama, tj. kako istinitost sastavljenih iskaza ovisi o istinitosti jednostavnih. U logici **prvoga reda** ulazimo u dublji ustroj, strukturu iskaza i njegove istinitosti. Javit će se novi simboli, predmetne oznake, za označivanje pojedinačnih predmeta, i priroci, za priricanje svojstava i odnosa pojedinačnim predmetima.

0.4 ZASNIVANJE. TRADICIONALNA I MODERNA LOGIKA

Prvu sustavnu logičku teoriju izgradio je **Aristotel** (384. pr. Kr. – 322. pr. Kr.), čiji su logički spisi sabrani u zbirku *Organon*. Aristotel je utemeljitelj logike. Razvio je nauk o kategoričnom iskazu i o kategoričnom silogizmu. Logiku su proširili njegovi učenici i osobito tzv. **megarsko-stoičk***a* škola (Chrysipp, cca. 282.–206. pr.Kr.). Oni su razvili logiku sastavljenih iskaza (pogodbeni, disjunktivni i dr.) i zaključaka sa sastavljenim iskazima.

1) **Tradicionalna** logika. Pod njom se obično podrazumijeva nauk o pojmu, sudu i zaključku (i metodologijski oblici), odnosno, o odgovarajućim jezičnim oblicima. Nastaje u kasnome starom vijeku (5.–6. st.) objedinjavanjem aristotelovskoga i stoičkoga shvaćanja logike. – U povijesti se javlja u vrlo različitim oblicima: npr. terministička kasnosrednjovjekovna logika nastaje u 13. i u 14. st. (naglašena je jezična analiza, npr. o uporabi naziva; razgranata teorija logičkoga slijeda, Petar Španjolski, Vilim Ockhamski); I. Kant svodi logiku u potpunosti na formalnu logiku kao nauk o oblicima mišljenja.

2) **Moderna** logika nastaje sredinom 19. st. osobito povezivanjem i približavanjem logike i matematike.

a) Da bi se što jasnije izrazili logički oblici te da bi se s njima što lakše postupalo i što lakše ih se analiziralo, počinje se rabiti simbolični, algebarski jezik sličan onomu u matematici. Takovu logiku izgrađuju George **Boole** (1815.–1864.) i Augustus **de Morgan** (1806.–1871.). Često se kao početak moderne logike uzimlje 1847. godina, kada Boole objavljuje knjižicu *Matematička analiza logike*, a De Morgan *Formalna logika*. Preteča je algebarskoga pristupa logici G. W. **Leibniz** (1746.–1816.).

b) Istražuju se logički temelji dokazivanja u matematici s idejom svođenja aritmetike, ili čak matematike uopće, na logiku. Takav pristup uvodi Gottlob **Frege** (1848.–1925.). Objavljivanje njegove knjige *Pojmopis* (1879.), u kojoj je korjenito reformirao tradicionalnu logiku, uzimlje se kao početak moderne logike u najužem smislu. Na Fregeov je rad nastavio Bertrand **Russell** (1872.–1970.), koji zajedno s A. N. Whiteheadom piše opsežno djelo *Principia mathematica*, 1–3 (1910.–1913.)

Logika (moderna) nazivlje se gdjekad *matematičkom* logikom, no taj je naziv dobro rabiti preciznije (kao Russell), upravo za logiku matematike; zbog uporabe posebnih simbola pa i uvođenja čitavoga posebnoga, logičkoga jezika, moderna se logika često nazivlje *simboličnom* logikom.

Osim s matematikom, logika je danas usko povezana također s informatikom (*computer science*), s umjetnom inteligencijom, kao i s jezikoslovljem; nalazi svoju primjenu kako u prirodnim tako i u humanističkim znanostima.

U jednom važnom smislu i matematika je (ne samo logika) pretpostavka filozofije. Tako je to bilo i u tradiciji filozofije, o čem svjedoči natpis na Platonovoj Akademiji, prema kojem u Akademiju nije mogao ući nitko tko nije bio upućen u geometriju. Tada je matematika bila geometrijska, a danas se utemeljuje, primjerice, u teoriji skupova. Teorija je skupova pak usko prožeta logikom i potrebna je za razmatranja o samoj logici.

Vježbe

Dio I

ISKAZNA LOGIKA

Poglavlje 1

JEZIK I ISTINA U ISKAZNOJ LOGICI

1.1 SINTAKSA JEZIKA $\mathscr{L}_i$

Nazovimo jezik iskazne logike $\mathscr{L}_i$. Najprije ćemo dati opis toga jezika na razini **izraza**. To je **sintaksa** jezika $\mathscr{L}_i$. Sama je sintaksa nešto vrlo apstraktno jer se u njoj izrazi uzimlju neovisno o značenju. Sintaksu jezika čine:

1. **rječnik**, koji sadrži **osnovne simbole** jezika, i

2. **gramatika**, koja daje **tvorbena pravila** pomoću kojih simbole postavljamo u pravilne formule. U iskaznoj su logici, kako ćemo vidjeti, sve formule iskazi.

Sintaksa je, kako smo već rekli, prilagođena semantici, koju ćemo izložiti nakon sintakse.

Navest ćemo koji se to simboli nalaze u rječniku jezika $\mathscr{L}_i$ i koji se ispravni gramatički oblici u tom jeziku mogu tvoriti od osnovnih simbola. Pritom ćemo radi boljega razumijevanja neformalno, primjerima, upućivati i na značenja tih oblika.

1.1.1 RJEČNIK

Osnovi simboli koje rabimo u jeziku $\mathscr{L}_i$, jesu iskazna slova, poveznici i zagrade.

1. **Iskazna slova**. To su sljedeća kurzivna velika latinična slova, kojima se dodaju i pozitivni cijeli pokazatelji:

   $$P, Q, R, P_1, \ldots$$

   (Zarezi i trotočja, naravno, ne pripadaju rječniku jezika $\mathscr{L}_i$.)

   Praktično je dopustiti da se kao iskazna slova neformalno rabe sva velika latinična slova s pokazateljem ($A, B, C, ..., A_1, \ldots$), osobito kad rečenice jezika $\mathscr{L}_i$ trebaju odgovarati (prevoditi) nesložene hrvatske rečenice. Tako možemo neformalno upotrijebiti npr. K za 'Pada kiša', S za 'Sokrat trči', I za 'Ivan je prošloga ljeta bio u Španjolskoj'. Odbir početnoga ili nekoga drugoga karakterističnoga slova hrvatske rečenice za iskazno slovo (kao u gornjim primjerima) nipošto nije obvezatan, nego samo ima ulogu da olakša upamtiti kako smo preveli hrvatske rečenice.

2. **Poveznici**. To su sljedeći simboli:

   $$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

   (Nazivlju se i logičkim veznicima, konektorima, junktorima itd.). Možemo ih čitati hrvatski na sljedeći način: $\neg$ kao 'ne'; $\wedge$ kao 'i'; $\vee$ kao 'ili'; $\rightarrow$ kao 'ako..., onda' i $\leftrightarrow$ kao 'ako i samo ako'.

3. **Razgodci** (interpunkcija). To su okrugle zagrade:

   $$(,).$$

   Iskazna slova pripadaju **opisnim** simbolima, poveznici **logičkim** (logičke čestice), a razgodci **pomoćnim** (također važnim) simbolim.

1.1.2 GRAMATIKA

Sada ćemo definirati neke osnovne gramatičke pojmove jezika $\mathscr{L}_i$.

DEFINICIJA 1.1 (IZRAZ) *Izraz je konačan niz osnovnih simbola jezika $\mathscr{L}_i$.*

Primjer 1.1 *Izrazi su u* $\mathscr{L}_{\mathrm{i}}$, *primjerice,*

$$P(\wedge \rightarrow \wedge$$

$$((RQ(\neg$$

$$\neg R_4 P$$

Nisu izrazi u $\mathscr{L}_{\mathrm{i}}$*:*

$$P, (($$

$$\mathrm{R}P \leftrightarrow R$$

$$\wedge ?R+$$

To nisu izrazi u $\mathscr{L}_{\mathrm{i}}$ *jer sadrže simbole kojih nema u rječniku* $\mathscr{L}_{\mathrm{i}}$*.*

Uočimo da se svaki simbol naveden u rječniku može u izrazu javljati više puta. Tj. kažemo da svaki simbol može imati više **pojavaka**. Tako se u prvom gore navedenom primjeru $\wedge$ javlja dva puta, a P, $\rightarrow$ i lijeva zagrada po jednom. U gornjoj definiciji izraza podrazumijevamo da je riječ o nizu *pojavaka simbola*, a ne o nizu simbola kao takvih (kao što je to slučaj kad se radi o rječniku).

Nakon izraza je potrebno u iskaznoj logici definirati što je **iskaz**, jer su sve formule u iskaznoj logici iskazi. To će biti induktivna definicija koja pomoću tvorbenih pravila određuje koji su oblici izraza u jeziku $\mathscr{L}_i$ iskazi.

Da bismo što preglednije definirali iskaz tj. formulirali pravila, potrebno je uvesti **metavarijable** (metajezične varijable), *pripadne metajeziku*, pomoću kojih možemo općenito govoriti o izrazima jezika $\mathscr{L}_i$. Kao metavarijable za izraze rabit ćemo mala slova:

$$p, q, r, p_1, ...$$

Tvorbenim pravilima definiramo koji su izrazi formule. No sve su formule u iskaznoj logici iskazi. Stoga možemo tvorbenim pravilima izravno definirati **iskaz**, i to pomoću sljedećih pravila:

1) Svako je iskazno slovo iskaz.

Npr. S je iskaz i može stajati, primjerice, za hrvatski ‘Sokrat trči’.

2) AKO JE p ISKAZ, $\neg p$ JE ISKAZ.

Iskaze koji imaju oblik prema tome pravilu, zvat ćemo **nijekom** (negacijom). – Slično i u hrvatskome jeziku imamo niječne rečenice, koje se dobivaju određenom preoblikom rečenica uz pomoć čestice 'ne', 'ni' i sl. Stoga u jeziku $\mathscr{L}_i$ $\neg S$ može stajati za 'Sokrat ne trči', $\neg I$ za 'Ivan nije prošloga ljeta bio u Španjolskoj' itd.

3) AKO SU p I q ISKAZI, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$ I $(p \leftrightarrow q)$ JESU ISKAZI.

Pod 3) imamo četiri oblika iskaza:

a) Iskaz oblika $(p \wedge q)$ nazivlje se **konjunkcijom** a p i q **konjunktima**. Slično u hrvatskom imamo *sastavne* rečenice s veznicima 'i', 'pa', 'te', 'a' itd. Stoga npr. $(K \wedge S)$ može stajati za 'Pada kiša, a Sokrat trči'.

b) Iskaz oblika $(p \vee q)$ nazivlje se **disjunkcijom**, a p i q **disjunktima**. – Njome možemo prevoditi hrvatske rastavne rečenice ('ili'). Npr. $(K \vee S)$ može biti prijevod za 'Pada kiša ili Sokrat trči'.

c) Iskaz oblika $(p \to q)$ nazivlje se **pogodbom** (kondicionalom), p **prednjakom** (antecedentom) a q **posljetkom** (konsekventom). – U hrvatskom, donekle slično, imamo pogodbene rečenice. Npr. $(K \to \neg S)$ može stajati za 'Ako pada kiša, Sokrat ne trči'.

d) Iskaz oblika $(p \leftrightarrow q)$ nazivlje se **dvopogodbom** (neki ju zovu ekvivalencijom). Njome možemo prevoditi odgovarajuće hrvatske rečenice s 'ako i samo ako' ili 'upravo ako' i sl. Npr. $(V \leftrightarrow \neg O)$ može stajati za 'Vedro je ako i samo ako nije oblačno.

Sada možemo ovako definirati iskaz u $\mathscr{L}_i$:

DEFINICIJA 1.2 (ISKAZ) *Skup iskaza jezika $\mathscr{L}_i$ jest* najmanji *skup izraza izgrađenih prema gornjima pravilima 1) – 3).*

Napomenom "najmanji skup" isključujemo sve izraze koji nisu tvoreni prema navedenim pravilima.

Ima i konvencija definiranja prema kojoj se iskaz p može kraće *i ovako definirati:*

$$p ::= \mathrm{P} \mid \neg q \mid (q \wedge r) \mid (q \vee r) \mid (q \to r) \mid (q \leftrightarrow r),$$

*gdje je ‘*P*’ metavarijabla za jednostavne iskaze (iskazna slova). Pritom* ::= *čitajmo “jest”, a* | *čitajmo “ili”.*

Iskazi tvoreni prema pravilu 1) jesu **jednostavni** (atomni) iskazi. Oni u iskaznoj logici, kako vidimo, nisu dalje raščlanljivi. Također, jednostavne iskaze i zanijekane jednostavne iskaze nazivljemo zajednički **slovnim iskazima.** Iskazi prema pravilima 2) – 3) jesu **sastavljeni iskazi** (molekularni):

Iz pravila 2) uočavamo da je poveznik ¬ za nijek **jednomjestan** (singularan, unaran), tj. ima samo jedno slobodno mjesto (veže samo jedan iskaz). Ostali su poveznici **dvomjesni** (binarni), tj. imaju uza se dva slobodna mjesta (vežu dva iskaza).

PRIMJER 1.2 *Pogledajmo za primjer sljedeći iskaz:*

$$(\neg P \to (Q \wedge R)).$$

Analizirajmo tvorbu toga iskaza, ne obzirući se na njegovo moguće značenje:

a) cijeli je izraz iskaz prema pravilu 3) jer su ‘$\neg P$’ i ‘$(Q \wedge R)$’ iskazi,

b) ‘$\neg P$’ je iskaz prema pravilu 2) jer je ‘P’ iskaz,

c) ‘P’ je (jednostavan) iskaz prema pravilu 1)

d) ‘$(Q \wedge R)$’ je iskaz prema pravilu 3) jer su ‘Q’ i ‘R’ iskazi.

e) ‘Q’ i ‘R’ jesu (jednostavni) iskazi prema pravilu 1).

Neformalno, u svrhu bolje prijeglednosti i jednostavnosti zapisa, neka vrijede sljedeći **dogovori** o porabi jezika $\mathscr{L}_i$:

a) **vanjske zagrade** mogu se ispustiti kadgod iskaz stoji sam za se, tj. kad nije dio drugoga iskaza (da se uštede zagrade), npr.

$$(P \wedge \neg Q) \to R,$$

b) umjesto okruglih zagrada mogu se rabiti **uglate zagrade** (radi bolje prijeglednosti), npr.

$$(R_1 \rightarrow [(P_1 \vee P_2) \leftrightarrow Q_1]) \wedge R_2,$$

c) **konjunkcija** i **disjunkcija** mogu se **opetovati** bez novih zagrada; npr.

$$P \wedge Q \wedge R, \quad P \vee Q \vee R.$$

Evo još nekolikih sintaktičkih pojmova koje će nam biti potrebni u daljnjem opisu iskazne logike.

DEFINICIJA 1.3 (PODISKAZ) *Podiskaz je dio iskaza koji je također iskaz.*

Pritom **i sam iskaz** p kao cjelinu smatramo dijelom iskaza p. Stoga i jednostavni iskaz ima svoj podiskaz, a to je on sam.

PRIMJER 1.3 *Prema tome su podiskazi iskaza '$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$' iz gornjega primjera sljedeći njegovi dijelovi:*

$$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$
$$\neg P$$
$$Q \wedge R$$
$$P$$
$$Q$$
$$R$$

DEFINICIJA 1.4 (DOSEG POJAVKA POVEZNIKA) *Doseg pojavka poveznika je najkraći podiskaz koji sadrži taj pojavak.*

Možemo kraće govoriti o "dosegu poveznika" ako iz toga ne proizlazi dvosmislenost.

PRIMJER 1.4 *U gornjem je primjeru iskaza najkraći podiskaz koji sadrži $\rightarrow$, cijeli iskaz '$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$'; nadalje, najkraći podiskaz koji sadrži $\neg$, jest podiskaz '$\neg P$'; a najkraći je podiskaz koji sadrži $\wedge$, podiskaz '$Q \wedge R$'.*

DEFINICIJA 1.5 (GLAVNI POJAVAK POVEZNIKA) *Glavni pojavak poveznika u podiskazu p jest pojavak poveznika takav da je p doseg toga pojavka.*

Uobičajeno je kraće govoriti o "glavnome povezniku" umjesto o "glavnome pojavku poveznika".

PRIMJER 1.5 *Stoga je u gornjem primjeru glavni poveznik cijeloga iskaza $\rightarrow$, glavni poveznik prednjaka $\neg$, a glavni poveznik posljetka $\wedge$. Podiskazi 'P, 'Q' i 'R' nemaju glavnoga poveznika.*

DEFINICIJA 1.6 (NEPOSREDNI PODISKAZ) *Neposredan podiskaz definiramo na sljedeći način:*

1. *u iskazima oblika $\neg p$ neposredan je podiskaz p,*

2. *u iskazima oblika $(p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q), (p \leftrightarrow q)$ neposredni su podiskazi p i q.*

PRIMJER 1.6 *U našem primjeru, neposredni podiskazi iskaza '$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$' jesu '$\neg P$' i '$Q \wedge R$'; neposredan podiskaz podiskaza '$\neg P$' jest 'P', a neposredni podiskazi podiskaza '$Q \wedge R$' jesu 'Q' i 'R'. 'P', 'Q' i 'R' nemaju više svojih neposrednih podiskaza.*

Primijetimo kako je svaki sastavljen iskaz **hijerarhijski** ustrojen. Na vrhu je hijerarhije iskaz kao cjelina, a pod njim njegovi neposredni podiskazi, pod njima njihovi neposredni podiskazi itd. sve do jednostavnih podiskaza, koji nemaju svoje neposredne podiskaze.

PRIMJER 1.7 *Evo kako hijerarhija izgleda na našem gornjem primjeru:*

$$\neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$\neg P$	$Q \wedge R$	
P	Q	R

Na dnu, u osnovici, stoje jednostavni iskazi, a od njih postupno pomoću poveznika sastavljamo sve složenije i složenije iskaze.

1.1.3 HRVATSKE REČENICE I ISKAZI JEZIKA $\mathscr{L}_i$

Kako smo već naznačili, ima nekih bitnih sličnosti između jezika $\mathscr{L}_i$ i hrvatskoga jezika. No ima i važnih razlika. U hrvatskom se jeziku mogu dobiti i oblici rečenica koji se posebno ne javljaju u $\mathscr{L}_i$ – npr. upitne, usklične, zahtjevne, bezlične rečenice, kao i mnoge druge 'složene' rečenice osim onih četiriju sastavljenih u $\mathscr{L}_i$. Pritom, u hrvatskome jeziku ima i mnogo više vezničkih izraza nego u $\mathscr{L}_i$.

Već iz toga vidimo da je sintaksa hrvatskoga jezika daleko *razgranatija, složenija i bogatija* nego sintaksa jezika $\mathscr{L}_i$.

Uz to poveznici jezika $\mathscr{L}_i$ u sintaktičnom smislu ne odgovaraju uvijek i ne odgovaraju sasvim hrvatskim česticama i vezničkim izrazima koje smo upotrijebili za čitanje poveznika u jeziku $\mathscr{L}_i$. Upozorimo na neke razlike.

a) Neki se od spomenutih izraza mogu u hrvatskom rabiti kao prilozi, ne samo kao veznički izrazi. Npr.

   I Marko nije došao na dogovoreni sastanak.

   ('i' ovdje ima značenje isticanja, pojačavanja, 'čak').

b) Neke se rečenice u hrvatskome mogu izgraditi i tako da veznički izraz ne stoji između samih podrečenica ("ishodišnih" rečenica), nego npr. između dvaju imena ili između dvaju glagola, što se ne događa u $\mathscr{L}_i$. Npr.

   Petar i Marko jesu tenisači.
   Petar šeta ili pjeva.

   Uporabi poveznika u $\mathscr{L}_i$ odgovarale bi sljedeće preformulacije u spoj dviju rečenica: 'Petar je tenisač i Marko je tenisač', odnosno 'Petar šeta ili Petar pjeva'.

c) U sastavljenu se rečenicu ne mogu preformulirati hrvatske rečenice kao što je sljedeća, u kojoj veznički izraz povezuje dva imena:

Petar i Marko jesu vodeći par u tenisu.

Toj rečenici, dakako, ne odgovara spoj dviju rečenica ‘Petar je vodeći par u tenisu’ i ‘Marko je vodeći par u tenisu’.

S druge strane, prijevod na logički jezik unosi u rečenicu logičku jasnoću i nedvosmislenost.

Vježbe

1.2 SEMANTIKA JEZIKA $\mathscr{L}_i$

Dok sintaksa daje opis kako tvorimo formule (obrazice), semantika daje opis kako tim formulama **tumačenjem** (interpretacijom) pridružujemo značenje, vrijednost. Kako smo vidjeli, sve su formule u $\mathscr{L}_i$ iskazi. Njihovo se značenje u iskaznoj logici svodi na **istinitosnu vrijednost**. Tj. u $\mathscr{L}_i$ im pridružujemo ili istinitost ili neistinitost. A istinitosne vrijednosti istinito i neistinito možemo bilježiti s **i** i **n,** što također nisu simboli jezika $\mathscr{L}_i$, nego metajezične skraćenice za hrvatske riječi '**istinito'** i '**neistinito'**.

Strože rečeno, svako je tumačenje neka **funkcija** T kojoj su formule, tj. iskazi, argumenti, i kojoj je istinitosna vrijednost iskaza funkcijska vrijednost. Tj. T je funkcija koja skup svih iskaza preslikava u skup $\{\mathbf{i}, \mathbf{n}\}$. Stoga vrijednost koju neko tumačenje T pridružuje nekomu iskazu p, možemo, u našem metajeziku, bilježiti s $T(p)$ (čitamo: te od pe).

Općenito vrijedi:

Ako je p iskaz, $T(p) = \mathbf{i}$ ili $T(p) = \mathbf{n}$, i ne oboje.

U iskaznoj logici istinitosna vrijednost svakoga iskaza isključivo ovisi o istinitosnoj vrijednosti njegovih podiskaza. Pritom istinitosna vrijednost iskaza, ako je sastavljen, neposredno ovisi o istinitosnoj vrijednosti njegovih neposrednih podiskaza. Istinitosna vrijednost tih podiskaza, ako su sami opet sastavljeni, ovisi o istinitosnoj vrijednosti njihovih neposrednih podiskaza, itd. sve dok ne dođemo do jednostavnih podiskaza i njihovih istinitosnih vrijednosti. Hijerarhija iskaza i njegovih podiskaza prenosi se, kako vidimo, na semantiku.

Sam pak jednostavni iskaz nema, kako znademo, drugih sastavnica osim sama sebe. Stoga njegova istinitosna vrijednost ne može ovisjeti o istinitosnoj vrijednosti nijednoga drugoga (pa ni jednostavnoga) iskaza.

1.2.1 OSNOVNO TUMAČENJE

Prema semantici jezika $\mathscr{L}_i$, ako znademo istinitosnu vrijednost svih jednostavnih iskaza u jeziku $\mathscr{L}_i$, možemo odrediti istinitosnu vrijednost bilo kojega, ma kako složenoga iskaza u tom jeziku.

Stoga nam je najprije potrebno definirati tumačenje u užem, osnovnom smislu. **Osnovno tumačenje** u iskaznoj logici jest **pridruživanje istinitosne vrijednosti svakomu jednostavnomu iskazu** jezika $\mathscr{L}_i$. Osnovno tumačenje jest neka funkcija T_0 koja skup svih iskaznih slova preslikava u skup {**i**, **n**}.

Predočimo sebi pojam osnovnoga tumačenja zornije, u nekoliko koraka, pomoću jednostavnih tablica.

1. Svakomu se jednostavnomu iskazu, u skladu s gore rečenim, može pridružiti ili vrijednost **i**, ili vrijednost **n**. Npr.

P
i
n

2. U skladu s time, dodamo li gornjemu iskazu P iskaz Q, on, u slučaju da je P istinit, također može biti bilo istinit, bilo neistinit, a isto tako i u slučaju da je P neistinit. Imat ćemo, prema tome, ukupno $2 \times 2 = 4$ različita vrjednovanja para iskaza P i Q. To možemo prikazati istinitosnom tablicom:

P	Q
i	**i**
i	**n**
n	**i**
n	**n**

3. Dodamo li još iskaz R, imat ćemo ukupno $2 \times 2 \times 2 = 8$ različitih vrjednovanja za iskaze P, Q i R. Evo i te tablice:

P	Q	R
i	**i**	**i**
i	**i**	**n**
i	**n**	**i**
i	**n**	**n**
n	**i**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**
n	**n**	**n**

Kako graditi takovu tablicu?

a) Najprije treba **izračunati ukupan broj vrjednovanja** za zadane jednostavne iskaze. To je $2 \times 2 \times \ldots \times 2$, i to n puta, pri čem je n broj jednostavnih iskaza. Općenito, broj vrjednovanja za n jednostavnih iskaza jednak je 2^n. Koliki je broj vrjednovanja za zadane iskaze, toliko će u tablici biti redaka.

b) Iskazna slova unosimo slijeva nadesno abecednim redom. Pod *prvo* ćemo iskazno slovo, u prvi stupac, najprije napisati u prvoj **polovici** redaka **i**, a u drugoj polovici redaka **n**. U *idućem* će se stupcu izmjenjivati po **dvostruko manje i** i **n** nego u prvom stupcu, u *trećem* će se stupcu izmjenjivati po dvostruko manje **i** i **n** nego u drugom stupcu *itd*. Naposljetku će se u posljednjem stupcu izmjenjivati **po jedan i** i **n**.

c) No dosad smo promatrali samo vrjednovanje konačnoga broja jednostavnih iskaza. Jezik $\mathscr{L}_i$, međutim, raspolaže beskonačnim brojem jednostavnih iskaza (pokazatelji!). Stoga osnovno tumačenje, prema gornjoj odredbi, uključuje vrjednovanje **beskonačnoga** broja jednostavnih iskaza.

Našom bismo tablicom jedno tumačenje prikazali jednim beskonačnim retkom **i** i **n**, potpisanih pod beskonačni niz iskaznih slova $P, Q, R, \ldots, P_1, Q_1, R_1, \ldots$ itd. U prvom bi retku svi jednostavni iskazi imali vrijednost **i**. Ukupan je broj osnovnih tumačenja (redaka u tablici) vrlo velik, to je dva potencirano s beskonačnošću (s prebrojivom beskonačnošću, čime dobivamo neprebrojivu beskonačnost).

1.2.2 VRJEDNOVANJE SASTAVLJENIH ISKAZA

Kad nam je poznata istinitosna vrijednost svih jednostavnih iskaza, pa prema tome i jednostavnih podiskaza bilo kojega iskaza, postavlja se pitanje kako se na temelju toga istinitosna vrijednost pridružuje bilo kojemu sastavljenomu iskazu.

U tu svrhu potrebna su nam **pravila vrjednovanja** za iskaze koji nisu jednostavni. Ta pravila možemo zorno prikazati **općom istinitosnom tablicom** za svaki poveznik. – Uz svaku istinitosnu tablicu dat ćemo i komentar s obzirom na hrvatski jezik. Gdjegdje ćemo se osvrnuti i na odnos prema tradicionalnom shvaćanju u logici.

a) Na **lijevoj** ćemo strani opće istinitosne tablice pridruživati moguće istinitosne vrijednosti **neposrednim podiskazima** zadanih iskaza (to mogu biti kako jednostavni, tako i sastavljeni iskazi).

b) Na **desnoj** ćemo strani pridruživati istinitosne vrijednosti **sastavljenomu** iskazu kojega su to neposredni podiskazi.

Nijek

p	$\neg p$
i	**n**
n	**i**

Iz tablice je prijegledno da je u slučaju istinitosti nekoga iskaza u jeziku $\mathscr{L}_i$, nijek toga iskaza **neistinit**. I obratno, da je u slučaju neistinitosti nekoga iskaza u jeziku $\mathscr{L}_i$ nijek toga iskaza **istinit**.

Konjunkcija

p	q	$p \wedge q$
i	**i**	**i**
i	**n**	**n**
n	**i**	**n**
n	**n**	**n**

Vidimo da je konjunkcija **istinita** samo u slučaju kada su oba njezina neposredna podiskaza istiniti. To možemo prikazati ispisujući pod konjunkciju njezine uvjete istinitosti:

$$p \wedge q \checkmark$$
$$p$$
$$q$$

Kvačicom označujemo da su uvjeti istinitosti iscrpljeni. U svim ostalim slučajima konjunkcija je **neistinita**. To su slučaji kad je bilo p bilo q neistinito. Kako je iskaz neistinit ako i samo ako je njegov nijek istinit, uvjete neistinitost konjunkcije možemo prikazati sljedećim grananjem:

$$\begin{array}{ccc} & \neg(p \wedge q) \checkmark & \\ / & & \backslash \\ \neg p & & \neg q \end{array}$$

Disjunkcija

p	q	$p \vee q$
i	**i**	**i**
i	**n**	**i**
n	**i**	**i**
n	**n**	**n**

Kako vidimo, disjunkcija je **istinita** u svim slučajima u kojima je barem jedan njezin neposredan podiskaz istinit:

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q \checkmark & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

Disjunkcija je **neistinita** samo u slučaju kada su oba neposredna podiskaza neistiniti:

$$\begin{array}{c} \neg(p \vee q) \checkmark \\ \neg p \\ \neg q \end{array}$$

Valja najprije uočiti da je riječ o **uključnoj**, a ne o isključnoj disjunkciji (koja se često javlja u tradicionalnoj logici). Isključna disjunkcija, naime, ne bi bila istinita u prvom slučaju vrjednovanja, kada su i p i q istiniti.

Pogodba

p	q	$p \to q$
i	**i**	**i**
i	**n**	**n**
n	**i**	**i**
n	**n**	**i**

Razvidno je da je pogodba **istinita** u svim slučajima u kojima je lijevi neposredni podiskaz (prednjak) neistinit (3. i 4. redak) ili desni (posljedak) istinit (1. i 3. redak):

$$\begin{array}{ccc} & p \to q \checkmark & \\ / & & \backslash \\ \neg p & & q \end{array}$$

Drugim riječima, istinita je u svim slučajima osim kada je prednjak istinit, a posljedak neistinit. Tada je **neistinita**:

$$\begin{array}{c} \neg(p \to q) \checkmark \\ p \\ \neg q \end{array}$$

Dakle, u istinitoj pogodbi ako je prednjak istinit, istinit je i posljedak.

Odnos prednjaka i posljetka pritom ne mora izražavati odnos *razloga* i *posljedice*, logički slijed, jer istinitosne vrijednosti prednjaka i posljetka mogu biti potpuno neovisne jedna o drugoj. Naime, prednjak i posljedak mogu biti dva različita jednostavna iskaza, a oni su u iskaznoj logici međusobno semantički sasvim neovisni.

Pogodba kako je definirana gornjom tablicom nazivlje se često i **materijalnom** pogodbom. Zbog mogućih nesporazuma bolje je izbjeći naziv ‘implikacija’, koji upućuje na dublju povezanost (na logički slijed) od one prikazane gornjom tablicom.

Materijalna se pogodba još nazivlje i *Filonovom* pogodbom, prema Filonu (oko 300. pr. Kr.), koji je pogodbu opisao četirima slučajima koji odgovaraju istinitosnoj tablici za pogodbu (izvješćuje Sext Empirik). Nalazimo ju u Fregeovu *Pojmopisu* (1879.) kao “uvjetovanost” (“Bedingtheit”).

Dvopogodba

p	q	$p \leftrightarrow q$
i	**i**	**i**
i	**n**	**n**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Jasno vidimo da je dvopogodba **istinita** u svim slučajima kada oba njezina neposredna podiskaza imaju istu istinitosnu vrijednost, dok je u slučajima kada imaju različitu istinitosnu vrijednost **neistinita**:

$p \leftrightarrow q$ ✓
/ \
p $\neg p$
q $\neg q$

$\neg(p \leftrightarrow q)$ ✓
/ \
p $\neg p$
$\neg q$ q

Zbog jednoznačnosti možemo dvopogodbu definiranu gornjom tablicom, slično kao i u slučaju pogodbe, zvati **materijalnom** dvopogodbom. Kao i naziv ‘implikacija’, zbog mogućih nesporazuma bolje je izbjeći naziv ‘ekvivalencija’, koji upućuje na neku opću ili razložnu međuzavisnost.

Strože rečeno, svakomu je povezniku pridružena određena **istinitosna funkcija** kojom se istinitosna vrijednost iskaza u kojem je on glavni poveznik, određuje na temelju istinitosnih vrijednosti neposrednih podiskaza u tom iskazu. Pri tom su istinitosne vrijednosti neposrednih podiskaza **argumenti** istinitosne funkcije (lijeva strana opće tablice), a istinitosna je vrijednost sastavljenoga iskaza **vrijednost** istinitosne **funkcije** za te argumente (desna strana opće tablice). Prema tome, svakomu je povezniku pridružena istinitosna funkcija koja uređenomu skupu istinitosnih vrijednosti neposrednih podiskaza pridružuje istinitosnu vrijednost cijeloga iskaza.

1.2.3 OPĆI POJAM ISTINE

Istakli smo da istinitosna vrijednost svakoga iskaza u iskaznoj logici ovisi, napokon, o vrijednostima iskaznih slova. Na temelju tih vrijednosti i na temelju pravila vrjednovanja po poveznicima, možemo u iskaznoj logici odrediti istinitosnu vrijednost bilo kojega iskaza. *Strože* možemo reći da se funkcija osnovnoga tumačenja (tumačenja iskaznih slova), T_0, pomoću pravilâ vrjednovanja **proširuje** u funkciju tumačenja u općenitom smislu (tumačenja svakoga iskaza), T.

Sada možemo dati i definiciju **istine** za iskaznu logiku. Ta je definicija (kao i definicija iskaza) induktivna. Ona sadrži **pravila vrjednovanja** kojima se prema pojedinim oblicima iskaza određuje kad su oni istiniti.

DEFINICIJA 1.7 (ISTINA)

1. *Ako je p jednostavan iskaz,* $T(p) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T_0(p) = \mathbf{i}$,
2. $T(\neg p) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T(p) = \mathbf{n}$,
3. $T(p \wedge q) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako i* $T(p) = \mathbf{i}$ *i* $T(q) = \mathbf{i}$,
4. $T(p \vee q) = \mathbf{i}$ *ako i samo* $T(p) = \mathbf{i}$ *ili* $T(q) = \mathbf{i}$ *ili oboje,*
5. $T(p \to q) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T(p) = \mathbf{n}$ *ili* $T(q) = \mathbf{i}$,
6. $T(p \leftrightarrow q) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T(p) = T(q)$.

Vratimo se istinitosnim tablicama. Proširenje tumačenja tako da uključuje punu definiciju istine (tj. sva pravila vrjednovanja) znači sljedeće: **na temelju vrijednostî iskaznih slova** u lijevome dijelu tablice te na temelju **općih istinitosnih tablica** za pojedine poveznike, možemo u iskaznoj logici pomoću istinitosne tablice odrediti istinitosnu vrijednost bilo kojega iskaza $\mathscr{L}_i$.

Pritom ne gradimo istinitosnu tablicu za sve jednostavne iskaze, (tj. ne prikazujemo sva osnovna tumačenja), nego samo za one **jednostavne iskaze koji se javljaju u dotičnome iskazu**. I to zbog toga jer je za istinitosnu vrijednost iskaza *bitna* samo istinitosna vrijednost onih jednostavnih iskaza koji su njegovi podiskazi. Dakle, zanemarujemo istinitosnu vrijednost (beskonačnoga broja) ostalih jednostavnih iskaza.

Primjer 1.8 *U sljedećem primjeru vidi se kako istinitosnu vrijednost zadanoga iskaza određujemo počinjući njegovim jednostavnim podiskazima i postupno se krećući prema glavnom povezniku.*

P	Q	$[(P$	$\vee$	$Q)$	$\to$	$Q]$	$\to$	P
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**
i	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**i**	**i**
n	**i**	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**
n	**n**	**n**	**n**	**n**	**i**	**n**	**n**	**n**

U istinitosnoj tablici **lijevo** od okomite crte bilježe se skupovi istinitosnih vrijednosti jednostavnih podiskaza zadanih iskaza (uređen skup argumenata). **Desno** se bilježe tim skupovima pridružene istinitosne vrijednosti podiskaza zadanih iskaza, uključujući i istinitosnu vrijednost samoga zadanoga iskaza (vrijednost funkcije). Formalno rečeno, *uređenomu* skupu istinitosnih vrijednosti lijevo **pridružuje** se istinitosna vrijednost desno. Dakle, svakomu iskazu odgovara istinitosna funkcija koja uređenomu skupu istinitosnih vrijednosti jednostavnih podiskaza pridružuje istinitosnu vrijednost cijeloga iskaza.

U prethodnome primjeru prvi redak prikazuje sva tumačenja u kojima su P i Q istiniti, a svi ostali jednostavni iskazi, kojih ima beskonačno mnogo, mogu imati bilo koju istinitosnu vrijednost.

Primjer 1.9 *No evo sada primjera jednoga iskaza s trima jednostavnim podiskazima:*

P	Q	R	$(Q$	$\wedge$	$\neg R)$	$\vee$	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$
i	**i**	**i**	**i**	**n**	**n i**	**i**	**i**	**i**	**i**
i	**i**	**n**	**i**	**i**	**i n**	**i**	**i**	**i**	**i**
i	**n**	**i**	**n**	**n**	**n i**	**n**	**i**	**n**	**n**
i	**n**	**n**	**n**	**n**	**i n**	**n**	**i**	**n**	**n**
n	**i**	**i**	**i**	**n**	**n i**	**i**	**n**	**i**	**i**
n	**i**	**n**	**i**	**i**	**i n**	**i**	**n**	**i**	**i**
n	**n**	**i**	**n**	**n**	**n i**	**i**	**n**	**i**	**n**
n	**n**	**n**	**n**	**n**	**i n**	**i**	**n**	**i**	**n**

Važno je pri gradnji istinitosnih tablica stupce **potpisivati** upravo pod onaj simbol na koji se odnose, dakle, pod dotično iskazno slovo, odnosno, pod dotični poveznik.

Dakako, **nije uvijek potrebno graditi cijelu istinitosnu tablicu**. Zanima li nas istinitosna vrijednost samo za neko određeno tumačenje, dosta je izgraditi samo jedan, odgovarajući redak istinitosne tablice.

1.2.4 ISTINITOSNI UVJETI I ISTINITOSNO STABLO

Uvjete pod kojima je neki iskaz istinit možemo odrediti polazeći od pretpostavke da je dani iskaz istinit te postupno potpisujući ili granajući ispod njega uvjete pod kojima je istinit on i njegove sastavnice. Pritom se služimo potpisivanjem i grananjem, kako smo već općenito pokazali pri općem opisu vrjednovanja sastavljenih iskaza.

Pronađimo, primjerice, uvjete istinitosti iskaza $[(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q] \vee \neg (Q \vee R)$!

$$
\begin{array}{ccc}
 & [(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q] \vee \neg(Q \vee R) \checkmark & \\
 & / \quad \backslash & \\
(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q \checkmark & & \neg(Q \vee R) \checkmark \\
| & & \neg Q \\
| & & \neg R \\
P \leftrightarrow Q \checkmark & & \\
\neg Q & & \\
/ \quad \backslash & & \\
P \qquad \neg P & & \\
Q \qquad \neg Q & &
\end{array}
$$

Dobili smo **istinitosno stablo** u kojem smo, najprije, u drugome retku prikazali da je zadana disjunkcija istinita pod uvjetom da su istiniti bilo jedan, bilo drugi njezin disjunkt. Zatim smo prikazali da je desni disjunkt, koji je nijek disjunkcije, istinit samo pod uvjetom neistinitosti obaju njegovih disjunkata. Potom smo se vratili lijevo te prikazali da je konjunkcija istinita upravo pod uvjetom istinitosti obaju njezinih konjunkata. Kako je jedan od tih konjunkata dvopogodba, raščlanili smo napokon i nju na njezine istinitosne uvjete, a to su da su obje njezine sastavnice istinite, ili da su obje neistinite.

Kako bi se istinitosno stablo moglo točno pratiti i naknadno analizirati, lijevo ćemo **obrojčati** svaki dobiveni redak, a desno opisati iz kojega je retka pojedini redak dobiven i prema kojem **pravilu**. Vodoravnom crticom iza broja retka odvajamo zadani (zadane) od ostalih iskaza:

1	$[(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q] \vee \neg(Q \vee R)$ ✓			
	/		\	
2	$(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q$ ✓		$\neg(Q \vee R)$ ✓	$1\vee$
3	|		$\neg Q$	$2\neg\vee$
4	|		$\neg R$	$2\neg\vee$
5	$P \leftrightarrow Q$ ✓		○	$2\wedge$
6	$\neg Q$			$2\wedge$
	/	\		
7	P	$\neg P$		$5 \leftrightarrow$
8	Q	$\neg Q$		$5 \leftrightarrow$
8	$\times$	○		

Objasnimo i značenje križića i kružića na krajevima grana. Ponajprije, u stablu razlikujemo **putove**. Svi putovi počinju u prvome retku stabla a razdvajaju se kod svakoga grananja. Stablo ima tri završetka, te prema tome i tri puta. Prvo razdvajanje putova događa se u drugome retku. Desni put ubrzo završuje u 4. retku pokazujući da je nijek disjunkcije iz retka 2, a time i disjunkcija iz retka 1, istinita pod uvjetom da su Q i R neistiniti, i to bez obzira koju istinitosnu vrijednost ima P (bio istinit ili neistinit). Lijevi put se grana u retku 7 na dva puta.

Prvi put slijeva ne pokazuje nikakve uvjete istinitosti, jer sadrži Q i $\neg Q$, tj. traži da Q bude i istinito i neistinito, što je u našoj semantici nemoguće. Stoga smo na završetku toga puta stavili **križić**, $\times$. *Drugi* put slijeva, međutim, pokazuje da je početni iskaz iz retka 1 istinit i pod uvjetom da su P i Q neistiniti, i to bez obzira na istinitosnu vrijednost iskaza R (bio on istinit ili neistinit). *Treći* put s lijeva pokazuje da je početni iskaz istinit pod uvjetom da su Q i R neistiniti. Na kraju svih putova koji pozitivno pokazuju uvjete istinitosti, stavljamo **kružić**, ○.

Dobivene uvjete zadovoljivosti možemo izraziti posebnim iskaznim oblikom, koji se nazivlje **disjunktivnim normalnim oblikom**. To je iskaz što ga čini niz od jednoga ili više disjunkata, pri čem je svaki disjunkt niz od jednoga ili više konjunkata slovnih iskaza. (Uočimo da svaki iskaz možemo shvatiti sam za sebe kao jedan disjunkt nek zamišljene disjunkcije, ili kao jedan konjunkt neke zamišljenje konjunkcije).

Drugi put s lijeva u gornjem stablu traži da je istinito $\neg P \wedge \neg Q$, a treći da je istinito $\neg Q \wedge \neg R$. Sve uvjete istinitosti zadanoga skupa izražuje disjunkcija tih konjunkcija:

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge \neg R),$$

gdje svaki disjunkt prikazuje po jedan otvoreni put – lijevi disjunkt izražuje drugi put slijeva, a desni disjunkt treći put slijeva. Kako smo vidjeli, istinitost lijevoga disjunkta neovisna je o istinitosti R, a istinitost desnoga neovisna o istinitosti P. To možemo izraziti proširujući gornji disjunktivni normalni oblik u sljedeći **potpun** disjunktivni normalni oblik:

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

Uočimo da se drugi i četvrti disjunkt poklapaju, stoga dobiveni iskaz možemo svesti na tri disjunkta:

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R).$$

Općenito, **potpun disjunktivni normalni oblik** jest disjunktivni normalni oblik u kojem svaki disjunkt sadrži, za svako iskazno slovo zadanoga iskaza, to iskazno slovo ili nijek toga iskaznoga slova. Iz gornjega primjera iskaza u potpunome disjunktivnome normalnom obliku (ili izravno iz stabla) možemo očitati sljedeće uvjete istinitosti zadanoga iskaza:

P	Q	R
n	**n**	**i**
n	**n**	**n**
i	**n**	**n**

odnosno, u prirodno poredanim redcima istinitosne tablice:

P	Q	R
i	**n**	**n**
n	**n**	**i**
n	**n**	**n**

Ukupno dobivamo tri vrjednovanja (tri retka tablice) za slova P, Q i R, za koja je ispitivani iskaz $[(P \leftrightarrow Q) \wedge \neg Q] \vee \neg(Q \vee R)$ istinit.

Kako vidimo na gornjem primjeru, krajnji rezultat raščlambe u granama **slovni** iskazi (tj. jednostavni ili zanijekani jednostavni iskazi). Njih dalje ne raščlanjujemo jer nijek jednostavno iskaza u stablu predočava neistinitost zanijekanoga jednostavnoga iskaza, a sam jednostavni iskaz predočava vlastitu istinitost. Istinitosne pak vrijednosti jednostavnih iskaza, polazište su u iskaznoj logici za određivanje istinitosnih vrijednosti svih iskaza. Izgradnja stabla je na nekom putu završena kad na putu preostaju samo raščlanjeni iskazi (s kvačicom) i slovni iskazi, ili kad su se pojavili jednostavni iskaz i njegov nijek. U potonjem slučaju gradnju puta prekidamo (primjenu pravila pritom dovršimo), jer nema tumačenja u kojem isto iskazno slovo ima pridružene obje istinitosne vrijednosti.

Evo sada **prijegleda** svih raščambenih **pravila** za istinitosno stablo, s dodanim pravilom za dvostruki nijek, kao i općih **uputa** za gradnju i čitanje stabla.

$$\begin{array}{lll} h & \neg\neg p \checkmark & \\ i & p & h\neg\neg \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} h & p \wedge q \checkmark & \\ i & p & h\wedge \\ j & q & h\wedge \end{array} \qquad \begin{array}{llll} h & \neg(p \wedge q) \ \checkmark & & \\ & / & \backslash & \\ i & \neg p & \neg q & h\neg\wedge \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} h & p \vee q \ \checkmark & & \\ & / & \backslash & \\ i & p & q & h\vee \end{array} \qquad \begin{array}{lll} h & \neg(p \vee q) \checkmark & \\ i & \neg p & h\neg\vee \\ j & \neg q & h\neg\vee \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} h & p \rightarrow q \ \checkmark & & \\ & / & \backslash & \\ i & \neg p & q & h\rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{lll} h & \neg(p \rightarrow q) \checkmark & \\ i & p & h\neg\rightarrow \\ j & \neg q & h\neg\rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} h & p \leftrightarrow q \ \checkmark & & \\ & / & \backslash & \\ i & p & \neg p & h\neg\leftrightarrow \\ j & q & \neg q & h\neg\leftrightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{llll} h & \neg(p \leftrightarrow q) \ \checkmark & & \\ & / & \backslash & \\ i & p & \neg p & h\neg\leftrightarrow \\ j & \neg q & q & h\neg\leftrightarrow \end{array}$$

- **Kvačica** na kraju retka označuje da je raščlamba iskaza koji ispunjava taj redak, gotova, te da se u taj redak više ne treba vraćati.
- **Potpisivanjem** podiskaza jednoga ispod drugoga bilježimo da je raščlanjeni iskaz istinit ako i samo ako su svi potpisani podiskazi istiniti.
- **Grananjem** podiskaza bilježimo da je raščlanjeni iskaz istinit ako i samo ako je bilo podiskaz u lijevoj grani bilo podiskaz u desnoj grani istinit.

a) **Lijevo** se označuje broj retka (h, i, j, ...),

b) **desno** od raščlambom dobivenoga iskaza bilježimo **iz kojega** je **retka** dobiven taj iskaz i **pravilo** prema kojem je raščlamba izvršena.

U gornjim pravilima **redci *i* i *j* ne moraju slijediti neposredno iza retka *h*.** Iskaze ne treba raščlanjivati odmah, nego biramo najpogodnije mjesto težeći tomu da stablo bude što jednostavnije i što manje razgranato. Stoga je dobro dati prednost raščlambi koja ne sadrži grananje.

Primijetimo da se **raščlambena pravila primjenjuju samo na cijeli redak** u stablu, a ne na dio retka.

Iskaze postupno raščlanjujemo na njihove neposredne podiskaze, zatim na neposredne podiskaze neposrednih podiskaza, itd. Raščlamba se nastavlja sve do dobivenoga jednostavnoga iskaza i njegova nijeka, ili, ako se taj slučaj ne javlja, sve do **jednostavnih** iskaza i **nijekova jednostavnih** iskaza, koje više **ne raščlanjujemo**.

Pod **putom** razumijemo dio stabla koji započinje zadanim skupom iskaza na početku (korijenu) stabla, prolazi svaki svojom granom ne prekidajući se, te svaki završuje na svojem vrhu stabla.

Put zatvaramo čim nam se jedan ispod drugoga pojave neki **jednostavni iskaz i njegov nijek**, što označujemo **križićem**. (Raščlambu iskaza u kojoj se to događa dovršimo). Jednostavni iskaz i njegov nijek mogu se javiti **bilo kojim redom** i to ne mora biti u neposrednom slijedu.

DEFINICIJA 1.8 (ZATVOREN PUT) *Put je zatvoren ako i samo ako se u njem javljaju jednostavan iskaz p i nijek $\neg p$.*

Put koji nije zatvoren (u kojem se ne javlja neki jednostavni iskaz i njegov nijek), nazivljemo **otvorenim** putom. Kad ga dovršimo ne zatvorivši ga, a raščlanivši sve iskaze koji se mogu raščlanjivati, dobivamo **potpun otvoren put**.

DEFINICIJA 1.9 (POTPUNI OTVORENI PUT) *Put je potpun i otvoren ako i samo ako se u njem javljaju samo raščlanjeni ili slovni iskazi, a ne javljaju se jednostavan iskaz p i nijek $\neg p$.*

Takav put pokazuje uvjete istinitosti zadanoga iskaza na sljedeći način:

1. **jednostavni iskaz** koji se javlja na putu jest istinit;

2. jednostavni iskaz kojega se **nijek** javlja na putu, jest neistinit;

3. jednostavni iskazi koji se **ne javljaju** na putu (bilo da se kao podiskazi javljaju ili ne u zadanome skupu) mogu biti bilo istiniti, bilo neistiniti – zadani je iskaz istinit neovisno o njihovoj istinitosti.

PRIMJER 1.10 *Pronaći osnovna tumačenja za koja je istinit iskaz* ‘$(B \to C) \wedge (A \vee B)$’.

1	$(B \to C) \wedge (A \vee B)$ ✓				
2	$A \vee B$ ✓				$1\wedge$
3	$B \to C$ ✓				$1\wedge$
	/		\		
4	$\neg B$		C		$3 \to$
	/	\	/	\	
5	A	B	A	B	$2\vee$
	○	×	○	○	

Primijetimo da je u retku 5 iskaz iz retka 2, ‘$A \vee B$’, raščlanjen dva puta. To je zbog toga jer svaki ***iskaz treba raščlaniti na svakom putu na kojem se nalazi****. Kako u retku 4 imamo dva puta, a ‘$A \vee B$’ se nalazi na oba (oba prolaze retkom 2), taj iskaz treba u idućem retku raščlaniti kako na lijevom, tako i na desnom putu.*

U gornjem primjeru drugi je put s lijeva zatvoren, a

1. *prvi put s lijeva pokazuje da je zadani skup zadovoljiv tumačenjima za koja je ‘A’ istinito, ‘B’ neistinito, a ‘C’ bilo istinito bilo neistinito;*

2. *treći put s lijeva pokazuje da je zadani skup zadovoljiv tumačenjima za koja je ‘A’ istinito, ‘C’ istinit, a ‘B’ bilo istinito bilo neistinito;*

3. *četvrti put pokazuje da je zadani skup zadovoljiv tumačenjima za koja su i ‘B’ i ‘C’ istiniti, a ‘A’ bilo istinito bilo neistinito.*

Sve dobivene uvjete istinitosti zadanoga iskaza prikazuje sljedeći iskaz u disjunktivnome normalnome obliku:

$$(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$$

gdje svaki disjunkt prikazuje po jedan put u stablu. Nadalje, uzimljući u obzir za svaki disjunkt (za svaki put) sva zadana iskazna slova, dobivamo sljedeći iskaz u potpunome disjunktivnome normalnome obliku (uz ispuštanje disjunkata koji se ponavljaju):

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C).$$

Ostavimo disjunkciju neformalno u višečlanu obliku, u smislu da je istinita ako i samo ako je barem jedan disjunkt istinit.

Iz dobivenoga potpunoga disjunktivnoga normalnoga oblika (kao i izravno iz samoga stabla) jednostavno možemo odrediti vrijednosti iskaznih slova (odnosno retke u istinitosnoj tablici) za koje je zadani iskaz istinit – dobivamo sljedeću tablicu uvjeta zadovoljivosti zadanoga skupa iskaza:

A	B	C
i	**n**	**i**
i	**n**	**n**
i	**i**	**i**
n	**i**	**i**

koju, napokon, možemo prirodno poredati ovako:

A	B	C
i	**i**	**i**
i	**n**	**i**
i	**n**	**n**
n	**i**	**i**

Primjer 1.11 *Pod kojim je uvjetima istinit iskaz* $(D \vee E) \wedge \neg((C \leftrightarrow D) \rightarrow (D \vee F))$*?*

$$
\begin{array}{lcl}
1\_ & (D \vee E) \wedge \neg((C \leftrightarrow D) \rightarrow (D \vee F)) \checkmark & \\
2 & D \vee E \checkmark & 1\wedge \\
3 & \neg((C \leftrightarrow D) \rightarrow (D \vee F)) \checkmark & 1\wedge \\
4 & C \leftrightarrow D \checkmark & 3\neg\rightarrow \\
5 & \neg(D \vee F) \checkmark & 3\neg\rightarrow \\
6 & \neg D & 5\neg\vee \\
7 & \neg F & 5\neg\vee \\
 & / \quad \backslash & \\
8 & C \quad \neg C & 4\leftrightarrow \\
9 & D \quad \neg D & 4\leftrightarrow \\
 & \times \quad\; / \; \backslash & \\
10 & \quad\quad D \;\; E & 2\vee \\
 & \quad\quad \times \;\; \bigcirc &
\end{array}
$$

Zbog što veće jednostavnosti stabla, dobro je u dvojbi koji iskaz prije raščlaniti, prednost dati raščlambi koja **ne vodi grananju** (kao gore u redcima 4 i 5, te 6 i 7).

Primijetimo u primjeru da put zatvaramo bez obzira na to ima li u njem još neraščlanjenih iskaza (prvi s lijeva).

Sve uvjete istinitosti zadanoga iskaza u ovome primjeru izražuje sljedeći iskaz u potpunome disjunktivnome normalnome obliku, koji se sastoji od samo jednoga disjunkta:

$$\neg C \wedge \neg D \wedge E \wedge \neg F.$$

Vježbe

1.3 PREVOĐENJE

Jednostavni iskazi

I **hrvatski** jezik raspolaže jednostavnim rečenicama koje mogu biti istinite ili neistinite – to su jednostavne izjavne (deklarativne) rečenice. Stoga upravo takove rečenice i prevodimo na jezik $\mathscr{L}_i$ pomoću jednostavnih iskaza jezika $\mathscr{L}_i$. Dodajmo prethodno navedenim primjerima još neke:

Antun piše pismo.	A
Branimir uči.	B
Terezija voli glazbu.	T

Valja uočiti da je riječ o vrlo *apstraktnom* prevođenju. Isključujemo značenja riječi kao što su ‘piše’, ‘pismo’ itd., ne imenujemo nikakove osobe, nego samo vodimo računa o pukoj međusobnoj različitosti navedenih jednostavnih rečenica te ih u prijevodu bilježimo tek različitim iskaznim slovima (sintaktički aspekt), kojima se pridružuje jedna od dviju istinitosnih vrijednosti (semantički aspekt).

Iz te apstrakcije poizlaze i neke neobične posljedice. Npr. U običnome, svakodnevnome razumijevanju ne bismo dopustili da hrvatske rečenice kao što su ‘Ivan trči brže od Petra’ i ‘Petar trči brže od Ivana’, obje mogu biti istinite. No u iskaznoj logici dopuštamo i tu mogućnost jer se prijevodom tih rečenica na $\mathscr{L}_i$ iskaznim slovima, koja su dalje neraščlanjljiva, gubi unutrašnji ustroj tih hrvatskih rečenica.

Nijek

U hrvatskom jeziku istinitosna se vrijednost neke rečenice također mijenja nijekom te rečenice. Stoga se hrvatske niječne rečenice mogu prevoditi u niječan iskaz u jeziku $\mathscr{L}_i$. Pritom treba voditi računa o tom da se nijek u hrvatskom jeziku može izraziti **i drukčije** nego samo česticom ‘ne’.

Za nijek se umjesto ‘ne’, koje se u hrvatskome javlja i u ‘ne(će)’, ‘ne(ma)’, u hrvatskom rabe i:

ni, ni(je)
nije tako da, nije slučaj da

i sl.

Marko nije tenisač.	$\neg M$
Nije tako da je Marko tenisač.	$\neg M$
Nije slučaj da je Marko tenisač.	$\neg M$

U trećem je i u četvrtom primjeru sam nijek istaknutiji, no taj dodatni moment nema iskaznologičke vrijednosti pa se u prijevodu briše. – Važno je pri prevođenju hrvatskih niječnih rečenica ispravno utvrditi rečenicu koja se niječe.

Konjunkcija

I u hrvatskom se jeziku, kako smo vidjeli, rečenice mogu povezivati s ‘i’.

Kiša pada i sunce sja.

Veznički izraz

i... i...

jasnije **ističe** da su obje sastavne rečenice istinite. Npr.

I kiša pada i sunce sja. $K \wedge S$

Drugi veznički izrazi kojima se izražuje istinitost i jedne i druge sastavne rečenice, često sadrže i neka druga, **dodatna značenja**, koja u iskaznoj logici nemaju vrijednost. Prevodeći takove rečenice na jezik $\mathscr{L}_i$ često, stoga, **gubimo** dio obavijesti koju ti veznički izrazi u hrvatskom jeziku priopćavaju. Evo *primjera*:

Mariji se je knjiga svidjela, a Vinku je bila nezanimljiva. $M \wedge N$

Hrvatska rečenica iskazuje ne samo to da je istinita i jedna i druga sastavna rečenica, nego i **suprotnost** među njima. Ta se pak suprotnost u jeziku $\mathscr{L}_i$ gubi. Sačuvana je samo obavijest da su i jedna i druga rečenica istinite.

Premda se Vinku knjiga nije svidjela, kupio ju je. $\neg V \wedge K$

U prijevodu na $\mathscr{L}_i$ izgubilo se dodatno **dopusno** značenje.

Evo nekih vezničkih izraza koji se u hrvatskome javljaju osim ‘i’:

pa, pak, te;
a, ali, no, nego, već, međutim;
dok; iako, makar, premda;
i... i, kako... tako i, oboje i... i....

Disjunkcija

U hrvatskom jeziku veznička je riječ ‘ili’ donekle dvoznačna (može značiti i isključnu disjunkciju). Slično je i s izrazom ‘ bilo... bilo’. Uključna je disjunkcija jednoznačna kad se uporabi izraz ‘barem jedno od dvojega’.

> Dogodit će se barem jedno od dvojega, otići ću u kazalište u ponedjeljak ili u utorak. $P \vee U$

Umjesto: ‘Otići ću u kazalište u ponedjeljak ili u utorak’ (‘...bilo u ponedjeljak, bilo u utorak.’).

Pogodba

U hrvatskom se u pogodbenim rečenicama osim ‘ako... onda’ javljaju i:

> kada... (onda), li
> samo ako (*ispred drugoga člana pogodbe*)

Npr.

> Naučim li logiku, proći ću na ispitu. $L \rightarrow P$

Može se hrvatski govoriti i **obratnim** poretkom, tj. umjesto ‘Ako naučim logiku, proći ću na ispitu’, može se, primjerice, reći i ‘Proći ću na ispitu ako naučim logiku’.

U običnome jeziku, nadalje, najčešće **podrazumijevamo** razložitost povezivanja prednjaka i posljetka pogodbenih rečenica. Stoga bismo rečenice kao što su

> Ako je vrijeme sunčano, $2 + 2 = 4$,
> Ako $2 + 2$ nije 4, vrijeme je sunčano,

teško uopće mogli smatrati smislenima, a kamo li istinitima. No kad, kao u iskaznoj logici, apstrahiramo od takovih podrazumijevanja i očekivanja, dobivamo ne samo smislene nego i istinite rečenice (provjerite tablicom!).

Iskaznologičkoj analizi također izmiču **nestvarna** i **uzročna** pogodba. Kada bi se nestvarne pogodbene rečenice svodile na materijalnu pogodbu, sve bi bile istinite – zbog neistinitoga (nestvarnoga) prednjaka. Isto vrijedi i za svaku uzročnu rečenicu kad je god njezin prednjak neistinit.

Da sam ujutro popio toploga čaja, ne bih se razbolio.
Ako je pun mjesec, osjećam se loše.

Prva (nestvarna pogodbena) rečenica podrazumijeva neistinitost toga da sam ujutro popio čaja, pa bi, prema tome, kao materijalna pogodba morala biti istinita. Druga pak (uzročna) rečenica, shvaćena kao materijalna pogodba, bila bio istinita kad god nije pun mjesec.

Dvopogodba

Evo i primjera prijevoda hrvatske rečenice na jezik $\mathscr{L}_i$.

Proći ću na ispitu ako i samo ako budem naučio. $P \leftrightarrow N$.

Osim 'ako i samo ako' rabi se u hrvatskom npr. i 'upravo ako':

Proći ću na ispitu upravo ako budem naučio. $P \leftrightarrow N$.

Dakako da, slično kao i u slučaju pogodbe, ne mislimo nužno na kakovu razložnu ili uzročnu međuzavisnost sastavnih iskaza. Dva iskaza ne moraju imati međusobno nikakovu drugu vezu osim što imaju istu istinitosnu vrijednost, da bi se povezali u dvopogodbu.

Složenije rečenice

I složenije rečenice hrvatskoga jezik možemo prevoditi na $\mathscr{L}_i$, čime se omogućuje tablično izračunavanje njihovih istinitosnih vrijednosti. Valja svratiti pozornost na to da rečenice u hrvatskom jeziku mogu dolaziti ne samo u obratnom poretku od logičkoga nego da mogu biti *umetnute*, *isprekidane* i sl. Npr.

Zakasni li Marija, iako se jako žurila, na autobus, morat će, želi li ipak stići, pričekati vlak. $J \wedge (Z \rightarrow (S \rightarrow P))$

U prijevodu smo najprije ustanovili Marijinu veliku žurbu (J), a zatim to da će morati pričekati vlak (P) ako zakasni na autobus (Z) a ipak želi stići na svoje odredište (S).

Vježbe

Poglavlje 2

OČUVANJE ISTINE U ISKAZNOJ LOGICI

Istinitosna vrijednost jednoga iskaza može se *mijenjati* od tumačenja to tumačenja. Iskazi se pritom mogu ponašati na jednak, sličan ili različit način. Pođemo li od nekoga skupa iskaza koji su za neka tumačenja svi istiniti, je li proširenjem toga skupa novim iskazima istinitost svih članova ostaje **očuvana** za ista tumačenja i u proširenome skupu? Očuvanjem istinitosti svih članova proširenoga skupa barem za neka tumačenja, zadržava se svojstvo zadovoljivosti i za prošireni skup, a očuvanjem istinitosti svih članova proširenoga skupa za svako tumačenje, uspostavlja se posljedični odnos. Ubrzo ćemo pojmove zadovoljivosti, posljedice itd. točnije definirati.

Napomenimo da ćemo konačan skup iskaza bilježiti navodeći iskaze unutar vitičastih zagrada. Npr.

$$\{P \lor Q,\ P,\ \neg(Q \land R)\}.$$

Prazan skup označivat ćemo, kao što je uobičajeno, pomoću znaka '$\varnothing$'. Grčka će slova 'Γ', 'Δ' i 'Σ' biti metajezične varijable pomoću kojih ćemo općenito govoriti o skupovima iskaza jezika $\mathscr{L}_i$.

Za svaki novodefinirani semantički odnos dat ćemo primjer pomoću istinitosne tablice, a kao sustavnu metodu za provjeru semantičkih odnosa upotrijebit ćemo istinitosno stablo, sada u primijeni na skupove iskaza.

2.1 ZADOVOLJIVOST

DEFINICIJA 2.1 (ZADOVOLJIVOST) *Skup je iskaza* Γ *zadovoljiv ako i samo ako ima barem jedno tumačenje za koje je svaki član* Γ *istinit.*

Zadovoljiv se skup iskaza nazivlje još i semantički *suvislim* i semantički *konsistentnim* skupom.

PRIMJER 2.1 *Zadovoljiv je skup* $\{\neg(A \wedge B), A \vee C, A \rightarrow \neg B\}$ *jer istinitosna tablica za taj skup iskaza ima barem u jednom retku vrijednost* **i** *za svaki član skupa.*

A	B	C	$\neg(A \wedge B)$,		$A \vee C$,	$A \rightarrow \neg B$	
i	**i**	**i**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**
i	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**
i	**n**	**i**	**i**	**n**	**i**	**i**	**i**
i	**n**	**n**	**i**	**n**	**i**	**i**	**i**
n	**i**	**i**	**i**	**n**	**i**	**i**	**n**
n	**i**	**n**	**i**	**n**	**n**	**i**	**n**
n	**n**	**i**	**i**	**n**	**i**	**i**	**i**
n	**n**	**n**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**

Treći, četvrti, peti i sedmi redak već svaki za sebe pokazuju zadovoljivost skupa. Jasno, promatramo samo vrijednosti pod glavnim poveznicima triju članova skupa.

Možemo kraće govoriti i o zadovoljivosti iskaza p, što je isto što i zadovoljivost jednočlanoga skupa koji sadrži upravo p, skupa $\{p\}$.

Skup je iskaza Γ **nezadovoljiv** ako i samo ako nije zadovoljiv, tj. ako i samo ako ni za jedno tumačenje nisu svi članovi skupa Γ istiniti. Nezadovoljiv skup iskaza nazivlje se još i (semantički) nesuvislim ili (semantički) nekonsistentnim skupom.

PRIMJER 2.2 *Skup* $\{P \rightarrow Q, \neg(P \vee Q), P\}$ *jest nezadovoljiv, što pokazuje donja* *tablica, gdje ni u jednom retku nisu svi članovi skupa istiniti.*

P	Q	$P \to Q$,	$\neg(P \vee Q)$,		P
i	**i**	**i**	**n**	**i**	**i**
i	**n**	**n**	**n**	**i**	**i**
n	**i**	**i**	**n**	**i**	**n**
n	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**

Stavak 2.1 *Ako je skup iskaza Δ zadovoljiv, zadovoljiv je i svaki njegov podskup, a ako je Δ nezadovoljiv, nezadovoljiv je i svaki nadskup skupa Δ.*

Dokaz
(a) Prvi dio stavka slijedi iz toga što bilo koji skup Γ koji je podskup skupa Δ (kraće: $\Gamma \subseteq \Delta$), sadrži samo članove skupa Δ. Prema tome, ako su svi članovi skupa Δ istiniti za neko tumačenje T, istiniti su za T i svi članovi skupa Γ.
(b) Drugi dio stavka slijedi iz toga što su svi članovi skupa Δ kojemu je skup Σ njegov nadskup (kraće: $\Delta \subseteq \Sigma$), također članovi nadskupa Σ. Prema tome, ako ni za jedno tumačenje nisu svi članovi Δ istiniti, širenjem skupa Δ novim članovima u skup Σ, i dalje će onaj član skupa Δ koji je za tumačenje T bio neistinit, biti neistinit za T i sada kao član skupa Σ.

Napomena 2.1 *Zadovoljivost su i nezadovoljivost* pojedinačnoga iskaza *samo posebni slučaji zadovoljivosti skupa iskaza. Naime, kraće kažemo da je iskaz p zadovoljiv ili nezadovoljiv ovisno o tome je li jedinični skup $\{p\}$ (tj. skup koji za jedini član ima p) zadovoljiv ili nije.*

Vježba 2.1 *Provjerite istinitosnom tablicom zadovoljivost iskaza $(P_1 \vee P_2) \to (P_1 \wedge P_2)$ i iskaza $(Q_1 \wedge Q_2) \leftrightarrow (\neg Q_1 \vee \neg Q_2)$!*

2.1.1 Provjera nezadovoljivosti i zadovoljivosti istinitosnim stablom

Kako je u stablu zadani skup iskaza uvijek **konačan**, pojam nezadovoljivosti postaje osnovnim pojmom. To stoga jer je skup (i beskonačan) nezadovoljiv ako je već i neki njegov konačan podskup nezadovoljiv.

Napomenimo da će nam formulacija ‘istinitosno stablo za skup Γ’ označivati istinitosno stablo koje na početku sadrži *sve* članove skupa Γ (koji je, stoga, konačan).

Skup je iskaza Γ **nezadovoljiv** ako i samo ako ima istinitosno stablo za neki konačan podskup skupa Γ u kojem su **svi putovi zatvoreni**.

PRIMJER 2.3 *Istinitosno stablo za skup* $\{P \vee \neg Q,\ \neg(\neg P \to \neg Q)\}$*:*

1	$P \vee \neg Q$ ✓	
2_	$\neg(\neg P \to \neg Q)$ ✓	
3	$\neg P$	$2\ \neg \to$
4	$\neg\neg Q$ ✓	$2\ \neg \to$
5	Q	$4\ \neg\neg$
	/ \	
6	$P \quad \neg Q$	$1\ \vee$
	$\times \quad \times$	

Skup $\{P \vee \neg Q, \neg(\neg P \to \neg Q)\}$ *je nezadovoljiv. Primijetimo da je nezadovoljiv i svaki (pa i beskonačan) nadskup toga skupa.*

Sada, kad smo, primijenjujući stablo, nezadovoljivost uzeli kao polazni pojam, **zadovoljiv** skup Γ definiramo kao skup koji nije nezadovoljiv (tj., kao skup koji u stablu za svaki svoj podskup ima barem jedan potpun otvoreni put). Kad je Γ konačan skup, kojega se svi članovi dadu uvrstiti u istinitosno stablo, zadovoljivost skupa Γ pokazuje istinitosno stablo za Γ koje ima **barem jedan potpun otvoren put**.

PRIMJER 2.4 *Npr. skup* $\{\neg(P \vee \neg R) \vee \neg R,\ \neg P \wedge \neg Q\}$ *jest zadovoljiv:*

1	$\neg(P \vee \neg R) \vee \neg R$ ✓	
2_	$\neg P \wedge \neg Q$ ✓	
3	$\neg P$	$2\ \wedge$
4	$\neg Q$	$2\ \wedge$
	/ \	
5	$\neg(P \vee \neg R) \quad \neg R$	$1\ \vee$
	$\bigcirc$	

Prekinuli *smo gradnju stabla dobivši desno potpun otvoren put, a time i odgovor na pitanje o zadovoljivosti. Lijevi je (neoznačen) put ostao otvoren, ali nije potpun.*

Želimo li ipak ustanoviti sve uvjete istinitosti za zadani skup, stablo je potrebno ***dovršiti****:*

1	$\neg(P \lor \neg R) \lor \neg R$ ✓		
2_	$\neg P \land \neg Q$ ✓		
3	$\neg P$		$2 \land$
4	$\neg Q$		$2 \land$
	/	\	
5	$\neg(P \land \neg R)$ ✓	$\neg R$	$1 \lor$
	|	○	
6	$\neg P$		$5 \neg\lor$
7	$\neg\neg R$ ✓		$5 \neg\lor$
8	R		$7 \neg\neg$
	○		

Ispitujući zadovoljivost pojedinih iskaza, gradimo istinitosna stabla za odgovarajuće jednočlane skupove. U slučaju **nezadovoljivoga iskaza** p skup $\{p\}$ ima u stablu sve putove zatvorene, a u slučaju **zadovoljivoga iskaza** p jednočlani skup $\{p\}$ ima barem jedan potpun otvoren put u stablu.

2.2 POSLJEDICA I VALJANOST

Definicija 2.2 (Posljedica) *Iskaz p jest posljedica skupa iskaza Γ ako i samo ako je p istinit za svako tumačenje za koje je svaki član skupa Γ istinit.*

Drukčije kažemo i da iskaz p *slijedi* iz skupa Γ, ili da skup iskaza Γ *implicira* (povlači) iskaz p.

To da je iskaz p posljedica skupa Γ, kraće zapisujemo ovako:

$$\Gamma \models p.$$

Npr. $\{(P \to Q),\ \neg P\} \models \neg A$. Primjerice, neka je izgrađena potpuna tablica za čitav skup Γ i za p. Najprije tražimo redak u kojem svaki član skupa Γ ima vrijednost **i.** Ima li pak takva retka, gledamo ima li tada uvijek i posljedica p vrijednost **i**. Ako da, p je posljedica skupa Γ; ako ne, p nije posljedica skupa Γ. Nema li pak retka u kojem svaki član skupa Γ ima vrijednost **i**, p je (na prazan način) posljedica skupa Γ.

PRIMJER 2.5

$$\{(P \to Q), \neg Q\} \models \neg P.$$

P	Q	$P \to Q,$	$\neg Q,$	$\neg P$
i	**i**	**i**	**n**	**n**
i	**n**	**n**	**i**	**n**
n	**i**	**i**	**n**	**i**
n	**n**	**i**	**i**	**i**

Vrijedi da $\{(P \to Q), \neg Q\} \models \neg P$*, jer u jedinome retku, gdje su svi članovi zadanoga skupa* Γ *istiniti, u četvrtome, istinito je i* $\neg P$*.*

Tumačenje koje pokazuje da neki iskaz p nije posljedica skupa Γ jest **protuprimjer** posljedičnoga odnosa. To je tumačenje, kako proizlazi iz rečenoga, za koje je **svaki član skupa** Γ **istinit, a iskaz** p **neistinit**. Da iskaz p nije posljedica skupa Γ bilježimo ovako: $\Gamma \not\models p$.

PRIMJER 2.6 $\{(P \to Q), Q\} \not\models P$

P	Q	$P \to Q,$	$\neg Q,$	$\neg P$
i	**i**	**i**	**n**	**i**
i	**n**	**n**	**n**	**i**
n	**i**	**i**	**i**	**n**
n	**n**	**i**	**n**	**n**

U trećem retku svi su članovi zadanoga skupa $\{(P \to Q), Q\}$ *istiniti, ali je iskaz P neistinit. To je protuprimjer koji opovrgava da je P posljedica zadanoga skupa.*

Postoji i skraćen tablični postupak provjere posljedice poznat pod latinskim nazivom *reductio ad absurdum*. Tim postupkom pokušavamo izgraditi redak s vrijednošću **i** za sve članove zadanoga skupa u tablici, i s vrijednošću **n** za posljedicu. Ako to dovodi do nesklada u tablici (da jedno te isto iskazno slovo u istome retku mora imati različitu istinitosnu vrijednost), slijed vrijedi. Ako nema nesklada, a svi članovi skupa uvršteni su u tablicu, slijed ne vrijedi.

PRIMJER 2.7 $\{(P \rightarrow Q),\ P\} \models Q$.

P	Q	$P \rightarrow Q,$			$P,$	Q
		i	**i**	**n**	**i**	**n**

U pogodbi bi 'P' ili 'Q' morali imati drugu istinitosnu vrijednost nego što je ona dobivena u tablici, kako bi pogodba mogla biti istinita.

STAVAK 2.2 $\Gamma \models p$ *ako i samo ako je skup* $\Gamma \cup \{\neg p\}$ *nezadovoljiv.*

Dokaz Stavak pomoću izraza 'ako i samo ako' tvrdi da (a) ako vrijedi lijeva strana vrijedi i desna, te (b) ako vrijedi desna da vrijedi i lijeva strana. a) Neka $\Gamma \models p$ i neka su svi članovi Γ istiniti. Tada, prema definiciji slijeda (posljedice), i p mora biti istinit, a $\neg p$, prema tome, neistinit. Tada je, dakle, skup $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljiv.
b) Neka je skup $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljiv i neka je svaki član skupa Γ istinit. Tada $\neg p$ mora biti neistinito, a p, prema tome, istinito. No, to znači, prema definiciji slijeda (posljedice), da $\Gamma \models p$.
a) i b) skupa dokazuju cijeli stavak.

STAVAK 2.3 *Ako* $\Gamma \models p, \neg p$, *onda je* Γ *nezadovoljiv.*

Dokaz Pretpostavimo da su svi iskazi koji su članovi skupa Γ istiniti za neko tumačnje T. Tada bi, prema definiciji posljedice, za T morali biti istinit i p i $\neg p$, što je nemoguće. Prema tome, ni za jedno tumačenje ne mogu svi članovi Γ biti istiniti.

STAVAK 2.4 *Neka* $\Delta \subseteq \Gamma$. *Ako* $\Delta \models p$, *onda* $\Gamma \models p$. *(Tj. posljedica skupa, posljedica je i nadskupa.)*

Dokaz Neka $\Delta \models p$. Neka su i svi članovi Δ istiniti. Tada je istinito i p. No, ako su istiniti svi članovi Γ, istiniti su i svi članovi podskupa Δ. A tada je istinito i p. Dakle, $\Gamma \models p$.

Zaključak je semantički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak posljedica skupa iskaza što ga čine premise zaključka. Odnosno, primijenimo li definiciju posljedice:

DEFINICIJA 2.3 (SEMANTIČKA VALJANOST ZAKLJUČKA) *Zaključak je semantički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak istinit za svako tumačenje za koje su sve premise istinite.*

PRIMJER 2.8 *Evo primjera valjana zaključka:*

$$\begin{array}{l} \neg F \rightarrow G \\ G \rightarrow F \\ \hline F \vee G \end{array}$$

F	G	$\neg F \rightarrow G$,	$G \rightarrow F$,	$F \vee G$
i	**i**	**i**	**i**	**i**
i	**n**	**i**	**i**	**i**
n	**i**	**i**	**n**	**i**
n	**n**	**n**	**i**	**n**

Protuprimjer valjanu zaključku jest tumačenje za koje su sve premise istinite, a zaglavak neistinit. U sljedećem nevaljanu zaključku protuprimjeri su u prvome i drugome retku tablice.

PRIMJER 2.9 *Primjer je kao i gornji samo što je zanijekan zaglavak.*

$$\begin{array}{l} \neg F \rightarrow G \\ G \rightarrow F \\ \hline \neg(F \vee G) \end{array}$$

F	G	$\neg F \rightarrow G$,	$G \rightarrow F$,	$\neg(F \vee G)$	
i	**i**	**i**	**i**	**n**	**i**
i	**n**	**i**	**i**	**n**	**i**
n	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**
n	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**

PRIMJER 2.10 *Provjerimo jedan zaključak postupkom reductio ad absurdum.*

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ Q \vee R \\ \hline Q \end{array}$$

P	Q	R	$P \vee Q$,	$Q \vee R$,	Q
i	**n**	**i**	**i i n**	**n i i**	**n**

Gornji zaključak nije valjan jer tablica pokazuje da je moguć redak u kojem su sve premise istinite, a zaglavak neistinit.

DEFINICIJA 2.4 (SEMANTIČKA VALJANOST ISKAZA) *Iskaz je semantički valjan ako i samo ako je istinit za svako tumačenje.*

Valjan se iskaz u iskaznoj logici nazivlje još i *logički istinitim* iskazom ili *tautologijom*.

U istinitosnoj tablici valjan će iskaz u stupcu pod glavnim poveznikom u svakome retku imati **i**. Npr. valjan je iskaz $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$, kako pokazuje sljedeća tablica:

P	$\neg(P \leftrightarrow \neg P)$
i	**i n n**
i	**i n i**

Katkad se valjani i nezadovoljivi iskazi zajednički nazivlju i *logički određenim* iskazima. Iskaz koji nije ni valjan ni nezadovoljiv, jest *logički neodređen* (kontingentan, činjeničan) iskaz. On je zadovoljiv, ali nije valjan.

STAVAK 2.5 *Valjan je iskaz* ***posljedica bilo kojega skupa iskazâ****, odnosno, to je zaglavak koji slijedi iz bilo kojih premisa.*

Dokaz Kako je valjan iskaz istinit za svako tumačenje, istinit je i za svako tumačenje za koje su svi članovi bilo kojega skupa istiniti.

VJEŽBA 2.2 *Izaberite po volji neki skup iskaza i provjerite istinitosnom tablicom je li* $\neg(P \wedge \neg P)$ *njegova posljedica!*

PRIMJER 2.11 *Valjan je iskaz posljedica i praznoga skupa iskaza. Npr.*

$$\models \neg(P \wedge \neg P),$$

što je kraće za $\emptyset \models \neg(P \wedge \neg P)$. *Pogledajmo tablicu!*

P	$\neg(P \wedge \neg P)$
i	**i** **n**
i	**i** **n**

Tablicu odčitajmo na uobičajen način. Osobito je samo to što je broj n *članova skupa* Γ *sada jednak nuli. Tablica potvrđuje sljedeće: u svakome retku* **i** *se javlja* $n = 0$ *puta (za svaki član skupa* Γ*), a u svakome retku i pod posljedicom stoji* **i**. *Tj. nikad se ne javlja kombinacija da je pod svim članovima* Γ **i**, *a pod posljedicom* **n**, *što bi bio protuprimjer.*

STAVAK 2.6 *Iskaz p je* ***valjan*** *ako i samo ako je p* ***posljedica praznoga*** *skupa iskaza.*

Dokaz
(a) Dokaz s lijeva na desno (ako vrijedi lijeva strana stavka, vrijedi i desna): Ako je p valjan, posljedica je svakoga skupa, kako je dokazano, pa prema tome i praznoga skupa.
(b) Dokaz s desna na lijevo (ako vrijedi desna strana stavka, vrijedi i lijeva). Ako $\emptyset \models p$, onda p mora uvijek biti istinito, jer su (na prazan način) i svi članovi $\emptyset$ istiniti ("svih" 0 članova skupa $\emptyset$ jesu istiniti).
(a) i (b) zajedno dokazuju stavak (lijeva strana stavka vrijedi ako i samo ako vrijedi i desna).

Također, **posljedica** konačnoga skupa Γ svodi se na **valjanost pogodbe** u kojoj je prednjak konjunkcija članova skupa Γ, a posljedak je posljedica.

VJEŽBA 2.3 *Pronađite pogodbu koja odgovara slijedu* $\{A \to B, \neg B\} \models \neg A$ *i provjerite je li valjana!*

Kako smo već pokazali, **posljedični** odnos $\Gamma \models p$ može se svesti na **nezadovoljivost** unije $\Gamma \cup \{\neg p\}$. To znači da se i semantička **valjanost** zaključka svodi na nezadovoljivost skupa što ga čine **premise i nijek zaglavka**. A valjanost iskaza p svodi se, prema tome, na **nezadovoljivost** skupa $\{\neg p\}$. Te ćemo činjenice upotrijebiti pri primjeni istinitosnoga stabla.

2.2.1 Provjera slijeda i semantičke valjanosti istinitosnim stablom

Provjeru **posljedičnoga** odnosa $\Gamma \models p$ istinitosnim stablom svodimo na provjeru **nezadovoljivosti skupa** $\Gamma \cup \{\neg p\}$, tj. skupa što ga čine svi članovi Γ i nijek posljedice. Stoga gradimo stablo za skup što ga čine članovi skupa Γ (ne svi ako je Γ beskonačan) i iskaz $\neg p$. Takvo stablo, u kojem su svi putovi zatvoreni, pokazuje da posljedični odnos $\Gamma \models p$ vrijedi.

Primjer 2.12

$$\{A \leftrightarrow (B \vee \neg C), A \rightarrow C\} \models C.$$

$$
\begin{array}{llccl}
1 & \multicolumn{3}{c}{A \leftrightarrow (B \vee \neg C)\ \checkmark} & \\
2 & \multicolumn{3}{c}{A \rightarrow C\ \checkmark} & \\
\underline{3} & \multicolumn{3}{c}{\neg C} & \\
 & \multicolumn{2}{c}{/} & \backslash & \\
4 & \multicolumn{2}{c}{\neg A} & C & 2 \ \rightarrow \\
 & / & \backslash & \times & \\
5 & A & \neg A & & 1 \ \leftrightarrow \\
6 & B \vee \neg C & \neg(B \vee \neg C)\ \checkmark & & 1 \ \leftrightarrow \\
 & \times & | & & \\
7 & & \neg B & & 6 \ \neg\vee \\
8 & & \neg\neg C\ \checkmark & & 6 \ \neg\vee \\
9 & & C & & 8 \ \neg\neg \\
 & & \times & &
\end{array}
$$

Ima li u stablu za čitav konačan skup $\Gamma \cup \{\neg p\}$ **barem jedan potpun otvoren put**, posljedica **ne vrijedi**.

Na sličan način istinitosnim stablom provjeravamo i semantičku **valjanost zaključka**. Tj. provjeravamo je li skup što ga čine premise i nijek zaglavka, nezadovoljiv. Istinitosno stablo za skup što ga čine premise (ne nužno sve) i zaglavak zaključka, a u kojem su **svi putovi zatvoreni**, pokazuje da je zaključak semantički valjan.

Ima li u stablu sa svim premisama zaključka **barem jedan potpun otvoreni put**, zaključak **nije valjan**.

PRIMJER 2.13 *Provjerimo valjanost već spomenutoga zaključka:*

$$\begin{array}{l} \neg F \leftrightarrow G \\ G \to F \\ \hline \neg(F \vee G) \end{array}$$

1	$\neg F \leftrightarrow G$ ✓		
2	$G \to F$ ✓		
3	$\neg\neg(F \vee G)$ ✓		
4	$F \vee G$ ✓		3 $\neg\neg$
	/	\	
5	$\neg F$	$\neg\neg F$✓	1 $\leftrightarrow$
6	G	$\neg G$	1 $\leftrightarrow$
7	|	F	5 $\neg\neg$
	/ \	/ \	
8	$\neg G$ F	$\neg G$ F	2 $\to$
	× ×	/ \ / \	
9		F G F G	4 $\vee$
		○ × ○ ×	

Zaključak nije valjan jer dobivamo potpune otvorene putove (i to odmah dva istom raščlambom u retku 9).

Također, za provjeru valjanosti iskaza provjeravamo je li skup $\{\neg p\}$ nezadovoljiv. **Iskaz** će biti **valjan** ako i samo ako istinitosno stablo za $\{\neg p\}$ ima **sve putove zatvorene**. To znači da, ima li u takovu stablu **barem jedan potpun otvoreni put**, iskaz **nije** semantički **valjan**.

PRIMJER 2.14 *Provjerimo je li valjan iskaz* $(P_1 \vee P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)$*!*

$$
\begin{array}{lcl}
1\_ & \neg[(P_1 \vee P_2) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2)]\checkmark & \\
2 & \neg(P_1 \vee P_2)\checkmark & 1\neg\vee \\
3 & \neg(\neg P_1 \wedge \neg P_2)\checkmark & 1\neg\vee \\
4 & \neg P_1 & 2\neg\vee \\
5 & \neg P_2 & 2\neg\vee \\
 & / \quad \backslash & \\
6 & \neg\neg P_1\checkmark \quad \neg\neg P_2\checkmark & 3\neg\wedge \\
7 & P_1 \qquad P_2 & 6\neg\neg \\
 & \times \qquad \times &
\end{array}
$$

Iskaz je semantički valjan jer su svi putove u stablu za nijek iskaza zatvoreni.

NAPOMENA 2.2 (GRADNJA STABLA) *Ako se **isti postupak** u primjeni na isti redak javlja **usporedno u dvije grane**, može ga se prikazati u jednom retku, kao u retku 7 u gornjem primjeru.*

NAPOMENA 2.3 (GRADNJA STABLA) *Ako je odgovor na pitanje o valjanosti niječan, a želimo dobiti **sve protuprimjere** valjanosti, stabla gradimo do kraja.*

2.3 SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST

Neki se iskazi u svakom tumačenju ponašaju na jednak način. To su semantički istovrijedni iskazi.

DEFINICIJA 2.5 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST, $\simeq$) *Iskazi* p *i* q *jesu semantički istovrijedni (kraće* $p \simeq q$*) ako i samo ako za svako tumačenje imaju istu istinitosnu vrijednost.*

Kaže se i da su p i q *ekvivalentni*.

PRIMJER 2.15 *U istinitosnoj tablici istovrijedni će iskazi pod svojim glavnim poveznicima u svakom retku imati iste istinitosne vrijednosti, tj. ti će im* *stupci biti jednaki.*

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$,	$\neg(P \wedge Q)$
i	**i**	**n n n**	**n i**
i	**n**	**n i i**	**i n**
n	**i**	**i i n**	**i n**
n	**n**	**i i i**	**i n**

Iskazi su **neistovrijedni** ako i samo ako barem za jedno tumačenje imaju različitu istinitosnu vrijednost. Neistovrijedni su npr. iskazi $\neg(P \rightarrow Q)$ i $\neg P \vee \neg Q$:

PRIMJER 2.16

P	Q	$\neg(P \rightarrow Q)$,	$\neg P \vee \neg Q$
i	**i**	**n i**	**n n n**
i	**n**	**i n**	**n i i**
n	**i**	**n i**	**i i n**
n	**n**	**n i**	**i i i**

Semantičku **istovrijednost** dvaju iskaza možemo shvatiti kao semantičku **valjanost** njihove **dvopogodbe**.

VJEŽBA 2.4 *Prikažite semantičku istovrijednost $\neg(P \wedge Q)$ i $\neg P \vee \neg Q$ kao valjanost dvopogodbe između tih dvaju iskaza!*

Semantička se istovrijednost iskaza p i q može svesti na **nezadovoljivost** skupova $\{p, \neg q\}$ i $\{\neg p, q\}$, što ćemo uporabiti pri primjeni istinitosnoga stabla. Semantička se istovrijednost može, također, svesti na **posljedični** odnos. Naime, iskazi su p i q semantički istovrijedni ako i samo ako $\{p\} \models q$ i $\{q\} \models p$. Uočimo na bilo kojem primjeru da je provjera tih posljedičnih odnosa tablicom ista kao i provjera istovrijednosti.

Općenito vrijedi da su svi iskazi oblika $\neg(p \wedge q)$ i $\neg p \vee \neg q$ semantički istovrijedni. Isto vrijedi i za oblike $\neg(p \vee q)$ i $\neg p \wedge \neg q$. Te opće tvrdnje o istovrijednosti nazivlju se De Morganovim zakonima.

STAVAK 2.7 (DE MORGANOVI ZAKONI)

$$\neg(p \wedge q) \simeq \neg p \vee \neg q,$$
$$\neg(p \vee q) \simeq \neg p \wedge \neg q.$$

Dokaz Gornje je zakone lako provjeriti istinitosnim tablicama, izgrađenima na temelju istinitosnih vrijednosti za p i q na lijevoj strani tablice.

2.3.1 Provjera semantičke istovrijednosti istinitosnim stablom

U provjeri istinitosnim stablom, polazimo od odredbe semantičke istovrijednosti iskaza p i q kao **nezadovoljivosti** skupa $\{p, \neg q\}$ i skupa $\{\neg p, q\}$. Stoga će p i q biti semantički istovrijedni ako i samo ako istinitosno stablo za $\{p, \neg q\}$ i istinitosno stablo za $\{\neg p, q\}$ imaju **sve putove zatvorene**.

PRIMJER 2.17 *Pokažimo istinitosnim stablom da su iskazi* $\neg P \vee \neg Q$ *i* $\neg(P \wedge Q)$ *semantički istovrijedni!*

$$\begin{array}{lcl}
1 & \neg P \vee \neg Q \checkmark & \\
\underline{2} & \neg\neg(P \wedge Q) \checkmark & \\
3 & P \wedge Q \checkmark & 2\neg\neg \\
4 & P & 3\wedge \\
5 & Q & 3\wedge \\
 & / \quad \backslash & \\
6 & \neg P \quad \neg Q & 1\vee \\
 & \times \quad \times &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
1 & \neg(\neg P \vee \neg Q) \checkmark & \\
\underline{2} & \neg(P \wedge Q) \checkmark & \\
3 & \neg\neg P \checkmark & 1\neg\vee \\
4 & \neg\neg Q \checkmark & 1\neg\vee \\
5 & P & \neg\neg \\
6 & Q & \neg\neg \\
 & / \backslash & \\
7 & \neg P \quad \neg Q & 2\neg\wedge \\
 & \times \quad \times &
\end{array}$$

Ima li u istinitosnom stablu za $\{p, \neg q\}$ ili u istinitosnom stablu za $\{\neg p, q\}$ barem jedan **potpun otvoreni put**, p i q **nisu** istovrijedni.

2.4 PRIJEGLED DEFINICIJA I PROVJERA

U prijegledu već danih definicija koji sada dajemo, ‘akko’ je skraćeno za ‘ako i samo ako’.

1. **ZADOVOLJIVOST.** SKUP JE ISKAZA Γ ZADOVOLJIV AKKO IMA BAREM JEDNO TUMAČENJE T, TAKVO DA ZA SVAKI ISKAZ $p \in \Gamma$, $T(p) = \mathbf{i}$.

Provjera: u istinitosnome stablu za konačan skup Γ ima barem jedan potpun otvoren put.

2. **NEZADOVOLJIVOST.** SKUP JE ISKAZA Γ NEZADOVOLJIV AKKO NIJE ZADOVOLJIV.

Provjera: u istinitosnome stablu za skup što ga čine (ne nužno svi) članovi skupa Γ, svi su putovi zatvoreni.

3. **POSLJEDICA ($\models$).** $\Gamma \models p$ AKKO $T(p) = \mathbf{i}$ KADGOD ZA SVAKI $q \in \Gamma$, $T(q) = \mathbf{i}$.

Provjera: u istinitosnome stablu za skup što ga čine članovi (ne nužno svi) skupa Γ i $\neg p$, svi su putovi zatvoreni.

4. **SEMANTIČKA VALJANOST ZAKLJUČKA.** ZAKLJUČAK JE SEMANTIČKI VALJAN AKKO JE ZAGLAVAK POSLJEDICA PREMISA.

Provjera: u istinitosnome stablu za skup što ga čine premise (ne nužno sve) i nijek zaglavka, svi su putovi zatvoreni.

5. **VALJANOST ISKAZA.** ISKAZ p JE VALJAN AKO I SAMO AKKO ZA SVAKO TUMAČENJE T, $T(p) = \mathbf{i}$.

Provjera: u istinitosnome stablu za skup $\{\neg p\}$ svi su putovi zatvoreni.

6. **Semantička istovrijednost ($\simeq$).** $p \simeq q$ akko za svako tumačenje T, $T(p) = T(q)$.

Provjera: u istinitosnome stablu za $\{p, \neg q\}$ i u istinitosnome stablu za $\{\neg p, q\}$ svi su putovi zatvoreni.

Vježbe

1. Koji su iskazi posljedice nezadovoljiva skupa iskaza? *Navedite primjer po želji i izgradite potpunu istinitosnu tablicu!*

2. Objasnite zbog čega se

a) posljedica $\Gamma \models p$ svodi na nezadovoljivost unije $\Gamma \cup \{\neg p\}$;

b) semantička valjanost iskaza p svodi na nezadovoljivost skupa $\{\neg p\}$;

c) semantička istovrijednost iskaza p i q svodi na nezadovoljivost skupova $\{p, \neg q\}$ i $\{\neg p, q\}$!

Poglavlje 3

DEDUKTIVNI SUSTAV U ISKAZNOJ LOGICI

Još smo u uvodu naglasili da logički oblici (npr. zaključak) imaju i svoju sasvim **formalnu** stranu, koja ne ovisi o sadržaju, značenju, istinitosti jezičnih oblika. Svi logički pojmovi koje smo upoznali sa semantičke strane, imaju i svoju sintaktičnu stranu – mogu se promatrati apstrahirajući od semantike. Stoga su u modernoj logici za provjeru logičkih svojstava iskaza razvijeni i formalni, sintaktički sustavi i metode.

Upoznat ćemo **sustav naravne dedukcije** (sustav naravnoga *zaključivanja*), koji je blizak kako načinu zaključivanja u običnom razgovoru, tako i načinu zaključivanja u matematici.

Osnovnu ideju sustava naravne dedukcije čini ideja **dokazivanja** neke **postavke** iz prihvaćenih **pretpostavaka** na temelju samoga **oblika** (forme) iskazâ. Pritom se zaključivanje raščlanjuje na niz jednostavnih, posredujućih zaključaka, koji postupno od pretpostavaka vode postavci.

Umjesto semantičkih pravila, postavljaju se sintaktička **pravila**, prema kojima, ako su dani iskazi određenoga oblika, možemo izvesti neki iskaz određenoga oblika.

3.1 DOKAZI I PRAVILA

U dokazu **iz** konačnoga broja određenih **pretpostavaka** zaključujemo **na** zadanu **postavku**. U Fitchovu načinu prikaza, kojim se služimo, **uspravna** crta pokazuje doseg pretpostavaka (dokle pretpostavke vrijede), a **vodoravna** crta odvaja pretpostavke dokaza od izvedenih iskaza. Evo jednostavnoga primjera:

PRIMJER 3.1 *Neka su pretpostavke* $P \to Q$, $B \to (R \wedge S)$ *i* P, *a neka je postavka koju treba dokazati* R. *Ovo je dokaz:*

$$\begin{array}{r|l} 1 & P \to Q \\ 2 & Q \to (R \wedge S) \\ 3 & \underline{P} \\ 4 & Q \\ 5 & R \wedge S \\ 6 & R \end{array}$$

Način izvođenja u gornjem dokazu možemo razumjeti (intuitivno ili oslanjajući se na semantiku) i prije nego dademo sama pravila u skladu s kojima je izveden. Evo neformalnoga objašnjenja. U redcima su 1–3 pretpostavke od kojih polazimo u dokazu. Q *u retku 4 logično proizazi iz* $P \to Q$ *u retku 1 i* P *u retku 3. Na sličan način,* $Q \wedge S$ *u retku 5 logično proizlazi iz* $Q \to (R \wedge S)$ *u retku 2 i* Q *u retku 4. Napokon,* R *u retku 6 izvodi se iz* $R \wedge S$ *u retku 5. Kad upoznamo pravila deduktivnoga sustava, na kraju svakoga izvedenoga retka desno stavit ćemo objašnjenje.*

Definirajmo sada dokaz i dokažljivost:

DEFINICIJA 3.1 (DOKAZ) *Dokaz je konačan niz iskaza koji su pretpostavake ili su izvedeni prema pravilima.*

Pojam niza ovdje upravo znači da u dokazu ima prvi, drugi, treći itd. iskaz, što označavamo pozitivnim cijelim brojem na početku svakoga retka.

DEFINICIJA 3.2 (DOKAŽLJIVOST, $\vdash$) *Iskaz je* p *dokažljiv iz skupa iskaza* Γ *(kraće* $\Gamma \vdash p$*) ako i samo ako ima dokaz iskaza* p *iz konačnoga podskupa skupa* Γ.

Drukčije možemo reći da je p sintaktična posljedica skupa Γ (i treba ju razlikovati od posljedice u semantičkome smislu, v. prije u definiciji 5.2).

Dokažljivost iskaza p iz skupa Γ možemo kraće zapisati ovako: $\Gamma \vdash p$. Gornji je primjer dokaz da $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow (R \wedge S), P\} \vdash R$. Dokažljivost je usporedna i odgovara slijedu (posljedičnomu odnosu), ali je to potrebno posebno dokazati. To je lijep ali dug i složen dokaz, kojim se bavimo u naprjednijem dijelu logike.

Istaknimo da ne moraju svi članovi skupa Γ biti pretpostavke. Npr. na temelju našega primjera dokaza možemo također reći da $\{P \rightarrow Q, Q \rightarrow (R \wedge S), P, T\} \vdash R$, jer se R može dokazati i samo iz nekih članova toga skupa. Γ može biti i beskonačan skup iskaza, koji se ne mogu svi navesti kao pretpostavke jer pretpostavaka u dokazu (koji je konačan) uvijek ima konačan broj.

STAVAK 3.1 *Ako je iz* Γ *dokažljiv iskaz* p*, a* Γ *je podskup skupa* Δ*, onda je i iz* Δ *dokažljivo* p*. (Tj. ako* $\Gamma \vdash p$ *i* $\Gamma \subseteq \Delta$*, onda* $\Delta \vdash p$*).*

Dokaz Neka $\Gamma \vdash p$ i $\Gamma \subseteq \Delta$. Kako su svi članovi skupa Γ također i članovi skupa Δ, jednak dokaz iskaza p je moguć i iz skupa Δ. Δ može sadržavati i druge pretpostavke koje, međutim, ne moramo upotrijebiti u dokazu iskaza p.

Pravila ćemo sustava i različite oblike dokaza postupno izložiti na primjerima.

3.1.1 JEDNOSTAVAN DOKAZ

Pod jednostavnim dokazom razumijemo ovdje dokaz kojega prikaz ima **samo jednu uspravnu crtu**. Izložimo najprije pravila koja ne traže izlazak iz okvira jednostavnoga dokaza.

Uvođenje i isključenje konjunkcije

Pravila uvođenja i isključenja konjunkcije lako su shvatljiva. Ona, pojednostavnjeno rečeno, kažu da se iz konjunkata izovdi konjunkcija (uvođenje $\wedge$), a iz konjunkcije konjunkti (isključenje $\wedge$).

Lijevo prikazujemo pravilo **uvođenja konjunkcije** (u$\wedge$), a desno dva oblika pravila za **isključenje konjunkcije** (i$\wedge$):

$$\begin{array}{r|ll} h & p & \\ i & q & \\ j & p \wedge q & h, i \text{ u}\wedge \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} h & p \wedge q & \\ i & p & h \text{ i}\wedge \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} h & p \wedge q & \\ i & q & h \text{ i}\wedge \end{array}$$

U opravdanju izvedenoga retka stoje brojevi redaka iz kojih je dobiven i naziv pravila. Redci h, i, j **ne moraju slijediti neposredno** jedan za drugim. To vrijedi i za ostala pravila koja ćemo navoditi. Također, p i q se mogu u dokazu javljati **bilo kojim redom**.

Pravilo i$\wedge$ uporabili smo u našem početnom primjeru dokaza u retku 6. Evo još jednoga *primjera* s uporabom pravilâ za konjunkciju:

$$\{(Q \wedge R) \wedge P,\ \neg S \to T\} \vdash (P \wedge Q) \wedge (\neg S \to T)$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|ll} 1 & (Q \wedge R) \wedge P & \\ 2 & \underline{\neg S \to T} & \\ 3 & P & 1 \text{ i}\wedge \\ 4 & Q \wedge R & 1 \text{ i}\wedge \\ 5 & Q & 4 \text{ i}\wedge \\ 6 & P \wedge Q & 3, 5 \text{ u}\wedge \\ 7 & (P \wedge Q) \wedge (\neg S \to T) & 6, 2 \text{ u}\wedge \end{array}$$

Uočimo na tome primjeru **postupnost** izvođenja, karakterističnu za deduktivni sustav dokazivanja. Q ne izvodimo izravno iz retka 1, nego najprije izvodimo $Q \wedge R$ (redak 4), a zatim Q (redak 5). Slično, i postavku izvodimo postupnim uvođenjem konjunkcije.

Redoslijed izvođenja mogao je biti **i drukčiji**, što je također karakteristično za dokaze. Npr., nakon pretpostavaka mogli smo izvoditi ovako:

$$\begin{array}{r|ll} & \vdots & \\ 3 & Q \wedge R & 1 \text{ i}\wedge \\ 4 & Q & 3 \text{ i}\wedge \\ 5 & P & 1 \text{ i}\wedge \\ 6 & P \wedge Q & 4, 5 \text{ u}\wedge \\ 7 & (P \wedge Q) \wedge (\neg S \to T) & 6, 2 \text{ u}\wedge \end{array}$$

Isključenje pogodbe i dvopogodbe

Isključenje je **pogodbe** pravilo tradicionalno poznato kao *modus ponens* hipotetičnoga zaključka. Iskaz q možemo izvesti ako nam je dostupno $p \to q$ i p:

$$\begin{array}{r|ll} h & p \to q & \\ i & p & \\ j & q & h, i \text{ i } \to \end{array}$$

To smo pravilo primijenili u našem uvodnom primjeru dokaza u redcima 4 i 5. Dodajmo još jedan primjer:

$$\{(Q \land R) \to S,\ Q \land (P \land R)\} \vdash P \land S$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|ll} 1 & (Q \land R) \to S & \\ 2 & \underline{Q \land (P \land R)} & \\ 3 & P \land R & 2 \text{ i}\land \\ 4 & P & 3 \text{ i}\land \\ 5 & Q & 2 \text{ i}\land \\ 6 & R & 3 \text{ i}\land \\ 7 & Q \land R & 5, 6 \text{ u}\land \\ 8 & S & 1, 7 \text{ i} \to \\ 9 & P \land S & 4, 8 \text{ u}\land \end{array}$$

Uočimo i u tome dokazu mogućnosti drugoga redoslijeda u izvođenju.

Pravilo za **isključenje dvopogodbe** sasvim je slično pravilu isključenja pogodbe, s time što je primjenljivo kako s lijeva na desno, tako i s desna na lijevo. To je sasvim razumljivo jer se dvopogodba svodi na dvije pogodbe (s lijeva na desno i s desna na lijevo), što je lako *semantički* provjeriti.

$$\begin{array}{r|ll} h & p \leftrightarrow q & \\ i & p & \\ j & q & h, i \text{ i } \leftrightarrow \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|ll} h & p \leftrightarrow q & \\ i & p & \\ j & q & h, i \text{ i } \leftrightarrow \end{array}$$

PRIMJER 3.2

$$\{A \leftrightarrow (B \wedge C), (B \leftrightarrow C) \wedge D, D \rightarrow B\} \vdash A$$

Dokaz

1	$A \leftrightarrow (B \wedge C)$	
2	$(B \leftrightarrow C) \wedge D$	
3	$D \rightarrow B$	
4	D	2 i$\wedge$
5	B	3, 4 i $\rightarrow$
6	$B \leftrightarrow C$	2 i$\wedge$
7	C	6, 5 i $\leftrightarrow$
8	$B \wedge C$	5, 7 u$\wedge$
9	A	1, 8 i $\leftrightarrow$

VJEŽBA 3.1 *Pokušajte isti dokaz izvesti nekim drugim redoslijedom!*

Uvođenje disjunkcije i opetovanje

Uvođenje je **disjunkcije** vrlo jednostavno pravilo na koje se u izvođenju često zaboravlja. *Semantički* gledano, ako je istinit jedan disjunkt, istinita je i disjunkcija s bilo kojim drugim disjunktom. Gledano prema *obliku*: iz disjunkta se izvodi disjunkcija.

$$\begin{array}{r|ll} h & p & \\ i & p \vee q & h \text{ u}\vee \end{array} \qquad ili: \qquad \begin{array}{r|ll} h & q & \\ i & p \vee q & h \text{ u}\vee \end{array}$$

Prikažimo uporabu toga pravila na primjeru!

$$\{(A \vee D) \rightarrow (B \vee C), D \leftrightarrow (C \vee F), F\} \vdash (B \vee C) \vee (H \vee E)$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & (A \vee D) \to (B \vee C) & \\
2 & D \leftrightarrow (C \vee F) & \\
3 & \underline{F} & \\
4 & C \vee F & 3 \text{ u}\vee \\
5 & D & 2,4 \text{ i } \leftrightarrow \\
6 & A \vee D & 5 \text{ u}\vee \\
7 & B \vee C & 1,6 \text{ i } \to \\
8 & (B \vee C) \vee (H \vee E) & 7 \text{ u}\vee
\end{array}
$$

Opetovanje je najjednostavnije pravilo, prema kojem neki iskaz možemo izvesti iz njega samoga jednostavno ga opetujući:

$$
\begin{array}{r|ll}
h & p & \\
i & p & h \text{ op}
\end{array}
$$

Iako se opetovanje može činiti suvišnim, ono nam može, kako ćemo malo poslije vidjeti u nekim primjerima, znatno pomoći u dedukciji.

3.1.2 PODDOKAZ

Složeni dokazi sadrže i cijele dokaze kao svoje poddokaze. Stoga prikaz složenoga dokaza ima **više od jedne uspravne crte**. To će odmah biti jasnije na sljedećim pravilima i primjerima.

Uvođenje pogodbe i dvopogodbe

Pogledajmo najprije kako u dokazu uvodimo **pogodbu**:

$$
\begin{array}{r|ll}
h & \begin{array}{|l} \underline{p} \end{array} & \\
i & \begin{array}{|l} q \end{array} & \\
j & p \to q & h\text{–}i \text{ u } \to
\end{array}
\quad \text{sadrži ovaj poddokaz :} \quad
\begin{array}{r|l}
h & \underline{p} \\
i & q
\end{array}
$$

Vidimo da pravilo u→ traži otvaranje novoga dokaza unutar već opstojećega dokaza – dakle traži poddokaz s vlastitom, poddokaznom pretpostavkom p. Desno smo izdvojeno prikazali sam poddokaz. Pravilo u→ neformalno možemo ovako opisati: ako se iz pretpostavke p izvodi q, vrijedi pogodba $p \to q$.

Primjer 3.3 *Prikažimo to pravilo na primjeru* čistoga hipotetičnoga silogizma, *koji u našem deduktivnome sustavu nije osnovni oblik zaključivanja, nego se raščlanjuje na jednostavnije korake.*

$$\{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|lll}
1 & P \to Q & & \\
2 & \underline{Q \to R} & & \\
3 & \quad \vert\ \underline{P} & & \\
4 & \quad \vert\ Q & & 1,3 \text{ i} \to \\
5 & \quad \vert\ R & & 2,4 \text{ i} \to \\
6 & P \to R & & 3\text{–}5 \text{ u} \to
\end{array}$$

U retku 6 ***pozivljemo se na poddokaz kao cjelinu*** *(3–5), a ne na pojedine retke poddokaza. Razlog je tomu taj što smo u retku 6 napustili sam poddokaz i njegovu pretpostavku i vratili se u glavni dokaz izvan poddokaza. To ćemo bolje razjasniti na idućem primjeru.*

Uvedimo prije novoga primjera neka razlikovanja. Poddokaz sadrži vlastite pretpostavke – možemo ih zvati **potpretpostavkama**, i valja ih razlikovati od **glavnih** pretpostavaka čitava dokaza. Također, poddokaz ima svoju, **poddokaznu** uspravnu crtu, koju valja razlikovati od **glavne** uspravne crte.

Primjer 3.4

$$\{(P \leftrightarrow R) \land (R \to Q),\ (P \to Q) \to Q\} \vdash Q$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|lll}
1 & (P \leftrightarrow R) \land (R \to Q) & & \\
2 & \underline{(P \to Q) \to Q} & & \\
3 & P \leftrightarrow R & & 1 \text{ i}\land \\
4 & \quad \vert\ \underline{P} & & \\
5 & \quad \vert\ R & & 3,4 \text{ i} \leftrightarrow \\
6 & \quad \vert\ R \to Q & & 1 \text{ i}\land \\
7 & \quad \vert\ Q & & 6,5 \text{ i} \to \\
8 & P \to Q & & 4\text{–}7 \text{ u} \to \\
9 & Q & & 2,8 \text{ i} \to
\end{array}$$

U gornjem primjeru jasno možemo uočiti kako su potpretpostavke ***podređene*** *glavnim pretpostavkama. Osvrnimo se na sljedeća tri aspekta.*

a) U retku 6, u poddokazu, mogli smo se pozvati na glavnu pretpostavku 1, a u retku 5 i na iskaz 3, izveden samo pomoću glavnih pretpostavaka. Razlog je taj što ***glavne pretpostavke u poddokazu i dalje vrijede****.*

b) No u redcima 8 ili 9 poddokaz i njegova potpretpostavka napušteni su. Vratili smo se u glavni dokaz izvan poddokaza, gdje vrijede opet samo glavne pretpostavke. Stoga npr. nismo Q mogli izvesti u retku 8 opetovanjem retka 7. Naglasimo još jednom da ***potpretpostavke u glavnom dokazu izvan poddokaza više ne vrijede****.*

c) Ipak, u retku 8 pozvali smo se na poddokaz kao cjelinu (redci 4–7). To je moguće zato jer je ***poddokaz kao cjelina*** *dio glavnoga dokaza i kao takav stoji samo pod glavnim pretpostavkama dokaza, i ni pod kojim drugim potpretpostavkama. Dakle,* ***u glavnom dokazu izvan poddokaza poddokaz vrijedi samo kao cjelina****.*

Ključno je stoga, na temelju analize podređenosti pretpostavaka u dokazu u gornjem primjeru (3.3), u redcima unutar dokaza razlikovati **dostupne** od **nedostupnih pretpostavaka**. Dostupne su one koje vrijede u dotičnome retku, a nedostupne one koje u dotičnome retku ne vrijede. U našem primjeru, u redcima od 1 do 3 dostupne su pretpostavke iz redaka 1 i 2. U redcima od 4 do 7 dostupne su pretpostavke iz redaka 1, 2 i 4 (potpretpostavka). U redcima 8 i 9 dostupne su pretpostavke iz redaka 1 i 2.

Na jednak način razlikuju se općenito **dostupni** i **nedostupni redci** i **poddokazi**. Npr. u retku 8 nedostupan je redak 7, ali je kao cjelina dostupan poddokaz koji se nalazi u redcima 4–7. Iskaze i poddokaze treba doslovce vezivati **uz retke** jer se može dogoditi da se jedan te isti iskaz nalazi u nekom retku iz kojega je dostupan, kao i u nekom retku iz kojega je nedostupan. To ćemo vidjeti uskoro, na sljedećem primjeru dokaza. Prije toga, definirajmo točno što mislimo pod dostupnošću retka i poddokaza.

Definicija 3.3 (Dostupnost retka) *Redak m dostupan je u retku n ako i samo ako sve pretpostavke koje vrijede u retku m, vrijede i u retku n.*

DEFINICIJA 3.4 (DOSTUPNOST PODDOKAZA) *Poddokaz h-i dostupan je u retku n ako i samo ako sve pretpostavke koje vrijede u poddokazu h-i, osim onih koje se nalaze u redcima h-i, vrijede i u retku n.*

Prema naravi **dvopogodbe**, pri njezinu uvođenju postupamo kao da uvodimo dvije pogodbe. Stoga postavljamo sljedeće pravilo:

$$\begin{array}{r|lll}
h & \vert\ \underline{p} & & \\
i & \vert\ q & & \\
 & & & \\
j & \vert\ \underline{q} & & \\
k & \vert\ p & & \\
l & p \leftrightarrow q & h\text{–}i,\ j\text{–}k \text{ u } \leftrightarrow &
\end{array}$$

Pravilo u$\leftrightarrow$ rabi se u sljedećem dokazu:

$$\{A \rightarrow B, A\} \vdash A \leftrightarrow (C \rightarrow B)$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|ll}
1 & A \rightarrow B & \\
2 & \underline{A} & \\
3 & \vert\ \underline{A} & \\
4 & \vert\ \vert\ \underline{C} & \\
5 & \vert\ \vert\ B & 1, 3 \text{ i } \rightarrow \\
6 & \vert\ C \rightarrow B & 4\text{–}5 \text{ u } \rightarrow \\
 & & \\
7 & \vert\ \underline{C \rightarrow B} & \\
8 & \vert\ A & 2 \text{ op} \\
9 & A \leftrightarrow (C \rightarrow B) & 3\text{–}6, 7\text{–}8 \text{ u } \leftrightarrow
\end{array}$$

Kao što smo već najavili, uočimo da je u glavnome dokazu izvan svih poddokaza iskaz ‘A’ koji se nalazi u retku 2, dostupan, a ‘A’ koji se nalazi u retku 3 nedostupan.

Važno je također primijetiti da unutar prvoga poddokaza imamo još jedan dokaz – **potpoddokaz** sa svojom **potpotpretpostavkom**. O odnosu potpoddokaza prema njemu nadređenu poddokazu vrijedi sve isto kao i o odnosu poddokaza i glavnoga dokaza. Iz toga je shvatljiv i odnos potpoddokaza prema samome glavnom dokazu. Jer npr. ako je potpotpretpostavka iz retka 4 nedostupna u retku 6 poddokaza, nedostupna i u retku 9 glavnoga dokaza. Potpoddokaz 4–5 dostupan je u retku 6 poddokaza, ali nije više dostupan u retku 9 glavnoga dokaza.

Primijetimo da, u skladu s definicijom 3.4 dostupnosti poddokaza, ne možemo, primjerice, uvoditi pogodbu u glavnome dokazu na temelju podpoddokaza, nego samo na temelju poddokaza. No pogodbu možemo uvesti na temelju podpoddokaza u poddokaz.

Prethodni je primjer dokaza prikladan da napomenemo nešto i o **iznalaženju dokaza** (kako izgraditi dokaz). Sam oblik postavke već mnogo govori o tome kako bi dokaz mogao izgledati ako ćemo primijeniti pravilo u↔. Dokaz će imati ovaj lik:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & A \to B & \\
2 & \underline{A} & \\
3 & \quad \underline{A} & \\
 & \quad \vdots & \\
 & \quad C \to B & 4\text{–}5 \text{ u} \to \\
 & & \\
 & \quad \underline{C \to B} & \\
 & \quad \vdots & \\
 & \quad A & 2 \text{ op} \\
 & A \leftrightarrow (C \to B) & 3\text{–}6, 7\text{–}8 \text{ u} \leftrightarrow
\end{array}
$$

Nadalje, vidimo da će u prvome poddokazu biti potrebno uvesti pogodbu pa uvodimo **potpoddokaz**. Izgled dokaza sada je još razrađeniji:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1 & A \to B & \\
2 & \underline{A} & \\
3 & \quad \vert\; \underline{A} & \\
4 & \quad \vert\; \quad \vert\; \underline{C} & \\
 & \quad \vert\; \quad \vert\; \vdots & \\
 & \quad \vert\; \quad \vert\; B & 1, 3 \text{ i} \to \\
 & \quad \vert\; C \to B & 4\text{–}5 \text{ u} \to \\
 & & \\
 & \quad \vert\; \underline{C \to B} & \\
 & \quad \vert\; \vdots & \\
 & \quad \vert\; A & 2 \text{ op} \\
 & A \leftrightarrow (C \to B) & 3\text{–}6, 7\text{–}8 \text{ u} \leftrightarrow
\end{array}
$$

Lako vidimo da B u potpoddokazu možemo dobiti pravilom i$\to$ iz redaka 1 i 2 (ili 1 i 3), a A u drugome retku jednostavno opetovanjem retka 2. Time dovršujemo cijeli dokaz, kako je prvobitno i prikazan.

Općenito, dokaz možemo graditi polazeći, s jedne strane, **od cilja**, a s druge strane, **od pretpostavaka**, postupno popunjavajući i smanjujući međuprostor.

Isključenje disjunkcije

Pravilo isključenja disjunkcije kaže da, ako se iz obaju disjunkata p i q izvodi r, onda r proizlazi i iz same disjunkcije.

$$
\begin{array}{r|l|l}
h & p \lor q & \\
i & \quad \vert\; \underline{p} & \\
j & \quad \vert\; r & \\
 & & \\
k & \quad \vert\; \underline{q} & \\
l & \quad \vert\; r & \\
m & r & h, i\text{–}j, k\text{–}l \text{ i}\lor
\end{array}
$$

Primjer 3.5

$$\{(F \wedge G) \vee H, F \rightarrow H\} \vdash H$$

Dokaz

1	$(F \wedge G) \vee H$	
2	$\underline{F \rightarrow H}$	
3	$\mid \underline{F \wedge G}$	
4	$\mid F$	3 i$\wedge$
5	$\mid H$	2, 4 i $\rightarrow$
6	$\mid \underline{H}$	
8	$\mid H$	6 *op*
9	H	1, 3–5, 6–8 i$\vee$

w

3.1.3 NEIZRAVNI DOKAZ

Neizravni dokaz sadrži izvođenje protuslovlja iz pretpostavke. Rabi se u pravilu uvođenja i isključenja nijeka.

Prema pravilu **uvođenja nijeka**, u¬, iskaz iz kojega se izvodi protuslovlje, možemo zanijekati.

h	$\mid \underline{p}$	
i	$\mid q$	
j	$\mid \neg q$	
k	$\neg p$	h–j u¬

Pogledajmo na sljedećem primjeru kako je *modus tollens* tradicionalnoga hipotetičnoga zaključka u deduktivnome sustavu koji prikazujemo, samo jedan izvedeni oblik zaključivanja.

Primjer 3.6

$$\{A \rightarrow B, \neg B\} \vdash \neg A$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & A \to B & & \\
2 & \neg B & & \\
3 & \quad A & & \\
4 & \quad B & & 1,3 \text{ i} \to \\
5 & \quad \neg B & & 2\ op \\
6 & \neg A & & 3\text{–}5 \text{ u}\neg
\end{array}
$$

Slično je i pravilo **isključenja nijeka,** gdje se također zaključuje pomoću protuslovlja.

$$
\begin{array}{r|ll}
h & \quad \neg p & \\
i & \quad q & \\
j & \quad \neg q & \\
k & p & h\text{–}j \text{ i}\neg
\end{array}
$$

Primjer 3.7

$$\{\neg Q \to Q\} \vdash Q$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \neg Q \to Q & \\
2 & \quad \neg Q & \\
3 & \quad Q & 1,2 \text{ i} \to \\
4 & \quad \neg Q & 2\ op \\
5 & Q & 2\text{–}4 \text{ i}\neg
\end{array}
$$

Primijetimo da smo u retku 5 mogli primijeniti i pravilo u¬ te izvesti $\neg\neg Q$.

3.2 VALJANOST, NESUVISLOST I ISTOVRIJEDNOST

U deduktivnome sustavu možemo provjeravati je li neki zaključak ili iskaz valjan, je li neki skup iskaza suvisao i jesu li iskazi istovrijedni. Svi ti pojmovi, kao i sama dokažljivost, sada imaju samo sintaktičko, formalno značenje, iako odgovaraju semantičkim odnosima u iskaznoj logici (no to je potrebno posebno dokazati u metateoriji).

3.2.1 SINTAKTIČNA VALJANOST I POUČAK

DEFINICIJA 3.5 (SINTAKTIČNA VALJANOST ZAKLJUČKA) *Zaključak je sintaktički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak dokažljiv iz skupa koji se sastoji od premisa toga zaključka.*

Svi dosadašnji primjeri dokaza također su i primjeri deduktivne provjere zaključka iz premisa na zaglavak – ako glavne pretpostavke dokaza shvatimo kao premise, a postavku kao zaglavak.

PRIMJER 3.8 *Evo i primjera silogizma poznatoga iz tradicionalne logike. Provjerimo deduktivno zaključak:*

$$
\begin{array}{l}
P \rightarrow (Q \vee R) \\
\neg Q \wedge \neg R \\
\hline
\neg P
\end{array}
$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & P \rightarrow (Q \vee R) & \\
2 & \underline{\neg Q \wedge \neg R} & \\
3 & \quad | \underline{P} & \\
4 & \quad | Q \vee R & 1, 3 \text{ i} \rightarrow \\
5 & \quad | \quad | \underline{Q} & \\
6 & \quad | \quad | Q & 5 \; op \\
 & \quad | & \\
7 & \quad | \quad | \underline{R} & \\
8 & \quad | \quad | \quad | \underline{\neg Q} & \\
9 & \quad | \quad | \quad | \neg R & 2 \text{ i} \wedge \\
10 & \quad | \quad | \quad | R & 7 \; op \\
11 & \quad | \quad | Q & 8\text{–}10 \text{ i} \neg \\
12 & \quad | Q & 4, 5\text{–}6, 7\text{–}11 \text{ i} \vee \\
13 & \quad | \neg Q & 2 \text{ i} \wedge \\
14 & \neg P & 3\text{–}13 \text{ u} \neg
\end{array}
$$

DEFINICIJA 3.6 (POUČAK) *Iskaz p jest poučak ako i samo ako je p dokažljiv iz praznoga skupa iskaza.*

Definirajuću surečenicu iz gornje definicije kraće pišemo ovako: $\vdash p$. Poučak se često nazivlje i teoremom. Možemo ga zvati i sintaktički valjanim iskazom. Pojmu poučka u semantici odgovara pojam semantički valjanoga iskaza.

PRIMJER 3.9 *Dokažimo da je $\neg(P \land \neg P)$ poučak. To je zakon neprotuslovlja na primjeru iskaza P.*

$$\vdash \neg(P \land \neg P)$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \vert\ \underline{P \land \neg P} & & \\
2 & \vert\ P & & 1\ \mathrm{i}\land \\
3 & \vert\ \neg P & & 1\ \mathrm{i}\land \\
4 & \neg(P \land \neg P) & & 1\text{–}3\ \mathrm{u}\neg
\end{array}
$$

Gornji dokaz nema glavnih pretpostavaka, nego odmah počinje potpretpostavkom, koja se u retku 4 napušta. Dokazana postavka ne stoji u dokazu, dakle, ni pod jednom pretpostavkom, tj. dokažljiva je bez pretpostavaka.

Pogledajmo i sljedeći primjer.

PRIMJER 3.10

$$\vdash \neg P_1 \to (P_1 \to P_2)$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \vert\ \underline{\neg P_1} & \\
2 & \vert\ \vert\ \underline{P_1} & \\
3 & \vert\ \vert\ \vert\ \underline{\neg P_2} & \\
4 & \vert\ \vert\ \vert\ P_1 & 2\ \mathit{op} \\
5 & \vert\ \vert\ \vert\ \neg P_1 & 1\ \mathit{op} \\
6 & \vert\ \vert\ P_2 & 3\text{–}5\ \mathrm{i}\neg \\
7 & \vert\ P_1 \to P_2 & 2\text{–}6\ \mathrm{u} \to \\
8 & \neg P_1 \to (P_1 \to P_2) & 1\text{–}7\ \mathrm{i}\neg
\end{array}
$$

Dakle, dokazana je postavka poučak. Možemo, dakle, pisati: $\vdash \neg P_1 \to (P_1 \to P_2)$.

U idućem stavku navodimo neke oblike poučaka koji se u iskaznoj logici najčešće rabe.

Stavak 3.2

$\vdash p \to (q \to p)$	
$\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	
$\vdash (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$	
$\vdash \neg p \to (p \to q)$	
$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$	
$\vdash p \vee \neg p$	*Zakon isključenoga srednjega*
$\vdash \neg(p \wedge \neg p)$	*Zakon neprotuslovlja*
$\vdash \neg(p \to p)$	*Zakon istovjetnosti*
$\vdash (p \to q) \vee (q \to p)$	

Dokaz Svi se poučci, tj. njihovi opći oblici, dokazuju posebnim općim oblikom dokaza. Ovo je opći dokaz za $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$:

$$
\begin{array}{r|llll}
1 & \quad | \underline{\;p \to (q \to r)\;} & & & \\
2 & \quad | \quad | \underline{\;p \to q\;} & & & \\
3 & \quad | \quad | \quad | \underline{\;p\;} & & & \\
4 & \quad | \quad | \quad | \; q & & & 2, 3 \text{ i } \to \\
5 & \quad | \quad | \quad | \; q \to r & & & 1, 3 \text{ i } \to \\
6 & \quad | \quad | \quad | \; r & & & 4, 5 \text{ i } \to \\
7 & \quad | \quad | \; p \to r & & & 3\text{–}6 \text{ u } \to \\
8 & \quad | \; (p \to q) \to (p \to r) & & & 2\text{–}7 \text{ i } \to \\
9 & (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) & & & 1\text{–}8 \text{ u } \to
\end{array}
$$

Vježba 3.2 *Dokažite i ostale oblike poučaka iz stavka 3.2.*

3.2.2 NESUVISLOST

DEFINICIJA 3.7 (NESUVISAO SKUP) *Skup je iskaza Γ nesuvisao ako i samo ako je iz njega dokažljivo p i $\neg p$.*

Definiens se kraće može zapisati ovako: $\Gamma \vdash p, \neg p$.

Tomu semantički odgovara nezadovoljiv skup iskaza. Nesuvislost se često nazivlje i nekonsistentnošću.

PRIMJER 3.11

$$\{R \to \neg R, \neg R \to R\} \vdash \bot$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|l|ll}
1 & R \to \neg R & & \\
2 & \underline{\neg R \to R} & & \\
3 & & \underline{R} & \\
4 & & \neg R & 1, 3 \text{ i} \to \\
5 & & R & 3\ op \\
6 & \neg R & & 3\text{–}5 \text{ u}\neg \\
7 & R & & 2, 6 \text{ i} \to \\
 & \bot & &
\end{array}
$$

Znakom $\bot$ bilježimo da je iz skupa pretpostavaka dobiveno protuslovlje, neki iskaz p i njegov nijek $\neg p$. Iskaz je **suvisao** ako i samo ako nije nesuvisao.

STAVAK 3.3 *Ako skup Γ nesuvisao, iz Γ je dokažljiv bilo koji iskaz p.*

Dokaz Ako je Γ nesuvisao, tj. iz Γ je dokažljivo protuslovlje $q, \neg q$, onda se i u poddokazu pod pomoćnom pretpostavkom $\neg p$ može izvesti $q, \neg q$, te se zatim u glavnome dokazu prema pravilu i$\neg$ može dokazati p. Evo opće sheme takva dokaza:

$$
\begin{array}{l}
\text{Neka } \Gamma \vdash q, \neg q \\
\begin{array}{|l}
\underline{\Gamma} \\
\begin{array}{|ll}
\underline{\neg p} & \\
q & \text{jer } \Gamma \vdash q, \neg q \\
\neg q & \text{jer } \Gamma \vdash q, \neg q
\end{array} \\
p \qquad\quad \text{i}\neg
\end{array}
\end{array}
$$

Podrazumijevamo da je u dokaz unesen neki konačan podskup skupa Γ.

STAVAK 3.4 *Ako je skup* Γ *nesuvisao, nesuvisao je i svaki njegov nadskup.*

Dokaz Gornji stavak neposredno proizlazi iz stavka 3.1, prema kojem sve što je dokažljivo iz Γ, dokažljivo je i iz bio kojega njegova nadskupa Δ.

Vrijedi i sljedeći

STAVAK 3.5 $\Gamma \vdash p$ *ako i samo ako je* $\Gamma \cup \{\neg p\}$ *nesuvislo.*

Dokaz Stavak dokazujemo dvjema općim **shemama dokaza**. Prema prvoj se na temelju $\Gamma \vdash p$ pokazuje da je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvisao, a prema drugoj se na temelju nesuvislosti $\Gamma \cup \{\neg p\}$ pokazuje da $\Gamma \vdash p$.

$$
\begin{array}{l}
\text{Neka } \Gamma \vdash p \\
\begin{array}{|ll}
\Gamma & \\
\underline{\neg p} & \\
p & \text{jer } \Gamma \vdash p \\
\neg p & \text{op} \\
\bot &
\end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\text{Neka je } \Gamma \cup \{\neg p\} \text{ nesuvisao} \\
\begin{array}{|l}
\underline{\Gamma} \\
\begin{array}{|ll}
\underline{\neg p} & \\
q & \text{jer je } \Gamma \cup \{\neg p\} \text{ nesuvisao} \\
\neg q & \text{jer je } \Gamma \cup \{\neg p\} \text{ nesuvisao}
\end{array} \\
p \qquad\quad \text{i}\neg
\end{array}
\end{array}
$$

Podrazumijevamo da je u dokaz unesen neki konačan podskup skupa Γ.

VJEŽBA 3.3 *Dokažite nesuvislost skupa* $\{P \wedge Q, (P \to R) \wedge (R \to \neg Q)\}$*!*

3.2.3 SINTAKTIČKA ISTOVRIJEDNOST

DEFINICIJA 3.8 (SINTAKTIČKA ISTOVRIJEDNOST, $\dashv\vdash$) *Iskazi p i q jesu sintaktički istovrijedni (kraće $p \dashv\vdash q$) ako i samo ako je q dokažljivo iz $\{p\}$, a p dokažljivo iz $\{q\}$.*

Definiens kraće zabilježen glasi ovako: $\{p\} \vdash q$ i $\{q\} \vdash p$.

PRIMJER 3.12 *Provjerimo istovrijednost iskazâ $P \rightarrow Q$ i $\neg P \vee Q$. Potrebna su nam, prema definiciji sintaktičke istovrijednosti, dva dokaza kojima ćemo pokazati da $\{P \rightarrow Q\} \vdash \neg P \vee Q$ i $\{\neg P \vee Q\} \vdash P \rightarrow Q$.*

$$\{P \rightarrow Q\} \vdash \neg P \vee Q, \quad \{\neg P \vee Q\} \vdash P \rightarrow Q$$

Dokaz

1	$\mid\underline{\ P \rightarrow Q\ }$	
2	$\mid\ \mid\underline{\ \neg(\neg P \vee Q)\ }$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\underline{\ \neg P\ }$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg P \vee Q$	3 u$\vee$
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg P \vee Q)$	2 op
6	$\mid\ \mid\ P$	3–5 i$\neg$
7	$\mid\ \mid\ Q$	1, 6 u $\rightarrow$
8	$\mid\ \mid\ \neg P \vee Q$	7 u$\vee$
9	$\mid\ \mid\ \neg(\neg P \vee Q)$	2 op
10	$\mid\ \neg P \vee Q$	2–9 i$\neg$

1	$\mid\underline{\ \neg P \vee Q\ }$	
2	$\mid\ \mid\underline{\ \neg P\ }$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\underline{\ P\ }$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\underline{\ \neg Q\ }$	
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ P$	3 *op*
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg P$	2 *op*
7	$\mid\ \mid\ \mid\ Q$	4–5 i$\neg$
8	$\mid\ \mid\ P \rightarrow Q$	3–7 u $\rightarrow$
9	$\mid\ \mid\underline{\ Q\ }$	
10	$\mid\ \mid\ \mid\underline{\ P\ }$	
11	$\mid\ \mid\ \mid\ Q$	9 *op*
12	$\mid\ \mid\ P \rightarrow Q$	10–11 u $\rightarrow$
12	$\mid\ P \rightarrow Q$	1, 2–8, 9–12 i$\vee$

Dvama dokazima pokazali smo da su iskazi $P \rightarrow Q$ i $\neg P \vee Q$ sintaktički istovrijedni.

U sljedećem stavku dajemo popis nekih najpotrebnijih i najpoznatijih oblika sintaktičkih istovrijednosti.

STAVAK 3.6

$p \rightarrow q \dashv\vdash \neg p \vee q$	*zakon svođenja* $\rightarrow$
$p \leftrightarrow q \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	*zakon svođenja* $\leftrightarrow$
$\neg\neg p \dashv\vdash p$	*zakon svođenja dvostrukoga nijeka*
$p \wedge q \dashv\vdash q \wedge p$	*zakon izmjenitosti za* $\wedge$
$p \vee q \dashv\vdash q \vee p$	*zakon izmjenitosti za* $\vee$
$(p \wedge q) \wedge r \dashv\vdash p \wedge (q \wedge r)$	*zakon udruživosti za* $\wedge$
$(p \vee q) \vee r \dashv\vdash p \vee (q \vee r)$	*zakon udruživosti za* $\vee$
$p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*zakon raspodjeljivosti* $\wedge$ *na* $\vee$
$p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	*zakon raspodjeljivosti* $\vee$ *na* $\wedge$
$\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$	*De Morganov zakon*
$\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg p \wedge \neg q$	*De Morganov zakon*
$p \wedge p \dashv\vdash p$	*zakon idempotentnosti*
$p \vee p \dashv\vdash p$	*zakon idempotentnosti*
$p \wedge (p \vee q) \dashv\vdash p$	*zakon apsorpcije*
$p \vee (p \wedge q) \dashv\vdash p$	*zakon apsorpcije*
$p \wedge (q \vee \neg q) \dashv\vdash p$	*zakon pokrate*
$p \vee (q \wedge \neg q) \dashv\vdash p$	*zakon pokrate*
$p \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$	*zakon razvoja*
$p \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$	*zakon razvoja*.

Dokaz Neke smo primjere gornjih istovrijednosti već dokazali. Inače, svi su navedeni oblici istovrijednosti dokažljivi odgovarajućim općim oblikom dokaza. Evo npr. općega dokaza za $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$:

$$
\begin{array}{rlll}
1 & \vert\ \underline{p \vee (q \wedge r)} & & \\
2 & \vert\ \vert\ \underline{p} & & \\
3 & \vert\ \vert\ p \vee q & & 2\ \mathrm{u}\vee \\
4 & \vert\ \vert\ p \vee r & & 2\ \mathrm{u}\vee \\
5 & \vert\ \vert\ (p \vee q) \wedge (p \vee r) & & 3, 4\ \mathrm{u}\wedge \\
 & \vert & & \\
6 & \vert\ \vert\ \underline{q \wedge r} & & \\
7 & \vert\ \vert\ q & & 6\ \mathrm{i}\wedge \\
8 & \vert\ \vert\ p \vee q & & 7\ \mathrm{u}\vee \\
9 & \vert\ \vert\ r & & 6\ \mathrm{i}\wedge \\
10 & \vert\ \vert\ p \vee r & & 9\ \mathrm{u}\vee \\
11 & \vert\ \vert\ (p \vee q) \wedge (p \vee r) & & 8, 10\ \mathrm{u}\wedge \\
12 & \vert\ (p \vee q) \wedge (p \vee r) & & 1, 2\text{–}5, 6\text{–}11\ \mathrm{u}\vee
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
1 & \vert\ \underline{(p \vee q) \wedge (p \vee r)} & & \\
2 & \vert\ p \vee q & & 1\ \mathrm{i}\wedge \\
3 & \vert\ \vert\ \underline{p} & & \\
4 & \vert\ \vert\ p \vee (q \wedge r) & & 3\ \mathrm{u}\vee \\
 & \vert & & \\
5 & \vert\ \vert\ \underline{q} & & \\
6 & \vert\ \vert\ p \vee r & & 1\ \mathrm{i}\wedge \\
7 & \vert\ \vert\ \vert\ \underline{p} & & \\
8 & \vert\ \vert\ \vert\ p \vee (q \wedge r) & & 7\ \mathrm{u}\vee \\
 & \vert\ \vert & & \\
9 & \vert\ \vert\ \vert\ \underline{r} & & \\
10 & \vert\ \vert\ \vert\ q \wedge r & & 5, 9\ \mathrm{u}y\wedge \\
11 & \vert\ \vert\ \vert\ p \vee (q \wedge r) & & 10\ \mathrm{u}\vee \\
12 & \vert\ \vert\ p \vee (q \wedge r) & & 6, 7\text{–}8, 9\text{–}11\ \mathrm{i}\vee \\
13 & \vert\ p \vee (q \wedge r) & & 2, 3\text{–}4, 5\text{–}13\ \mathrm{i}\vee
\end{array}
$$

VJEŽBA 3.4 *Dokažite i ostale oblike istovrijednosti iz stavka 3.6.*

3.3 KANONSKI DOKAZ

Prema načinu kako smo prikazali dokazivanje, uspjeh dokazivanja neke postavke često ovisi o našoj spretnosti i iskustvu u postavljanju dokaza. No postupak se dokazivanja može kanonski propisati tako da, držeći se propisanoga postupka, sigurno ćemo pronaći dokaz, ako dokaz opstoji.

Pretpostavka za primjenu kanonskoga dokaza, kako ćemo ga u nastavku opisati, jest da svi iskazi od kojih polazi dokaz budu u **disjunktivnome normalnome obliku**. To se u našem dokaznome sustavu uvijek može postići, ali se posao svođenja na disjunktivni oblik može skratiti ako se jednostavno pozivljemo na u prethodnome odjeljku navedeno **sintaktične istovrijednosti**. Jednom dokazane, nije ih potrebno iznova dokazivati svaki put kad nam u dokazu ustrebaju.

PRIMJER 3.13 *Pripremimo za primjenu kanonskoga dokaza sljedeći zaključak:*

$$\begin{array}{l} (P \vee Q) \wedge \neg R \\ \neg(P \vee S) \\ Q \rightarrow T \\ \hline T \end{array}$$

Prva premisa, primjenom zakona izmjenitosti i raspodjeljivosti, pretvara se u sjedeću:

$$(\neg R \wedge P) \vee (\neg R \wedge Q),$$

druga premisa, primjenom De Morganova zakona, postaje premisom:

$$\neg P \wedge \neg S,$$

a treća premisa, prema zakonu svođenja pogodbe, pretvara su u

$$\neg Q \vee T.$$

Za kanonski nam je dokaz potreban i nijek zaglavka (kao u istinitosnome stablu), a $\neg T$ je, bez pretvorbe, već u disjunktivnome normalnome obliku.

Kanonski je dokaz dokaz nesuvislosti zadanoga skupa pretpostavaka.

U kanonskome dokazu polazimo od (jedne) disjunkcije te pod jednim i drugim disjunktom, težimo izvesti protuslovlje (p i $\neg p$). Pritom se pod jednim i drugim disjunktom na jednak način služimo drugim disjunkcijama (ako ih ima), te dobivenim ili u pretpostavkama sadržanim konjunkcijama slovnih iskaza, iz kojih prema pravilu i$\wedge$ izvodimo slovne iskaze.

U jezik uvodimo pokratu $\perp$ za neko protuslovlje (npr. $P \wedge \neg P$). Provjerite da se iz bilo kojega protuslovlje dade izvesti $\perp$ ($P \wedge \neg P$)! Stoga možemo, kao pokratu dokazivanja, uvesti i pravilo u$\perp$:

$$\begin{array}{r|ll} h & p & \\ i & \neg p & \\ j & \perp & h, i \text{ u}\perp \end{array}$$

Pravilo isključenja $\perp$ je jednostavno pravilo po kojem, ako je u dokazu izvedeno $\perp$, može se izvesti bilo koji iskaz p:

$$\begin{array}{r|ll} h & \perp & \\ i & p & h \text{ i}\perp \end{array}$$

Dobijemo li iz obaju polaznih disjunkata protuslovlje, sto bilježimo znakom $\perp$, iz same se disjunkcije izvodi protuslovlje (u skladu s pravilom i$\vee$, i dokazana je nesuvislost cijeloga polaznoga skupa. Jasno, ako se pod nekim disjunktom isključuju nove disjunkcije, i pod svakim od tih novih disjunkata težimo dobiti protuslovlje. Ne dobivamo li pod disjunktima protuslovlje, nastavljamo dokaz sve dok nismo iz svih konjunkata izveli sve slovne iskaze, te time, ne dobivši protuslovlje barem pod jednim početnim disjunktom, dokazujemo suvislost polaznoga skupa pretpostavaka.

Ako u pretpostavkama nema nijedne disjunkcije, samo prema pravilu i$\wedge$ iz konjunkcija izvodimo slovne iskaze sve dok ne dobijemo protuslovlje ili ne iscrpimo sve konjunkte.

Dokažljivost $\Gamma \vdash p$ provjeravamo kanonskim dokazom iz članova skupa Γ i $\neg p$, jer, kako je već dokazano, $\Gamma \vdash p$ ako i samo ako je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvislo.

PRIMJER 3.14 *Dokažimo valjanost zaključka koji je u prošlome primjeru pripremljen i pretvoren u disjunktivni normalni oblik! (Desno, u zagradama,* *bilježimo i odakle je izvedeno protuslovlje).*

1	$(\neg R \wedge P) \vee (\neg R \wedge Q)$	
2	$\neg P \wedge \neg S$	
3	$\neg Q \vee T$	
4	$\neg T$	
5	$\neg R \wedge P$	
6	P	5 i$\wedge$
7	$\neg P$	2 i$\wedge$
8	$\perp$	6, 7 u$\perp$
9	$\neg R \wedge Q$	
10	$\neg Q$	
11	Q	8 i$\wedge$
12	$\neg Q$	9 *op*
13	$\perp$	11, 12 u$\perp$
14	T	
15	T	12 *op*
16	$\neg T$	4 *op*
17	$\perp$	15, 16 u$\perp$
18	$\perp$	9–13, 14–17 i$\vee$
19	$\perp$	5–8, 9–18 i$\vee$

VJEŽBA 3.5

1. *Pretvorite sljedeće iskaze u (što kraći) disjunktivni normalni oblik, služeći se istovrijednostima iz stavka 3.6:*

   (a) $R \wedge (P \to Q)$,

   (b) $(P \to Q) \wedge (Q \wedge R)$,

   (c) $(P_1 \leftrightarrow P_2) \wedge (Q \to R)$.

2. *Pretvorite iskaze dobivene u prethodnome zadatku u potpun disjunktivni normalni oblik, služeći se zakonom razvoja!*

3. *Provjerite kanonskim dokazom tvrdnju* $\{(Q \lor \neg R) \to P, \neg(\neg Q \land R)\} \vdash P$*!*

4. *Provjerite kanonskim dokazom valjanost ovoga zaključka:*

$$\begin{array}{l} (P \leftrightarrow \neg Q) \land R \\ (R \to \neg Q) \land \neg S \\ \hline P \land \neg S \end{array}$$

3.4 PRIJEGLED DEFINICIJA

U donjem prijegledu već danih definicija ‘akko’ je skraćeno za ‘ako i samo ako’.

1. **Dokaz.** Dokaz je konačan niz iskaza od kojih je svaki pretpostavka ili izvedeni iskaz.

2. **Dokažljivost ($\vdash$).** $\Gamma \vdash p$ akko ima dokaz iskaza p iz pretpostavaka koje su članovi skupa Γ.

3. **Sintaktična valjanost zaključka.** Zaključak je sintaktički valjan akko je njegov zaglavak dokažljiv iz premisa toga zaključka.

4. **Poučak.** Iskaz p jest poučak akko $\vdash p$.

5. **Nesuvisao skup.** Skup je iskaza Γ nesuvisao akko $\Gamma \vdash \bot$.

6. **Sintaktična istovrijednost ($\dashv\vdash$).** $p \dashv\vdash q$ akko $\{p\} \vdash q$ i $\{q\} \vdash p$.

Dio II

LOGIKA PRVOGA REDA

U iskaznoj logici, u sintaksi, iskaze smo raščlanjivali samo toliko, koliko su i same njihove sastavnice bile iskazi, uz poveznike i zagrade - do jednostavnih (atomarnih) iskaza. U semantici smo pak kao osnovicu uzeli izravno pridruživanje istinitosnih vrijednosti jednostavnim iskazima.

U logici prvoga reda, kako smo već u *Uvodu* nagovijestili, sam ćemo jednostavni iskaz raščlaniti na sastavnice koje više nisu iskazi. Ući ćemo dublje u ustroj samoga iskaza i u logičke korijene istinitosti. Pomoću logike prvoga reda govorit ćemo o predmetima, te zaključivati na temelju njihovih svojstava i odnosa. Predmeti će se javljati samo na jednoj razini (pojedinačni predmeti), dok se njihova svojstva i odnosi ne će kao takvi smatrati predmetima, tj. ne ćemo se baviti svojstvima i odnosima samih svojstava i odnosa – otuda i naziv logika prvoga reda. Općenito se logika u kojoj se predmetima pririču (prediciraju) svojstva i odnosi nazivlje piročnom (predikatnom) logikom.

U skladu ćemo s time proširiti logički jezik. Jezik kojim ćemo se služiti u logici prvoga reda nazvat ćemo $\mathscr{L}_p$ i njegov ćemo opis dati, kao i za $\mathscr{L}_i$, prema obziru na izraze (sintaksa) i prema obziru na značenja (semantika). Na temelju toga ćemo definirati posljedični odnos za logiku prvoga reda, koji ćemo zatim formalno prikazati pomoću odgovarajućega deduktivnoga sustava.

Poglavlje 4

JEZIK I ISTINA U LOGICI PRVOGA REDA

4.1 SINTAKSA JEZIKA $\mathscr{L}_p$

4.1.1 RJEČNIK

U odnosu na jezik $\mathscr{L}_i$, rječnik je proširen **novim** simbolima - prirocima, predmetnim konstantama i varijablama te količiteljnim simbolima. Evo cijeloga popisa osnovnih simbola:

1. **Predmetne (individualne) konstante**. To su mala latinična slova od c do e s pozitivnim cijelim pokazateljima ili bez njih:

   $$c, d, e, c_1, \ldots$$

   Predmetne konstante slične su imenima u hrvatskome jeziku. Pri prevođenju s hrvatskoga možemo neformalno uporabiti i druga mala latinična slova (osim p, q, r i x, y, z). Tako npr. za 'Marko' možemo upotrijebiti slovo m, za 'Hrvatska' konstantu h i sl. Konstante možemo rabiti i za bilo koji pojedinačan predmet koji u hrvatskome i sličnim jezicima nema vlastito ime (npr. i za ovaj stol, ovo računalo i sl.). Nije obvezna upotreba prvoga slova odgovarajućega hrvatskoga imena.

2. **Predmetne (individualne) varijable**. To su mala latinična slova x, y i

z s pozitivnim cijelim pokazateljima ili bez njih:

$$x, y, z, x_1, \ldots$$

Predmetne su varijable slične hrvatskim odnosnim zamjenicama. Omogućuju upućivanje na isti pojedinačan predmet (o tom malo poslije).

3. **Priroci** (predikati). To su velika latinična slova od P do R sa ili bez pozitivnoga cijeloga donjega pokazatelja i s pozitivnim cijelim gornjim pokazateljem.

$$P^1, Q^1, R^1, P^1_1, \ldots, P^2, \ldots$$

Neformalno je katkad pogodno rabiti i druga velika latinična slova, osobito pri prevođenju hrvatskih rečenica na $\mathscr{L}_p$. Primjerice, 'C^1 može stajati za hrvatski izraz '__ jest čovjek'. A prirok 'V^2 za izraz '__ je veći od __'. Piročno slovo ne mora odgovarati prvomu slovu hrvatskoga izraza. Gornji pokazatelj priroka označuje broj **praznih mjesta** koje prirok ima uza se. Vidjet ćemo kojim se logičkim simbolima ta prazna mjesta ispunjaju. Prema obziru na broj praznih mjesta razlikujemo **jednomjesni, dvomjesni, tromjesni** prirok itd. Tako je P^1 jednomjesni prirok, a P^2 dvomjesni. Općenito govorimo o ***n*-mjesnim** prirocima. *Neformalno* ćemo **ispuštati** gornje pokazatelje, gdjegod to ne povlači nejasnoće.

4. **Poveznici** (kao i u $\mathscr{L}_i$):

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

5. **Količiteljni simboli**:

$$\forall, \exists.$$

Prvoga možemo hrvatski čitati "svi" ("za svaki"), a drugoga "neki" ("barem za jedan").

6. **Razgodci (interpunkcija)**, kao i u $\mathscr{L}_i$:

$$(,).$$

Opisni su simboli priroci i predmetne konstante, a **logički** su simboli, uz poveznike (kao i u $\mathscr{L}_i$), količiteljni simboli i predmetne varijable. **Pomoćni** su simboli razgodci. Predmetne konstante i predmetne varijable zajednički nazivljemo **predmetnim simbolima**.

4.1.2 GRAMATIKA

Izraz se definira (analogno definiciji za $\mathscr{L}_i$) kao konačan niz osnovnih simbola jezika $\mathscr{L}_p$. Također razlikujemo **pojavke** izraza od samih izraza (analogno kao i u iskaznoj logici).

U metajeziku rabit ćemo i **metavarijable**, koje kao svoje vrijednosti poprimaju izraze jezika $\mathscr{L}_p$. To će biti, kao i u $\mathscr{L}_i$,

$$p, q, r, p_1.$$

Također ćemo (u metajeziku) rabiti i metavarijable kao što su, primjerice, sljedeće: $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ za priroke, $\mathrm{c}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots$ za predmetne konstante, $\mathrm{t}, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots$ općenito za predmetne simbole, a $\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots$ za predmetne varijable.

Sada dajemo **tvorbena pravila**, kojima određujemo koji su izrazi formule (obrazice) ili, drukčije rečeno, koje su formule pravilno tvorene. Za razliku od $\mathscr{L}_i$, u $\mathscr{L}_p$ nisu sve formule iskazi.

Najprije definiramo što je to **jednostavna** (atomarna) **formula** u jeziku $\mathscr{L}_p$:

Definicija 4.1 (Jednostavna formula) *Ako je* P *prirok, a* $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{n}$ *predmetni simboli,* $\mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_\mathrm{n}$ *jest jednostavna formula.*

Tj. svaki *n*-mjesni prirok za kojim slijedi niz od *n* predmetnih simbola, jest jednostavna formula. Pritom ispuštamo gornje priročne pokazatelje. Jednostavna formula prema gornjoj definiciji jest, primjerice, formula Px, što možemo čitati ovako: x je P. Ta formula može stajati npr. za hrvatski ‘neodređeni predmet x je pravedan’. Prema istoj je definiciji tvorena i formula Rcx (čitajmo:

“ce je er od iks”), primjerice, za hrvatski ‘Krk je zapadno od neodređenoga predmeta *x*’.

Sada definiramo što je to **formula** uopće:

DEFINICIJA 4.2 (FORMULA) *Skup formula je najmanji skup izraza izgrađenih prema sljedećim pravilima:*

1. *Svaka jednostavna formula jest formula.*

2. *Ako je p formula, $\neg p$ je formula.*

3. *Ako su p i q formule, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ i $(p \leftrightarrow q)$ jesu formule.*

4. *Ako je p formula a* x *varijabla,* $\forall \mathrm{x} p$ *i* $\exists \mathrm{x} p$ *su formule.*

Jednostavnu formulu i nijek jednostavne formule nazivljemo (slično kao u iskaznoj logici) **slovnim formulama**, formule prema pravilima 2) i 3) jesu **sastavljene formule**. Formule oblika $\forall \mathrm{x} p$ jesu **opće** (i to jesne opće) formule. Primjerice, $\forall xPxc$ može stajati za hrvatski ‘Svatko poznaje Antuna’ (gdje c stoji za ‘Antun’). Formule oblika $\exists \mathrm{x} p$ jesu **opstojne** (i to jesne opstojne) formule. Takva je, primjerice, $\exists xPcx$ koja može biti prijevod za hrvatski ‘Antun poznaje nekoga’.

Posebno možemo razlikovati i **jesne** od **niječnih općih** formula ($\forall \mathrm{x} p$ od $\neg\exists \mathrm{x} p$), kao i **jesne** od **niječne opstojnih** formula ($\exists \mathrm{x} p$ od $\neg\forall \mathrm{x} p$).

Izraz oblika $\forall$x ili $\exists$x jest **količitelj** (kvantifikator). Primjerice, $\forall x$ jest **opći** količitelj, i možemo ga čitati ovako:

> za svaki predmet *x* vrijedi da...

Izraz $\exists x$ jest **opstojni** količitelj, i možemo ga čitati ovako:

> opstoji barem jedan predmet *x* za koji vrijedi da...,

ili “ima barem jedan predmet *x* za koji vrijedi da...”. Od primjera do primjera način se čitanja može prilogađavati pa i pojednostavnjivati.

Kažemo da količitelj **sadrži** varijablu: $\forall x$ sadrži varijablu *x*, $\exists$z sadrži varijablu *z* i sl.

Poveznike i količitelje zajednički nazivljemo **djelateljima** (operatorima).

Osim već definiranih **jednostavnih** formula razlikujemo **sastavljene** (molekularne) formule – formule tvorene prema pravilima 2) i 3) definicije formule, te **pokoličene** (kvantificirane) formule – formule tvorene prema pravilu 4) definicije formule.

Za jezik $\mathscr{L}_p$ (kao i za $\mathscr{L}_i$) vrijedi dogovor o neformalnom ispuštanju **vanjskih** okruglih zagrada i neformalnoj uporabi **uglatih**.

Pogledajmo sljedeći primjer formule:

$$\forall x(Pxy \lor \exists y(\neg Qy \to Rxc)).$$

Ta je formula tvorena prema pravilima iz gornje definicije formule na sljedeći način:

1. cijeli je izraz formula prema pravilu 4), jer je $Pxy \lor \exists y(\neg Qy \to Rxc)$ formula,
2. $Pxy \lor \exists y(\neg Qy \to Rxc)$ je formula prema pravilu 3), jer su Pxy i $\exists y(\neg Qy \to Rxc)$ formule,
3. Pxy je formula prema pravilu 1),
4. $\exists y(\neg Qy \to Rxc)$ je formula prema pravilu 4), jer je $\neg Qy \to Rxc$ formula,
5. $\neg Qy \to Rxc$ je formula prema pravilu 3), jer su $\neg Qy$ i Rxc formule,
6. $\neg Qy$ je formula prema pravilu 2), jer je Qy formula,
7. Qy je formula prema pravilu 1),
8. Rxc je također formula prema pravilu 1).

Sljedeće su definicije usporedne onima za jezik $\mathscr{L}_i$, samo što je sada, u $\mathscr{L}_p$, umjesto o iskazima i podiskazima, riječ o formulama i podformulama.

DEFINICIJA 4.3 (PODFORMULA) *Podformula je dio formule koji je također formula.*

Cijelu formulu također smatramo njezinim dijelom.

Definicija 4.4 (Doseg pojavka djelatelja) *Doseg pojavka djelatelja jest najkraća podformula koja sadrži taj pojavak.*

Na primjer, u formuli oblika $\forall x\, p$ ili $\exists x p$ doseg količitelja čini cijela formula $\forall x p$ odnosno $\exists x p$. Uvježbajmo to na nekolikim primjerima.

Primjer 4.1

1. *U formuli $\forall x\, Rxy$ doseg količitelja $\forall x$ jest čitava formula;*
2. *u formuli $\forall x\, (Px \wedge Qx)$ doseg količitelja $\forall x$ jest čitava formula;*
3. *u formuli $\forall x\, Px \wedge Qx$ dosegu količitelja $\forall x$ jest podformula $\forall x\, Px$; cijela formula, strogo zapisano, glasi: $(\forall x\, Px \wedge Qx)$, gdje zagrade pokazuju doseg poveznika $\wedge$, dakle jasno pokazujući da je cijela formula konjunkcija, a pokoličena formula samo jedan konjunkt;*
4. *u formuli $Px \to \forall x\, Rxy$ doseg količitelja $\forall x$ jest podformula $\forall x\, Rxy$.*

Važno je u gornjim primjerima uočiti važnost zagrada za određivanje količiteljeva dosega.

Definicija 4.5 (Glavni pojavak djelatelja) *Glavni pojavak djelatelja u podformuli p jest pojavak djelatelja takav da je p doseg toga pojavka.*

Govorit ćemo, kako je uobičajeno, o "glavnome djelatelju", umjesto o "glavnome pojavku djelatelja".

U sastavljenim je formulama glavni djelatelj poveznik, a u pokoličenima količitelj. U gore analiziranoj formuli $\forall x(Pxy \vee \exists y(\neg Qy \to Rxc))$ glavni je djelatelj $\forall x$, u njezinoj podformuli $Pxy \vee \exists y(\neg Qy \to Rxc)$ glavni je djelatelj $\vee$, Pxy nema djelatelja, u $\exists y(\neg Qy \to Rxc)$ glavni je djelatelj $\exists y$, itd.

Definicija 4.6 (Neposredna podformula) *Neposredna podformula definira se na sljedeći način:*

1. *U formulama oblika $\neg p$, neposredna je podformula p.*
2. *U formulama oblika $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$ i $p \leftrightarrow q$, neposredne su podformule p i q.*

3. *U formulama oblika* $\forall \mathrm{x} p$ *i* $\exists \mathrm{x} p$*, neposredna je podformula* p*.*

Da bismo mogli odrediti koja je formula iskaz, potrebno je razlikovati slučaje kada se varijabla javlja vezano ili slobodno: vezani i slobodan pojavak varijable. Kraće, ali manje precizno, može se govoriti i o vezanim i slobodnim varijablama.

DEFINICIJA 4.7 (VEZAN I SLOBODAN POJAVAK VARIJABLE)

1. *Pojavak varijable* x *u formuli* p *jest* vezan *ako i samo ako je taj pojavak u dosegu količitelja za* x*.*

2. *Pojavak varijable* x *u formuli* p *jest* slobodan *ako i samo ako taj pojavak nije vezan.*

Uočimo da je pojavak varijable u samome količitelju vezan. Količitelj $\forall \mathrm{x}$ u formuli $\forall \mathrm{x} p$ veže varijablu x u $\forall \mathrm{x}$ i svaki slobodan pojavak varijable x u formuli p. – Analogno vrijedi i za količitelj $\exists \mathrm{x}$, koji u formuli $\exists \mathrm{x} p$ veže varijablu x u $\exists \mathrm{x}$ i svaki slobodan pojavak varijable x u formuli p.

Pritom, ako u p nema slobodnoga pojavka varijable koju sadrži količitelj, govorimo o **praznom** pokoličavanju. To je slučaj u sljedećim formulama:

$$\forall y(Pc \rightarrow \forall yRc_1y)$$
$$\exists \mathrm{z}(Rxc \vee Qc_1).$$

DEFINICIJA 4.8 (ISKAZ) *Formula* p *jest iskaz ako i samo ako u* p *nema nijednoga slobodnoga pojavka varijabla.*

To je **zatvorena** formula. Formula koja sadrži barem jedan slobodan pojavak predmetne varijable, jest **otvorena** formula.

Razlikovanje jednostavnih, slovnih, sastavljenih te pokoličenih općih (jesnih i niječnih) i opstojnih (jesnih i niječnih) formula primijenjujemo i na iskaze.

Koje su od formula navedenih u primjeru 4.1 iskazi?

Upozorimo da podformule u iskazu ne moraju biti podiskazi (kao u iskaznoj logici). Tako u pokoličenome iskazu $\forall \mathrm{x} p$ ili $\exists \mathrm{x} p$, p ne mora biti podiskaz, nego može biti, i to je karakteristično, otvorena formula. Npr. u iskazu

$\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ vidimo da je $(Px \rightarrow Qx)$ otvorena podformula sa slobodnom varijablom x, koju u $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$ veže količitelj $\forall x$.

Pokoličena formula može imati svoj **supstitucijski primjer** (supstitucijska instancija). Supstitucijski primjer dobivamo u dva koraka:

1. ispustimo količitelj $\forall$x u $\forall$xp, odnosno $\exists$x u $\exists$xp,

2. zamijenimo svaki slobodan pojavak varijable x u p predmetnom konstantom c.

Dobiveni supstitucijski primjer ima oblik p(c/x) (čitajmo: “*pe* s *ce* za *iks*”). Izabranu konstantu c nazivljemo **oprimjerujućom konstantom** (instancirajućom konstantom).

Npr. formula $\forall yRyc$ ima supstitucijske primjere: Rdc, Rd_1c, Rd_2c itd. $\forall yRyc$ može stajati, primjerice, za hrvatsku rečenicu ‘Svi su brojevi djeljivi s 1’ (uzmimo da govorimo samo o pozitivnim cijelim brojevima). Supstitucijski primjeri tada glase: ‘1 je djeljiv s 1’, ‘2 je djeljivo s 1’ itd.

Isto tako, formula $\forall x(Px \vee \exists yRyx)$ ima supstitucijske primjere $Pc \vee \exists yRyc$, $Pc_1 \vee \exists yRyc_1$, $Pd \vee \exists yRyd$ itd. Ali supstitucijski primjer navedene formule nije, primjerice, $Pc \vee Rdc$ jer je tu izvršena i supstitucija za varijablu y.

Napomenimo da u slučaju kad je pokoličavanje u formuli $\forall$xp **prazno** (u p se ne javlja x), supstitucijski primjer p(c/x) jednak je p (jer količitelj je ispušten i poštovano je pravilo da, ako ima koji slobodan pojavak varijable x, zamijenjen je s c). Jednako je tako u slučaju praznoga pokoličavnja supstitucijski primjer za $\exists$xp jednak p.

4.1.3 HRVATSKE REČENICE I ISKAZI U $\mathscr{L}_p$

Valja naglasiti da pojam priroka, kako smo ga definirali za logički jezik $\mathscr{L}_p$, ne odgovara sasvim pojmu priroka u gramatici hrvatskoga (i sličnih) jezika. Tu se prirok najčešće uzimlje kao dio rečenice, a ne kao vrsta riječi. U samome se gramatičkom podmetu (subjektu) hrvatske rečenice često nalazi neki logički prirok. Npr. u ‘Svi su ljudi smrtni’ podmet ‘čovjek’ sadrži prirok ‘__ je čovjek’. Kažemo da hrvatska rečenica ‘Split je veći od Rijeke’ ima jedan gramatički podmet (subjekt), ‘Split’, dok bi u logičkoj analizi bilo primjerenije govoriti o dvama (logičkim) podmetima: ‘Split’ i ‘Rijeka’, koji ispunjuju dva prazna mjesta dvomjesnoga priroka ‘___ je veći od ___’.

Zamjenice u hrvatskom i predmetne varijable u $\mathscr{L}_p$ imaju sličnu ulogu međusobno povezanoga upućivanja na isti predmet. Npr. $\exists xNx$ možemo čitati: opstoji barem jedan predmet x **koji** je N; $\forall yVyd$ možemo čitati: za svaki predmet y vrijedi da je (on) *Ve* od *de*.

4.2 SEMANTIKA JEZIKA $\mathscr{L}_p$

U logici prvoga reda, kao što već možemo nazrijeti iz sintakse, u kojoj ulazimo u dublji ustroj iskazâ, istinitosna vrijednost iskazâ ne će ovisjeti, gledom na opisne simbole, samo o pridruživanju vrijednosti iskaznim slovima nego i o pridruživanju vrijednosti i drugim, novouvedenim opisnim simbolima. Stoga ćemo u ovome poglavlju prvo postaviti pojam **modela**, primjerenoga jeziku $\mathscr{L}_p$ u kojem se vrjednuju novouvedeni simboli što ih nema u jeziku $\mathscr{L}_i$. Zatim ćemo, najprije na jednostavniji, ne sasvim formalan način, vidjeti kako se istinitosna vrijednost pridružuje svakomu iskazu jezika $\mathscr{L}_p$, a to ćemo naposljetku pokazati i na formalan (strog), ali malo složeniji način.

4.2.1 MODELI

Model, $\mathfrak{M}$, u logici prvoga reda čine dva člana:

1. predmetno područje o kojem je riječ (domena), D,
2. tumačenje prvoga reda, $\mathcal{T}$, kojim se određuje značenje opisnih simbola (predmetnih konstanata i priroka).

U zadanim slučajima rabit ćemo i neformalan pojam tumačenja prvoga reda, prema kojem ćemo uzeti u obzir samo vrijednosti onih predmetnih konstanata i priroka koji se javljaju u iskazima koje razmatramo. Na sličan smo način rabili i neformalan pojam osnovnoga tumačenja u iskaznoj logici. Gdje nema opasnosti od nesporazuma, govorit ćemo samo o “tumačenju”, misleći na “tumačenje prvoga reda”.

Kako u modelu jasno razlikujemo prvi po redu o drugoga člana, model možemo definirati kao *uređen* par u kojem je prvi član predmetno područje, D, a drugi član tumačenje prvoga reda, $\mathcal{T}$. Općenito, uređen skup, u kojem je bitan poredak članova (za razliku od neuređenoga skupa) označivat ćemo šiljastim zagradama, unutar kojih su navedeni članovi skupa određenim poretkom. Stoga model $\mathfrak{M}$ možemo jednostavno ovako definirati:

$$\mathfrak{M} = \langle \mathrm{D}, \mathcal{T} \rangle.$$

Zadržimo se sada najprije na pojmu predmetnoga područja, a zatim na pojmu tumačnja prvoga reda, kako bismo na kraju mogli dati raščlanjenu definiciju modela u logici prvoga reda.

PREDMETNO PODRUČJE

Prvi član modela je predmetno područje (domena, univerzum diskursa, svemir rasprave) o kojem govorimo, D. To je skup predmeta na koji se odnose količitelji: ∀x se odnosi na sve predmete predmetnoga područja, a ∃x se odnosi barem na jedan predmet predmetnoga područja. Predmetno područje mora uključivati barem jedan predmet. Dakle:

predmetno područje, D, jest neprazan skup.

Predmetno područje mogu činiti, primjerice, svi ljudi, sva živa bića, svi prirodni brojevi, svi predmeti, ljudi u ovoj zgradi, stanovnici Hrvatske i sl. Član predmetnoga područja označivat ćemo u našem metajeziku simbolom ‘d’.

Izbor predmetnoga područja možemo na početku prikaza modela ovako pribilježiti:

D: naselja,

misleći pritom da je D skup svih naselja, što se formalno obično ovako bilježi:

{d | d je naselje}.

Slično, i kad govorimo običnim jezikom uvijek podrazumijevamo neko predmetno područje. Kad, primjerice, nastavnik u sveučilišnome kolegiju iz logike kaže da su svi uspješno riješili zadanu vježbu, misli na sve studente u kolegiju iz logike (a ne, npr., na sve ljude uopće).

TUMAČENJE PRVOGA REDA

Tumačenje prvoga reda određuje značenje svih predmetnih konstanata i svih priroka jezika $\mathscr{L}_p$. Predmetne konstante uvijek znače određeni pojedinačan predmet iz predmetnoga područja, a priroci svojstvo ili odnos:

1. predmetna konstanta, c: član predmetnoga područja,
2. prirok, P: svojstvo ili odnos.

Zadržimo se najprije na tumačenju predmetnih konstanata, a zatim na tumačenju priroka. Pritom ćemo, prema prijašnjem dogovoru, rabiti i druga slova osim onih koja su formalno propisana u rječniku jezika $\mathscr{L}_p$.

Tumačenje predmetnih konstanata Dodajmo prethodno određenomu predmetnomu području tumačenje predmetnih konstanata:

D: naselja,
c: Rijeka,
d: Split.

Predmetna konstanta označuje pojedinačan predmet. Kažemo da tumačenje prvoga reda pridružuje svakoj predmetnoj konstanti jezika $\mathscr{L}_p$ član predmetnoga područja. Tj.

$\mathcal{T}(\mathrm{c}) \in \mathrm{D}$.

Prema tome, u našem tumačenju vrijedi:

$\mathcal{T}(c) =$ Rijeka,
$\mathcal{T}(d) =$ Split.

Kažemo da se predmetna konstanta odnosi (da referira) na predmet (član predmetnoga područja). Kažemo također da predmetna konstanta označuje (designira) neki predmet (ili: da ga imenuje).

Ništa ne priječi da (slično kao i u hrvatskome) i u $\mathscr{L}_p$ više predmetnih konstanata označuje jedan te isti predmet (da jedan te isti predmet ima više imena). Npr.

$\mathcal{T}(d)$ = Split,
$\mathcal{T}(e)$ = Split.

Ali jedna predmetna konstanta ne može u $\mathscr{L}_p$ označivati više od jednoga predmeta. $\mathcal{T}$ je jednoznačna funkcija, a takvim bismo pridruživanjem dobili višeznačnost. Dakle, ne možemo, primjerice, *d* uporabiti i za Split i za Pulu.

Predmetne su konstante u mnogome slične vlastitim imenima u hrvatskome jeziku. No dok u hrvatskome (i u sličnim jezicima) ne imenujemo svaki kamen ili svaki stol, u $\mathscr{L}_p$ je sasvim obično i takve predmete označivati predmetnim konstantama. Nadalje, za razliku od $\mathscr{L}_p$, u hrvatskom se jeziku događa da se jedno te isto ime odnosi na više predmeta – npr. više osoba može imati isto ime i prezime, iako je nakana imenovati uvijek samo jedan predmet. Također, u hrvatskome ime ne mora označivati opstojeći predmet. Tako možemo, primjerice, govoriti o Homeru (da je pjesnik, da je spjevao *Ilijadu*, *Odiseju*, *Margita* itd.), a da uopće nismo sigurni opstoji li Homer (makar to bila i prošla opstojnost), je li to neki stvarni predmet ili nije.

Tumačenje prirokâ Proširimo naš primjer modela tumačenjem nekih priroka:

D: naselja,
c: Rijeka,
d: Split,
G^1: ___ je grad,
V^2: ___ je veći od ___ ,
M^2: ___ je manji od ___,
I^3: ___ je između ___ i ___

Primijetimo da jednomjesni priroci znače svojstva, obilježja pojedinih predmeta (“velik”, “grad”), a višemjesni priroci višečlane odnose. Tako je odnos “veći” uvijek odnos između dvaju predmeta, a odnos “između” uvijek odnos između triju predmeta.

Općenito kažemo da tumačenje prvoga reda svakomu n-mjesnomu priroku pridružuje n-članu relaciju (uključujući i slučaj kad $n = 1$).

U našem primjeru dvomjesnomu priroku V^2, kao njegovo značenje, pridružena je dvočlana relacija "veći". Riječ je o relaciji između dvaju predmeta od kojih je uvijek prvi veći od drugoga. Priroku I^3 pridružena je kao njegovo značenje tročlana relacija "između". To je relacija između triju predmeta od kojih je uvijek prvi između drugoga i trećega.

Primijetimo da sljedeći parovi gradova

$$\langle \text{Split, Rijeka} \rangle, \langle \text{Zagreb, Zadar} \rangle, \langle \text{Beč, Graz} \rangle, \langle \text{Rim, Napulj} \rangle$$

jesu u relaciji "veći", a da parovi gradova

$$\langle \text{Rijeka, Split} \rangle, \langle \text{Zadar, Zagreb} \rangle, \langle \text{Graz, Beč} \rangle, \langle \text{Napulj, Rim} \rangle$$

jesu u relaciji "manji". Uočimo da je bitno koji je grad u paru stavljen na prvo, a koji na drugo mjesto. Par $\langle$Split, Rijeka$\rangle$ pripada relaciji "veći", ali nije u relaciji "manji". Relaciji "manji" pripada par $\langle$Rijeka, Split$\rangle$, ali ne par $\langle$Split, Rijeka $\rangle$

Sveukupno, prirok V^2 u našem gornjem tumačenju znači relaciju "veći", a nju čine svi uređeni parovi naselja takvi da je prvo naselje veće od drugoga, dakle, sljedeći skup uređenih parova:

$$\{\langle \text{Split, Rijeka} \rangle, \langle \text{Zagreb, Zadar} \rangle, \langle \text{Beč, Graz} \rangle, \langle \text{Rim, Napulj} \rangle, \ldots\}.$$

Taj skup uređenih parova možemo općenito ovako zabilježiti:

$$\{\langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 \rangle \mid \mathrm{d}_1 \text{ je veći od } \mathrm{d}_2\}.$$

Slično, prirok I^3 u gornjem tumačenju znači relaciju "između", a nju čine sve uređene trojke naselja takve da je prvo naselje između drugoga i trećega, dakle, sljedeći skup uređenih trojaka:

$$\{\langle \text{Karlovac, Zagreb, Rijeka} \rangle, \langle \text{Karlovac, Zagreb, Split} \rangle, \langle \text{Rijeka, Karlovac, Pula} \rangle, \ldots\}.$$

Općenito možemo taj skup ovako zapisati:

$$\{\langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3 \rangle \mid \mathrm{d}_1 \text{ je između } \mathrm{d}_2 \text{ i } \mathrm{d}_3\}.$$

I pojedinačne predmete možemo shvatiti kao jednočlane uređene skupove. Stoga možemo reći da u tumačenje prvoga reda jednomjesni prirok znači jednočlanu relaciju, a nju čini skup uređenih jednočlanih skupova. Tako npr. G^1 u našem primjeru tumačenja znači skup:

$\{\langle \text{Rijeka} \rangle, \langle \text{Split} \rangle, \langle \text{Zagreb} \rangle, \langle \text{Beč} \rangle, \langle \text{Rim} \rangle, \ldots\}$,

umjesto čega možemo jednostavnije pisati:

$\{\text{Rijeka}, \text{Split}, \text{Zagreb}, \text{Beč}, \text{Rim}, \ldots\}$,

Određujući sada vrijednost (značenje) koje tumačenje prvoga reda pridružuje prirocima, možemo za navedene primjere zapisati:

$\mathcal{T}(G^1) = \{\mathrm{d} \mid \mathrm{d} \text{ je grad}\}$,
$\mathcal{T}(V^2) = \{\langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 \rangle \mid \mathrm{d}_1 \text{ je veći od } \mathrm{d}_2\}$,
$\mathcal{T}(M^2) = \{\langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2 \rangle \mid \mathrm{d}_1 \text{ je manji od } \mathrm{d}_2\}$,
$\mathcal{T}(I^3) = \{\langle \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3 \rangle \mid \mathrm{d}_1 \text{ je između } \mathrm{d}_2 \text{ i } \mathrm{d}_3\}$.

Ništa ne priječi da, primjerice, prvi i drugi član uređenoga para bude jedan te isti predmet. Npr.

$\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \ldots$

Navedeni parovi brojeva pripadaju relaciji "jednako", tj. prvi je član jednak drugomu.

Općenito, dvočlana relacija je skup uređenih parova, tročlana relacija je skup uređenih trojaka, četveročlana relacija je skup uređenih četvoraka, peteročlana relacija je skup uređenih petoraka, ..., *n*-člana relacija je skup uređenih *n*-toraka (uočimo isti nastavak u riječima 'dvojka', 'trojka', 'četvorka', 'petorka', 'šestorka', ..., '*n*-torka').

Svaki član uređene *n*-torke član je predmetnoga područja. Prema tome je svaka uređena *n*-torka član skupa koji je *n*-člani umnožak $D \times \ldots \times D$, kraće D^n. Stoga je skup uređenih *n*-toraka, tj. relacija, podskup skupa D^n. Slijedi da je vrijednost koju tumačenje $\mathcal{T}$ pridružuje *n*-članomu priroku, podskup skupa D^n:

$\mathcal{T}(\mathrm{P}^{\mathrm{n}}) \subseteq D^n$.

Kako skup svih podskupova nekoga skupa S (partitivni skup od S) bilježimo pomoú kao '$\wp S$', možemo, napokon, pisati:

$$\mathcal{T}(\mathrm{P}^{\mathrm{n}}) \in \wp D^n.$$

NAPOMENA 4.1 *Vrijednost pridružena jednomu te istomu priroku istoga neformalnoga značenja ('grad', 'veći') može biti od modela do modela različita, ovisno o predmetnom području. Npr. za razliku od modela u kojem predmetno područje čine gradovi, u modelu u kojemu predmetno područje čine države, prirok V^2 ima drugi opseg, naime, dvočlanu relaciju među državama (a ne među gradovima) takvu da je prva država veća od druge (primjerice, prema površini). Nadalje, priroku G^1 u značenju 'biti grad' u modelu s predmetnim područjem koje se sastoji od gradova, pridruženo je značenje cijelo predmetno područje, a u modelu s predmetnim područjem koje se sastoji od država, pridruženo mu je značenje prazan skup, $\varnothing$.*

NAPOMENA 4.2 *Primijetimo da je vrijednost koja je pridružena priroku, opseg (skup predmeta, uređenih n-toraka predmeta), a ne sadržaj (pojam, bit). Ne govorimo u semantici logike prvoga reda o biti grada, o tom što je to grad (i sl.), nego samo o tom na koje predmete primjenjujemo riječ 'grad'.*

Sada se možemo vratiti pojmu modela u logici prvoga reda te ga u potpunosti definirati:

DEFINICIJA 4.9 (MODEL, $\mathfrak{M}$) *Model, $\mathfrak{M}$, jest uređen par $\langle \mathrm{D}, \mathcal{T} \rangle$, gdje*

1. D *(predmetno područje) jest neprazan skup,*
2. $\mathcal{T}$ *(tumačenje prvoga reda) jest funkcija koja*
   (a) *svakoj predmetnoj konstanti pridružuje član predmetnoga područja* D*,*
   (b) *svakomu n-mjesnomu priroku pridružuje n-članu relaciju na* D*.*

Dodajmo da, kao što u iskaznoj logici jedan redak istinitosne tablice zapravo prikazuje beskonačno mnogo osnovnih tumačenja, tako i jedan opis modela prikazuje beskonačno mnogo modela. Svim je tim modelima zajedničko ono što je određeno opisom, a mogu se međusobno razlikovati prema tumačenju nenavedenih priroka i predmetnih konstanata. Neformalno ipak govorimo (u jednini) o jednom (opisanom) modelu.

Vježbe

1. Ispišite pet uređenih parova koji ulaze u opseg priroka Z^2 u sljedećem modelu:

   D: gradovi,
   Z^2: ___ je zapadno od ___.

4.2.2 ISTINITOST ISKAZÂ

Na temelju postavljenoga modela možemo odrediti istinitosnu vrijednost bilo kojega iskaza jezika $\mathscr{L}_p$. To ćemo najprije pokazati na pristupačniji i manje formalan način. Tek kad se na taj način uvježbamo u vrjednovanju i razumijevanju iskaza logike prvoga reda, dat ćemo u zasebnome poglavlju i strogu, formalnu definiciju istine za logiku prvoga reda.

Jednostavni iskazi

Jednostavnim iskazima logike prvoga reda istinitosnu vrijednost pridružujemo na temelju tumačenja prirokâ i predmetnih konstanata u nekome modelu. To da je neki iskaz p istinit u modelu $\mathfrak{M}$ bilježit ćemo na sljedeći način:

$$\mathfrak{M} \models p.$$

Evo, primjerice, modela $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{D}, \mathcal{T} \rangle$ s trima primjerima iskaza:

D: naselja,
c: Rijeka,
d: Split,
e: Zagreb,
G^1: ___ je grad,
V^2: ___ je veći od ___ .

PRIMJER 4.2 *Promotrimo iskaz:*

$$Gc.$$

Prema gornjem opisu, taj bismo iskaz hrvatski preveli rečenicom 'Rijeka je grad'.

*Iskaz 'Gc' jest u modelu $\mathfrak{M}$ **istinit** jednostavno zato jer je Rijeka grad, tj. jer je predmet Rijeka obilježen prirokom 'grad'. Strože rečeno, taj je iskaz istinit jer je Rijeka član skupa svih gradova, tj. $\mathcal{T}(c) \in \mathcal{T}(G^1)$.*

PRIMJER 4.3 *Pogledajmo iskaz:*

$$Vcd.$$

Prema tumačenju u našem zadanome modelu taj bismo iskaz hrvatski preveli rečenicom 'Rijeka je veća od Splita'.

*Iskaz 'Vcd' jest u modelu $\mathfrak{M}$ **neistinit** jer uređen par ⟨Rijeka, Split⟩ nije u relaciji "veći", tj. prvi grad nije veći od drugoga. Formalno to možemo ovako izraziti: ⟨Rijeka, Split⟩ $\notin \mathcal{T}(V^2)$.*

PRIMJER 4.4 *Promotrimo i iskaz*

$$Ved.$$

Prema tumačenju u našem modelu taj bismo iskaz hrvatski preveli rečenicom 'Zagreb je veći od Splita'.

*Iskaz Ved jest u modelu $\mathfrak{M}$ **istinit** jer uređen par ⟨Zagreb, Split⟩ pripada relaciji "veći", tj. prvi je predmet doista veći od drugoga. Formalno to možemo ovako zapisati ⟨Rijeka, Split⟩ $\in \mathcal{T}(V^2)$.*

Općenito možemo istinitost jednostavnoga iskaza u logici prvoga reda ovako definirati:

DEFINICIJA 4.10 (ISTINITOST JEDNOSTAVNIH ISKAZA) *Jednostavan je iskaz logike prvoga reda istinit u nekome modelu ako i samo ako uređen skup predmeta označenih konstantama iza priroka jest u relaciji označenoj tim prirokom. Tj.*

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{Pc}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \textit{ ako i samo ako } \langle \mathcal{T}(\mathrm{c}_1), \ldots, \mathcal{T}(\mathrm{c}_n) \rangle \in \mathcal{T}(\mathrm{P}^n).$$

Imajmo na umu da hrvatske rečenice kao, primjerice, ‘Homer je pjesnik’ (Aristotelov primjer) ne odgovaraju sasvim jednostavnim rečenicama jezika $\mathscr{L}_p$. Naime, ta hrvatska rečenica ne mora značiti da Homer opstoji, iako je to možda očekivanje, dok bismo u prijevodu na $\mathscr{L}_p$ (npr. s Ph) dobili iskaz koji jednoznačno upućuje na neki opstojeći predmet, član predmetnoga područja.

Sastavljeni iskazi

Opći način vrjednovanja sastavljenih iskaza $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ i $(p \leftrightarrow q)$ odgovara onomu u iskaznoj logici.

Evo primjera jednoga modela $\mathfrak{M}$:

D: 1, 2, 3, . . . ,
c_7: broj 7,
c_8: broj 8,
P^2: ___ je veće od ___ ,
Q_1^2: ___ je djeljivo s ___ ,
R^2: ___ je manje od ___ .

Je li iskaz

$$Qc_7c_8 \vee (Pc_8c_7 \leftrightarrow Rc_7c_8)$$

u modelu $\mathfrak{M}$ istinit? To možemo provjeriti istinitosnom tablicom ako znademo istinitosne vrijednosti svih podiskaza

Qc_7c_8	$\vee$	$(Pc_8c_7$	$\leftrightarrow$	$Rc_7c_8)$
n	**i**	**i**	**i**	**i**

Vrijednosti iskaza Qc_7c_8, Pc_8c_7 i Rc_7c_8 određujemo kako smo u prethodnome poglavlju pokazali za jednostavne iskaze. Cijela je disjunkcija u modelu $\mathfrak{M}$ (koji uključuje tumačenje $\mathcal{T}$) istinita.

Valja, dakle, držati na umu da se sada kao iskazne sastavnice mogu javiti jednostavni iskazi logike prvoga reda (kao u gornjem primjeru), sami sastavljeni iskazi, kao i pokoličeni iskazi (o kojima će upravo biti riječ).

Vježbe

Pokoličeni iskazi

U pokoličenim iskazima podformula koja se pridodaje količitelju (kao glavnomu djelatelju) samo je u netipičnom slučaju iskaz (prazno pokoličavanje), inače je to otvorena formula. A otvorena formula nema istinitosnu vrijednost jer tumačenje prvoga reda varijablama ne pridružuje nikakvu vrijednost.

Uzmimo, primjerice, iskaz $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Ne možemo ga raščlaniti na iskazne sastavnice tako da bismo, kad znamo istinitosnu vrijednost tih sastavnica, mogli odrediti i istinitosnu vrijednost cijeloga iskaza. U podformuli $Px \rightarrow Qx$ javlja se dva puta predmetna varijabla, koju ne tumačimo, pa joj vrijednost ostaje tumačenjem neodređena.

Neformalno ćemo uvesti pojam **zadovoljenosti** formule. Govorit ćemo o zadovoljenosti formule nekim predmetom i onda kad formula nema istinitosnu vrijednost. Npr. ako G^1 znači 'biti grad', otvorena je formula Gx zadovoljena gradom Dubrovnikom (kao vrijednošću varijable x), ali nije zadovoljena otokom Lokrumom (kao vrijednošću varijable x). Istinitosna će vrijednost pokoličenoga iskaza ovisjeti o zadovoljenosti podformule, pridodane glavnomu količitelju.

Zadovoljenost formule ćemo, u ovom nestrogome pristupu, određivati **po uzoru na istinitost**. Npr. predmet d zadovoljava formulu $Px \vee Qx$ ako i samo ako d zadovoljava bilo formulu Px bilo formulu Qx.

Razlikujmo zadovoljenost formule predmetom od *zadovoljivosti* tumačenjem prvoga reda (v. poglavlje *Očuvanje istine* za iskaznu logiku i za logiku prvoga reda).

Opći iskaz

DEFINICIJA 4.11 (ISTINITOST OPĆEGA ISKAZA) *Iskaz* $\forall \mathrm{x} p$ *jest u modelu* $\mathfrak{M}$ *istinit ako i samo ako svaki član predmetnoga područja* D *zadovoljava formulu* p *u tumačenju* $\mathcal{T}$.

Tu definiciju možemo prikazati u formatu istinitosnoga stabla. Pretpostavimo da je u nekome modelu istinit iskaz u oblika $\forall \mathrm{x} p$. To znači da, uzmemo li bilo koji predmet predmetnoga područja, i dademo li mu ime, npr. c, supstitucijski primjer $p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$ će također biti istinit:

$$\forall \mathrm{x} p \ ^{\mathrm{c}\checkmark}$$
$$p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$$

Primijetimo da uz $\forall \mathrm{x} p$ stoji samo kvačica s konstantom c. Time je naznačeno da zadovoljenost formule p jednim predmetom, označenim pomoću c, ne mora iscrpljivati istinitost općega iskaza, jer predmetno područje modela može imati i više od jednoga člana, i to kako konačno mnogo, tako i beskonačno mnogo članova. Kad se ispituje istinitost općega iskaza na već zadanome beskonačnome predmetnom području, pod općim se iskazom može unositi beskonačno mnogo supstitucijskih primjera. A kad je beskonačno predmetno područje čak nužan uvjet istinitosti općega iskaza, samo će stablo rezultirati beskonačnim brojem supstitucijskih primjera.

$$\forall \mathrm{x} p \ ^{\mathrm{c}_1\checkmark \mathrm{c}_2\checkmark \mathrm{c}_3\checkmark \ldots}$$
$$p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$$
$$p(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})$$
$$p(\mathrm{c}_3/\mathrm{x})$$
$$\vdots$$

No, ne zadovoljava li i samo jedan predmet formulu p, opći iskaz nije istinit. Zabilježimo pretpostavku da je opći iskaz neistinit tako da ga zaniječemo. Dodijelimo predmetu koji ne zadovoljava p neko *novo*, neuporabljeno ime c – ime mora biti *novo* jer njime želimo označiti “neki” predmet, neodređeno koji, kako bismo bili sigurni da ga nismo izjednačili s nekim već poznatim predmetom. No novim imenom jos uvijek dopuštamo i mogućnost da to bude upravo jedan od poznatih predmeta – u tom slučaju, taj je predmet, ako već ima neko ime, samo dobio još jedno, novo ime. Supstitucijski primjer s takvim c za x je neistinit:

$$\neg\forall \mathrm{x} p \ \checkmark$$
$$\neg p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$$

Sada smo stavili kvačicu jer je nezadovoljenost formule p jednim predmetom dostatan i nužan razlog nestinitosti općega iskaza.

PRIMJER 4.5 (ISTINITOST ISKAZA $\forall x Qxc_1$) *Ispitajmo pod kojim je uvjetima istinit iskaz* $\forall x Qxc_1$.

$\underline{1}$	$\forall x Qxc_1 \ ^{c_1 \checkmark}$	
2	Qc_1c_1	$1\forall$
3	$\bigcirc$	

Vidimo da je navedeni iskaz istinit u modelu u kojem svaki član predmetnoga područja stoji u nekoj relaciji označenoj pomoću 'Q^2' s predmetom označenim pomoću 'c'. Dovoljno je i jednočlano predmetno područje (kako pokazuje gornje stablo), gdje jedini član stoji u spomenutoj relaciji sam prema sebi. No to je, primjerice, slučaj i u sljedećem modelu $\mathfrak{M}$, *s pozitivnim cijelim brojevima (koji čine beskonačno predmetno područje):*

D: *1, 2, 3, . . . ,*
c_1: *broj 1*
Q_1^2: ___ *je djeljivo s* ___

Primijenimo li raščlambu općega iskaza na taj konkretni model, dobivamo sljedeće stablo:

$\underline{1}$	$\forall x Qxc_1 \ ^{c_1 \checkmark c_2 \checkmark c_3 \checkmark \ldots}$	
2	Qc_1c_1	$1\forall$
3	Qc_2c_1	$1\forall$
4	Qc_3c_1	$1\forall$
	$\vdots$	

U navedenome modelu, $\forall x Qxc_1$ *znači da je svaki pozitivan cijeli broj djeljiv s 1. Formalno, taj iskaz kaže da svaki pozitivan cijeli broj stoji u relaciji djeljivosti s brojem 1:*

$$\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \ldots \in \mathcal{T}(Q^2).$$

Kako vidimo, drugi član uređenih parova koje dobivamo, uvijek je broj 1. Kako je doista svaki pozitivan cijeli broj djeljiv s 1, iskaz je istinit.

PRIMJER 4.6 (NEISTINITOST ISKAZA $\forall x(Px \vee Qxc)$) *Ispitajmo pod kojim je uvjetima iskaz* $\forall x(Px \vee Dxc)$ *neistinit. To ćemo učiniti tako da ispitamo pod kojim je uvjetim istinit nijek* $\neg\forall x(Px \vee Dxc)$*:*

$$
\begin{array}{lcl}
1\_ & \neg\forall x(Px \vee Qxc) \checkmark & \\
2 & \neg(Pd \vee Qdc) \checkmark & 1\neg\forall \\
3 & \neg Pd & 2\neg\vee \\
4 & \neg Qdc & 2\neg\vee \\
 & \bigcirc &
\end{array}
$$

Primijetimo da se 'd' u gornjem prikazu, u trenutku kad se uvodi, nova konstanta – razlikuje od jedine konstante koja se prije 'd' javlja u stablu, od konstante 'c'. Stablo nam pokazuje da će analizirani iskaz biti neistinit, tj. zanijekani iskaz biti istinit, u modelu u kojem ima predmet označen pomoću 'd' koji nema svojstvo označeno pomoću 'P^1*' niti stoji u relaciji mišljenoj pod '*Q^2*' prema predmetu označenom pomoću 'c'. To je, primjerice, sljedeći model:*

D*: 1, 2, 3, . . . ,*
c: broj 3,
d: broj 5,
P^1*: ___ je ,paran,*
Q^2_1*: ___ je djeljivo s ___ .*

Naime, ne vrijedi za svaki pozitivan cijeli broj da je paran ili djeljiv s 3. To, primjerice, ne vrijedi za broj 5 (ni za 7, 11 itd.):

$$5 \notin \mathcal{T}(P^1), \quad \langle 5, 3\rangle \notin \mathcal{T}(Q^2).$$

Opstojni iskaz

DEFINICIJA 4.12 (ISTINITOST OPSTOJNOGA ISKAZA) *Iskaz* $\exists \mathrm{x}p$ *jest u modelu* $\mathfrak{M}$ *istinit ako i samo ako barem jedan član predmetnoga područja* D *zadovoljava formulu p u tumačenju* $\mathcal{T}$*.*

I tu definiciju možemo prikazati u formatu istinitosnoga stabla. Neka je istinit iskaz oblika $\exists \mathrm{x}p$. Imenujmo neki predmet koji zadovoljava *p novim* imenom c – ime mora biti *novo* (kao i kod neistinitosti općega iskaza) jer je riječ o "nekom", neodređeno kojem predmetu, te moramo biti sigurni da taj predmet nismo izjednačili s nekim već poznatim predmetom, ali ujedno moramo ostaviti otvorenom mogućnost da to i bude upravo jedan od poznatih predmeta. Supstitucijski primjer s takvim c za x bit će istinit:

$$\begin{array}{l} \exists \mathrm{x}p \checkmark \\ p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \end{array}$$

Stavljena je kvačica jer je zadovoljenost formule p barem jednim predmetom dostatan i nužan razlog istinitosti opstojnoga iskaza.

Promotrimo sada neistinitost opstojnoga iskaza. Ako uzmemo bilo koji predmet predmetnoga područja, i imenujemo ga imenom, primjerice, c, supstitucijski primjer $p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$ će biti neistinit:

$$\begin{array}{l} \neg\exists \mathrm{x}p^{\ \mathrm{c}_1\checkmark} \\ \neg p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \end{array}$$

Uz $\neg\exists \mathrm{x}p$ (kao uz opći iskaz) stoji samo kvačica za oznaku jednoga predmeta, jer nezadovoljenost formule p jednim predmetom ne iscrpljuje neistinitost opstojnoga iskaza. Sve što je rečeno o mogućnosti beskonačno mnogo supstitucijskih primjera pod općim iskazom, vrijedi i za $\neg\exists \mathrm{x}p$, jer to nije drugo nego niječni opći iskaz.

$$\begin{array}{l} \neg\exists \mathrm{x}p^{\ \mathrm{c}_1\checkmark \mathrm{c}_2\checkmark \mathrm{c}_3\checkmark\ldots} \\ \neg p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x}) \\ \neg p(\mathrm{c}_2/\mathrm{x}) \\ \neg p(\mathrm{c}_3/\mathrm{x}) \\ \quad\vdots \end{array}$$

PRIMJER 4.7 (ISTINITOST ISKAZA $\exists x(Qxc \wedge Px)$) *Pronađimo uvjete istinitosti iskaza '$\exists x(Qxc \wedge Px)$':*

$$\begin{array}{lcl} 1 & \exists x(Qxc \wedge Px) \checkmark & \\ 2 & Qec \wedge Pe \checkmark & 1\exists \\ 3 & Qec & 2\wedge \\ 4 & Pe & 2\wedge \\ & \bigcirc & \end{array}$$

Potražimo model u kojem predmet označen pomoću e stoji u relaciji pridruženoj priroku 'Q^2' s predmetom označenim pomoću 'c', i u kojem predmet označen pomoću 'e' ima svojstvo pridruženo 'P'. To je, primjerice, model sličan već definiranomu:

D*: 1, 2, 3, . . . ,*
c: broj 3,
e: broj 6,
P^1*: ___ je paran,*
Q^2_1*: ___ je djeljivo s ___ .*

U tom je modelu broj 6 djeljiv s 3 i također je paran:

$$\langle 6, 3\rangle \in \mathcal{T}(Q^2), \quad 6 \in \mathcal{T}(P^1).$$

PRIMJER 4.8 (NEISTINITOST ISKAZA $\exists x(Px \wedge \neg Qxc_2)$) *Pronađimo uvjete neistinitosti iskaza '$\exists x(Px \wedge \neg Qxc_2)$':*

$$
\begin{array}{llcl}
1\_ & & \neg\exists x(Px \wedge \neg Qxc_2)\ {}^{c_2\checkmark\ldots} & \\
2 & & \neg(Pc_2 \wedge \neg Qc_2c_2)\ \checkmark & 1\neg\exists \\
 & / & & \backslash \\
3 & \neg Pc_2 & \neg\neg Qc_2c_2\checkmark & 2\neg\wedge \\
4 & \bigcirc & Qc_2c_2 & 3\neg\neg \\
 & & \bigcirc &
\end{array}
$$

Uvjete istinitosti prikazane u gornjem stablu sadrži, primjerice, svaki model gdje predmet označen pomoću 'c_2' (a tako i svaki drugi predmet, ako ih još ima u predmetnome području) nema svojstvo pridruženo priroku 'P^2', ili stoji u relaciji pridruženoj priroku 'Q' s predmetom označenim pomoću c_2.

Evo primjene na model sa cijelim skupom pozitivnih cijelih brojeva:

1		$\neg\exists x(Px \land \neg Qxc_2)$ $^{c_1\checkmark c_2\checkmark\dots}$			
2		$\neg(Pc_1 \land \neg Qc_1c_2)\checkmark$			1¬∃
	/		\		
3	$\neg Pc_1$		$\neg\neg Qc_1c_2\checkmark$		2¬∧
4	|		Qc_1c_2		3¬¬
5	$\neg(Pc_2 \land \neg Qc_2c_2)\checkmark$		$\neg(Pc_2 \land \neg Qc_2c_2)\checkmark$		1¬∃
	/	\	/	\	
6	$\neg Pc_2$	$\neg\neg Qc_2c_2\checkmark$	$\neg Pc_2$	$\neg\neg Qc_2c_2\checkmark$	5¬∧
		Qc_2c_2		Qc_2c_2	6¬¬
	⋮	⋮	⋮	⋮	

Gornje bi se stablo u beskonačnost granalo za svaki idući predmet označen nekom konstantom. Tj. koji god predmet uzeli, on nema svojstvo označeno pomoću 'P^1' ili je u relaciji označenoj pomoću 'Q^2' prema predmetu na koji se odnosi 'c_2'. Primjer za to je također model s pozitivnim cijelim brojevima:

D*: 1, 2, 3, . . . ,*
c_1*: broj 1*
c_2*: broj 2*
c_3*: broj 3*
⋮
P^1*: ___ je paran*
Q^2_1*: ___ je djeljivo s ___*

Tu doista za svaki broj vrijedi da ili nije paran ili je djeljiv s 2:

$$1 \notin \mathcal{T}(P^1),\ \ 2 \in \mathcal{T}(Q^2),\ \ 3 \notin \mathcal{T}(P^1),\ \ 4 \in \mathcal{T}(Q^2), \dots .$$

4.2.3 ISTINITOSNI UVJETI I ISTINITOSNO STABLO

Kako vidimo iz prethodnoga pododjeljka, za ispitivanje istinitosnih uvjeta iskaz možemo u logici prvoga reda upotrijebiti istinitosno stablo kao i u iskaznoj logici. *Istinitost slovnih iskaza* dobivenih u grani izražuje uvjet istinitosti zadanoga ispitivanoga iskaza. Potpisivanje i grananje, te oznake × i ○

imaju u logici prvoga reda analogan smisao kao i u iskaznoj logici. Također, lijevo u retku upisujemo broj retka, a desno opravdanje retka (iz kojega je retka dotični redak dobiven i račlambom koje vrste iskaza), a crticom kod broja retka lijevo odvajamo zadane iskaze od iskaza dobivenih raščlambom. Analogan je i pojam puta i zatvorenoga puta u stablu (s time što sada slovni iskazi sadrže priroke i predmetne konstante).

Nove su pojave u stablu **dodatna raščlambena pravila** za opće i opstojne (jesne i niječne) iskaze, **indeksirane kvačice** (za jesne i niječne opće iskaze), te **beskonačan put**.

Sva pravila građenja istinitosnoga stabla u iskaznoj logici preuzimlju se u logiku prvoga reda, s time da su sada p, q, i r formule jezika $\mathscr{L}_p$. Nova, u prethodnom pododjeljku uvedena pravila, jesu pravila za opće i opstojne (jesne i niječne) iskaze:

$h \quad \forall \mathrm{x} p\ ^{c\checkmark}$
$i \quad p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \quad h\forall$
c je bilo koja predmetna konstanta

$h \quad \neg\forall \mathrm{x} p \checkmark$
$i \quad \neg p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \quad h\neg\forall$
c se prethodno ne javlja na putu

$h \quad \exists \mathrm{x} p \checkmark$
$i \quad p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \quad h\exists$
c se prethodno ne javlja na putu

$h \quad \neg\exists \mathrm{x} p\ ^{c\checkmark}$
$i \quad \neg p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \quad h\neg\exists$
c je bilo koja predmetna konstanta

Indeksirane kvačice pokazuju da iskaz nije u potpunosti raščlanjen, nego da se još beskonačno mnogo puta može raščlaniti za beskonačno mnogo različitih predmetnih konstanata (jer su moguća i beskonačna predmetna područja).

Redefinirajmo **potpun otvoren put**, koji može, kako smo vidjeli, sadržavati i indeksirane kvačice te biti beskonačan.

DEFINICIJA 4.13 (POTPUN OTVOREN PUT) *Put je potpun i otvoren ako i samo ako je* konačan, *te se u njem javljaju samo*

1. *u potpunosti raščlanjeni iskazi,*
2. *iskazi raščlanjeni za sve konstante koje se prethodno javljaju na putu i barem za jednu predmetnu konstantu,*

3. *slovni iskazi.*

Slučaj 2. se odnosi na opće (jesne i niječne) iskaze.

U stablu može proizlaziti, kako smo vidjeli, i **beskonačan** put, na kojem se raščlamba iskaza nastavlja u beskonačnost unošenjem novih i novih supstitucijskih primjera. Beskonačan put stalno donosi nove i nove uvjete istinitosti zadanoga iskaza. No kako beskonačan put ni u jednom trenutku izgradnje nije završen, mi ni u jednom trenutku oslanjajući se jedino na samo stablo, ne možemo ustanoviti da je taj put beskonačan. To možemo samo pretpostaviti na temelju većega broja ponavljanja raščlambenih ciklusa u stablu.

U slučaju kad pretpostavljamo da je put beskonačan, primjenjujemo alternativna pravila za opstojni i nijek općega iskaza:

$$
\begin{array}{lccc}
h & & \exists \mathrm{x} p \checkmark & \\
 & / \dots & | & \backslash \\
i & p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x}) \dots p(\mathrm{c}_\mathrm{n}/\mathrm{x}) & & p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \quad h\ \exists'
\end{array}
$$

$\mathrm{c}_1 \dots \mathrm{c}_n$ se prethodno javljaju na putu,
c se prethodno ne javlja na putu

$$
\begin{array}{lccc}
h & & \neg\forall \mathrm{x} p \checkmark & \\
 & / \dots & | & \backslash \\
i & \neg p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x}) \dots \neg p(\mathrm{c}_\mathrm{n}/\mathrm{x}) & & \neg p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \quad h\ \neg\forall'
\end{array}
$$

$\mathrm{c}_1 \dots \mathrm{c}_n$ se prethodno javljaju na putu,
c se prethodno ne javlja na putu

Primjenom tih pravila možemo dobiti konačan put na lijevoj strani (za stare konstante) kad inače, primjenom običnih pravila $\exists$ i $\neg\forall$, ne dobivamo nijedan konačan put (jer rabimo samo nove konstante).

PRIMJER 4.9 *Evo primjera G. Boolosa, u kojem se primjenom alternativnoga* *pravila za opstojnost ipak dobiva konačan put:*

1	$\forall y \exists y Rxy$ ${}^{c\checkmark d\checkmark \ldots}$	
2	$\exists y Rcy$ ✓	1 $\forall$
	/ \	
2	Rcc Rcd	$\exists'$
3	○ $\exists y Rdy$	1 $\forall$
	⋮	

Vježba 4.1 *Pokušajte analizirati iskaz iz prethodnoga primjera (4.9) pomoću staroga pravila za opstojnost!)*

Evo još jednoga primjera analize istinitosnih uvjeta pomoću istinitosnoga stabla:

Primjer 4.10 *Pod kojim je uvjetima istinit iskaz '$\exists x \neg (Ax \vee \forall y Cy) \wedge \forall x (Ax \vee (Bx \wedge Cx))$'.*

1	$\exists x \neg (Ax \vee \forall y Cy) \wedge \forall x (Ax \vee (Bx \wedge Cx))$ ✓	
2	$\exists x \neg (Ax \vee \forall y Cy)$ ✓	1$\wedge$
3	$\forall x (Ax \vee (Bx \wedge Cx))$ ${}^{c\checkmark d\checkmark}$	1$\wedge$
4	$\neg (Ac \vee \forall y Cy)$ ✓	2$\exists$
5	$\neg Ac$	4$\neg\vee$
6	$\neg \forall y Cy$ ✓	4$\neg\vee$
7	$\neg Cd$	6$\neg\forall$
8	$Ac \vee (Bc \wedge Cc)$ ✓	3$\forall$
	/ \	
9	Ac $Bc \wedge Cc$ ✓	8$\vee$
	× |	
10	Bc	9$\wedge$
11	Cc	9$\wedge$
12	$Ad \vee (Bd \wedge Cd)$ ✓	3$\forall$
	/ \	
13	Ad $Bd \wedge Cd$ ✓	12$\vee$
14	○ Bd	13$\wedge$
15	Cd	13$\wedge$
	×	

Uočimo da smo se u retku 12 iznova vratili na opći iskaz iz retka 3, jer se put nije zatvarao, a opći iskaz nije bio raščlanjen za sve predmetne konstante koje se javljaju prethodno na putu (nego samo za 'c'u retku 8).

Potpun otvoren put jest onaj drugi slijeva (prvi i treći su zatvoreni). Karakteristično je da je opći iskaz iz retka 3 na tom putu raščlanjen za sve predmetne konstante koje se na putu javljaju ('c' i 'd').

Model u kojem je zadan iskaz istinit možemo izgraditi polazeći od slovnih iskaza koji, prema stablu, trebaju biti istiniti. U skladu s time dovoljno je dvočlano predmetno područje, npr. s predmetom d *označenim pomoću 'c' i s predmetom* d′ *označenim konstantom 'd'. U tome modelu* d *nema svojstvo označeno s 'A^1' ali ima svojstva označena pomoću 'B^1' i 'C^1', a predmet* d′ *nema svojstvo označeno pomoću 'C^1', ali ima svojstvo označeno pomoću 'A^1'. Evo jednoga takva modela:*

D*: {Stjepan Mesić, George W. Bush},*
c: Stjepan Mesić,
d: George W. Bush,
A^1: ___ je američki političar,
B^1: ___ razgovara s građanima na kavi,
C^1: ___ je hrvatski političar,

Stjepan Mesić je hrvatski političar, što George W. Bush nije; Bush je američki političar, što Mesić nije, i Mesić razgovara s građanima na kavi, dok Bushov način izravnoga komuniciranja s građanima može u našem modelu ostati otvorenim:

$$\text{Mesić} \in \mathcal{T}(C^1), \text{Bush} \notin \mathcal{T}(C^1),$$
$$\text{Bush} \in \mathcal{T}(A^1), \text{Mesić} \notin \mathcal{T}(A^1),$$
$$\text{Mesić} \in \mathcal{T}(B^1).$$

Primjer 4.10 također dobro pokazuje primjenu glavnoga načela pri izgradnji stabla, a to je: **zatvoriti stablo** na svim putovima ako je moguće. To znači da na svakom putu nastojimo dobiti jednostavni iskaz i nijek istoga iskaza. U tu svrhu **opći** iskaz raščlanjujemo za one **konstante koje se prethodno**

javljaju na putu (ako takvih ima). Iz toga također slijedi da dajemo **prednost raščlambi opstojnoga iskaza** pred raščlambom općega iskaza, tako da u raščlambi općega iskaza možemo *ponoviti* novu konstantu prethodno uvedenu raščlambom opstojnoga iskaza.

4.3 LOGIČKI KVADRAT

Iz tradicionalne su logike poznati iskazi logičkoga kvadrata: općepotvrdni (**a**), općeniječni (**e**), posebnopotvrdni (**i**) i posebnoniječni (**o**). Oni se međusobno razlikuju prema kolikotno-kakvotnoj odredbi odnosa "podmeta" (subjekta) i "priroka" (predikata). Napomenimo da je riječ o gramatičkom pojmu podmeta i priroka kao dijelova iskaza. Kad budemo riječi 'podmet' i 'prirok' rabili u tom smislu, stavit ćemo ih u dvostruke navodnike, osim kad je kontekst jednoznačan. Iskazi se logičkoga kvadrata mogu izraziti u jeziku $\mathscr{L}_p$ i to na različite načine.

4.3.1 Logički kvadrat u uskom predmetnom području

Najprije pogledajmo kako iskaze logičkoga kvadrata možemo izraziti ako je **predmetno područje suženo** na opseg "podmeta" (subjekta) ili je još uže. Uzmimo sljedeći model:

D: ljudi
S^1: ___ je smrtan,
H^1: ___ je hrabar,
U^1: ___ je umjeren,
R^1: ___ je razborit,
P^1: ___ je pravedan.

Sada lijevo navodimo iskaze logičkoga kvadrata, a desno dva načina kako ih prevodimo na jezik $\mathscr{L}_p$:

a: Svi su ljudi smrtni. $\forall x S x$, $\neg\exists x \neg S x$

Iskaz $\forall x S x$ kazuje da svaki član predmetnoga područja (a to su samo ljudi) zadovoljava formulu $S x$, tj. da ima svojstvo smrtnosti. Iskaz pak $\neg\exists x \neg S x$

kazuje da nema člana predmetnoga područja koji zadovoljava formulu $\neg Sx$, tj. koji ne zadovoljava formulu Sx, dakle, koji nije obilježen smrtnošću.

e: Nijedan čovjek nije smrtan. $\forall x \neg Sx$, $\neg \exists x Sx$

Iskaz $\forall x \neg Sx$ kazuje da svaki član predmetnog područja zadovoljava formulu $\neg Sx$, tj. da nijedan ne zadovoljava formulu Sx, dakle, da nijedan nije obilježen smrtnošću. Tako i iskaz $\neg \exists x Sx$ kazuje da nema člana predmetnoga područja koji zadovoljava formulu Sx, tj. koji ima svojstvo smrtnosti.

i: Neki su ljudi smrtni. $\exists x Sx$, $\neg \forall x \neg Sx$

V. vježbu 1.

o: Neki ljudi nisu smrtni. $\exists x \neg Sx$, $\neg \forall x Sx$

V. vježbu 2.

"Podmet" ili "prirok" mogu biti i sastavljene formule. Npr.

Neki su ljudi pravedni i umjereni. $\exists x(Px \wedge Ux)$

U toj je rečenici 'pravedan i umjeren' prirok podmeta 'ljudi'. Taj "prirok" raščlanjujemo pomoću dvaju priroka jezika $\mathscr{L}_p$.

Svaki je čovjek umjeren i pravedan ako je razborit. $\forall x(Rx \rightarrow (Ux \wedge Px))$

U navedenoj je rečenici čitav složen izraz 'umjeren i pravedan ako je razborit' kao cjelina "prirok" "podmeta" 'ljudi'. Taj "prirok", kako vidimo, raščlanjujemo trima prirocima jezika $\mathscr{L}_p$.

Općenito, ako je **predmetno područje suženo** (na "podmetov" opseg ili još uže), iskazi logičkoga kvadrata imat će u $\mathscr{L}_p$ sljedeće oblike:

a :	$\forall \mathrm{x} p$	$\neg \exists \mathrm{x} \neg p$
e :	$\forall \mathrm{x} \neg p$	$\neg \exists \mathrm{x} p$
i :	$\exists \mathrm{x} p$	$\neg \forall \mathrm{x} \neg p$
o :	$\exists \mathrm{x} \neg p$	$\neg \forall \mathrm{x} p$

4.3.2 Logički kvadrat u širokome predmetnome području

Ako **predmetno područje proširimo** tako da je šire od "podmetova" opsega, oblik će se iskaza u $\mathscr{L}_p$ izmijeniti. Nije više samorazumljivo da govorimo o ljudima, nego to moramo izričito navesti. Zato moramo upotrijebiti i novi prirok, npr. C^2. Dakle, u novome, preinačenome modelu:

D: svi predmeti,
C^1: ___ je čovjek.

Gornje ćemo iskaze logičkoga kvadrata prevesti redom ovako:

a : $\forall x(Cx \rightarrow Sx)$, $\neg\exists x(Cx \wedge \neg Sx)$

Iskaz $\forall x(Cx \rightarrow Sx)$ kaže da svaki član predmetnoga područja zadovoljava formulu $Cx \rightarrow Sx$, tj. da svaki predmet, ako je čovjek, smrtan. Primijetimo da bi iskaz $\forall x(Cx \rightarrow Sx)$ bio istinit i kad u predmetnome području ne bi bilo ljudi, jer bi prednjak pogodbe $Cx \rightarrow Sx$ uvijek bio nezadovoljen, pa prema tome, pogodba zadovoljena (analogno pojmu istinitosti pogodbe). To se lijepo vidi iz istinitosnoga stabla:

1	$\underline{\forall x(Cx \rightarrow Sx)}$	
2	$Cc \rightarrow Sc$	$1\forall$
	/ \	
3	$\neg Cc$ Sc	$2 \rightarrow$
4	○ ○	

Stablo pokazuje da je uvjet istinitosti općega iskaza to da po volji izabran predmet (označen pomoću c) ili nije čovjek ili je smrtan. Isto, na drugi način, kazuje i iskaz $\neg\exists x(Cx \wedge \neg Sx)$. On kazuje da nema člana predmetnoga područja koji zadovoljava formulu $Cx \wedge \neg Sx$, tj. predmeta koji je čovjek a nije smrtan.

e : $\forall x(Cx \rightarrow \neg Sx)$, $\neg\exists x(Cx \wedge Sx)$

V. vježbu 3.

i : $\exists x(Cx \wedge Sx)$, $\neg\forall x(Cx \rightarrow \neg Sx)$

V. vježbu 3.

$$\mathbf{o} : \exists x(Cx \wedge \neg Sx), \quad \neg\forall x(Cx \rightarrow Sx)$$

V. vježbu 3.

Za iskaze **a** i **e** (lijevo) **ne** rabimo **konjunkciju** jer se ne kaže da su svi predmeti i ljudi i pravedni (odnosno, nepravedni). Npr. konjunkcija bi $Cx \wedge Sx$ u iskazu **a** značila da je svaki predmet (biljka, kamen itd.) i čovjek i smrtan (tj. smrtan čovjek), što ne odgovara smislu iskaza **a**. Za iskaze **i** i **o** lijevo), ne rabimo **pogodbu**, jer bi ona bila zadovoljena već samo jednim predmetom koji nije čovjek.

Iskaz 'Neki su ljudi pravedni i umjereni' možemo prevesti ovako:

$$\exists x(Cx \wedge (Px \wedge Ux)).$$

Iskaz 'Svaki je čovjek umjeren i pravedan ako je razborit' može se prevesti ovako:

$$\forall x(Cx \rightarrow [Rx \rightarrow (Ux \wedge Px)]).$$

Općenito, **ako je predmetno područje prošireno** (i na predmete izvan "podmetova" opsega), iskazi logičkoga kvadrata u prijevodu na $\mathscr{L}_p$ imaju sljedeći oblik:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{a}: & \forall \mathrm{x}(p \rightarrow q) & \neg\exists \mathrm{x}(p \wedge \neg q) \\
\mathbf{e}: & \forall \mathrm{x}(p \rightarrow \neg q) & \neg\exists \mathrm{x}(p \wedge q) \\
\mathbf{i}: & \exists \mathrm{x}(p \wedge q) & \neg\forall \mathrm{x}(p \rightarrow \neg q) \\
\mathbf{o}: & \exists \mathrm{x}(p \wedge \neg q) & \neg\forall \mathrm{x}(p \rightarrow q)
\end{array}$$

Napomena 4.3 ***Hrvatske*** *opće rečenice (a tako i u drugim sličnim jezicima), kao npr. 'Svi su kitovi sisavci' obično podrazumijevaju opstojnost predmetâ na koje se odnosi "podmet". No to nije slučaj u $\mathscr{L}_p$ ako prevodimo u tumačenju s proširenim predmetnim područjem (kako smo već upozorili u vezi s rečenicom 'Svi su ljudi smrtni'). Ograničimo, primjerice, predmetno područje na životinje u zagrebačkome zoološkom vrtu i postavimo rečenicu*

Svi su pande (u zagrebačkome zoološkome vrtu) druželjubivi.

Ako znademo da u zagrebačkome zoološkome vrtu nema panda, hrvatska se rečenica čini besmislenom. Ako ne znamo da u tom zoološkome vrtu nema panda, rečenica navodi na pomisao da u njem ima panda. Ako navedenu rečenicu izrazimo u $\mathscr{L}_p$ *pomoću*

$$\forall x(Px \to Dx),$$

dobili smo istinitu rečenicu, i to upravo zato jer u izabranome predmetnome području nema panda pa je pogodba '$Px \to Dx$*' uvijek zadovoljena. To je **prazna istinitost**.*

Slično, u hrvatskom rečenica 'Nijedan kit nije kit' izgleda protuslovnom. Ali u $\mathscr{L}_p$ *nije tako jer ako uzmemo predmetno područje u kojem nema kitova, primjerice, opet sve životinje u zagrebačkome zoološkome vrtu, dobivamo istinit iskaz, npr. '*$\forall x(Kx \to \neg Kx)$*'.*

Čak i kad u hrvatskome svijesno govorimo o neopstojećim predmetima, kao u rečenici 'Svi su zmajevi opasni', ne iskazujemo praznu istinitost, nego kao da iskazujemo istinu o svijetu u koji se tom rečenicom prenosimo.

*Slično se i u hrvatskim posebnim iskazima (**i** i **o**) opstojnost predmeta na koje se odnosi "podmet", katkad podrazumijeva samo kao u nekom zamišljenome svijetu. Tako npr. u rečenici 'Neki su zmajevi dobroćudni'. U jeziku* $\mathscr{L}_p$ *opstojnost uvijek upućuje na (opstojećega) člana predmetnoga područja, tako da bi prijevod gornje rečenice, primjerice s '*$\exists x(Zx \land Dx)$*', davao neistinu.*

Napomenimo da u hrvatskome "neki" često znači "samo neki", dakle, isključuje "svi", što nije slučaj u $\mathscr{L}_p$*. Isto se tako u hrvatskome, za razliku od* $\mathscr{L}_p$*, često podrazumijeva da "neki" znači više od jednoga.*

Vježbe

1. Semantički analizirajte iskaze $\exists x S x$ i $\neg\forall x \neg S x$ po uzoru na analizu iskaza **a** i **e** u suženom predmetnome području.

2. Provedite semantičku analizu iskazâ $\exists x \neg S x$ i $\neg\forall x S x$ te iskazâ $\exists x(Px \land Ux)$, $\forall x(Rx \to (Ux \land Px))$ kao i u vježbi 1.

3. Po uzoru na analizu iskaza u proširenome predmetnome području, semantički analizirajte sljedeće iskaze:

   (a) $\forall x(Cx \rightarrow \neg Sx)$

   (b) $\neg\exists x(Cx \wedge Sx)$

   (c) $\exists x(Cx \wedge Sx)$

   (d) $\neg\forall x(Cx \rightarrow \neg Sx)$

   (e) $\exists x(Cx \wedge \neg Sx)$

   (f) $\neg\forall x(Cx \rightarrow Sx)$

   (g) $\exists x(Cx \rightarrow (Px \wedge Ux))$

   (h) $\forall x(Cx \rightarrow [Rx \rightarrow (Ux \wedge Px)])$

4.4 VIŠESTRUKO POKOLIČAVANJE

Višestrukim pokoličavanje nazivljemo **preklapanje** dosegâ više količitelja.

4.4.1 Višestruko pokoličavanje u uskome predmetnome području

Promotrimo nekoliko primjera na modelima koji kao predmetno područje imaju skup pozitivnih cijelih brojeva, te gdje prirok R^2 znači relaciju "manji":

D: 1, 2, 3, . . . ,
R^2: ___ je manji od ___ .

Zadržimo se najprije na dvama primjerima s dvama istovrsnim količiteljima.

PRIMJER 4.11 (NEISTINITOST ISKAZA $\forall x\forall yRxy$) *Iskaz '$\forall x\forall yRxy$', u predloženome modelu, hrvatski znači 'Svaki je broj manji od svakoga broja'. To je očito neistinit iskaz. No pogledajmo pobliže:*

1_	$\neg\forall x\forall yRxy$ ✓	
2	$\neg\forall yRdy$ ✓	$1\neg\forall$
3	$\neg Rdc$	$2\neg\forall$
	○	

Nije teško pronaći među pozitivnim cijelim brojevima dva broja takva da prvi nije manji od drugoga. Npr.

c: broj 1,
d: broj 2.

Formalno možemo zapisati:

$$\langle 2, 1\rangle \notin \mathcal{T}(R^2).$$

Uređen par $\langle 2, 1\rangle$ *ne zadovoljava formulu 'Rxy' (pri čem je 2 vrijednost varijable 'x', a 1 vrijednost varijable 'y'). Iz toga slijedi da svaki pozitivan cijeli broj ne stoji sa svakim svakim pozitivnim cijelim brojem u relaciji "manji". Prema tome je '$\forall x \forall y Rxy$' neistinito u modelu $\mathfrak{M}$.*

Mogli bismo čak tumačenje promijeniti tako da 'c' i 'd' znače jedan te isti, bilo koji pozitivan cijeli broj. Kako nijedan broj nije manji od samoga sebe, i svaki bi takav primjer pokazivao neistinitost zadanoga iskaza.

PRIMJER 4.12 (ISTINITOST ISKAZA $\exists x \exists y \neg Rxy$) *'$\exists x \exists y \neg Rxy$', prema gornjem modelu s pozitivnim cijelim brojevima, u hrvatskome znači 'Neki broj nije manji od nekoga broja' (razlikujmo potonju rečenicu po značenju od 'Neki broj nije manji ni od jednoga broja'). Znademo da je to istinit iskaz. Logička je analiza i provjera vrlo slična kao i u prethodnome primjeru. Nije teško pronaći uređen par pozitivnih cijelih brojeva takvih da prvi nije manji od drugoga, npr. par* $\langle 1, 2\rangle$.

Provjerom na način kao u gornjim primjerima možemo ustanoviti da do istoga rezultata dolazimo i kad količitelji zamijene mjesta, dakle ako umjesto gornjih iskaza provjeravamo iskaze $\forall y \forall x Rxy$ i $\exists y \exists x Rxy$. Općenito se može reći da je **poredak** (dvaju ili više) **istovrsnih količiteljâ** koji neposredno slijede jedan za drugim, po volji **promjenljiv**, a da se istinitosna vrijednost iskaza ne mijenja.

Pogledajamo sada i dva primjera s neistovrsnim količiteljima, također s uskim predmetnim područjem.

PRIMJER 4.13 (ISTINITOST ISKAZA $\forall x \exists y Rxy$) *Iskaz '$\forall x \exists y Rxy$', prema gornjem modelu, hrvatski znači 'Svaki je broj manji od nekoga broja'. Potražimo njegove uvjete istinitosti:*

1	$\forall x \exists y Rxy \ ^{c_1 \checkmark c_2 \checkmark c_3 \checkmark \ldots}$	
2	$\exists y Rc_1 y$ ✓	1∀
3	$Rc_1 c_2$	2∃
4	$\exists y Rc_2 y$ ✓	1∀
5	$Rc_2 c_3$	4∃
6	$\exists y Rc_3 y$ ✓	1∀
7	$Rc_3 c_4$	6∃
	⋮	

Dogradimo naš model s pozitivnim cijelim brojevima sljedećim značenjima konstanata:

c_1*: broj 1*
c_2*: broj 2*
c_3*: broj 3*
c_4*: broj 4*
⋮

Primijenimo li ta značenja konstanata na gornju analizu, dobivamo redom uređene parove brojeva koji pripadaju relaciji "manji" (prvi je broj manji od drugoga):

$$\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \ldots \in \mathcal{T}(R^2).$$

Očito je da u navedenom nizu uređenih parova prvi član može biti bilo koji broj (navodimo ih redom, počevši od 1), te da uvijek, kao drugi član navodimo broj od kojega je prvi za 1 manji. Prema tome, za svaki pozitivan cijeli broj kao vrijednost varijable 'x', ima broj kao vrijednost varijable 'y' tako da je prvi broj manji od drugoga. Stoga je iskaz '$\forall x \exists y Rxy$' istinit.

PRIMJER 4.14 (NEISTINITOST ISKAZA $\exists x \forall y Rxy$) *Iskaz '$\exists x \forall y Rxy$' znači, prema gornjem modelu, u hrvatskome 'Neki je broj manji od svakoga broja.' Pogle-*

dajmo uvjete istinitosti za taj iskaz:

1	$\exists x \forall y Rxy$ ✓	
2	$\forall y Rcy$ $^{c\checkmark}$	1∃
3	Rcc	2∀
	○	

Vidljivo je iz analize da pod pretpostavkom istinitosti zadanoga iskaza slijedi da bi morao opstojati broj, označeni pomoću ‘c’, koji je manji i od samoga sebe (i od drugih brojeva), no to na skupu pozitivnih cijelih brojeva nije slučaj ni s jednim brojem. Naime, za svaki pozitivan cijeli broj d *vrijedi:*

$$\langle \mathrm{d}, \mathrm{d} \rangle \notin \mathcal{T}(R^2).$$

Primjenom toga tumačenja na gornju analizu dobivamo sljedeće uređene parove brojeva, koji nisu u relaciji “manji” (tako da je prvi broj manji od drugoga):

$$\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \ldots \notin \mathcal{T}(R^2).$$

Slijedi da nijedan pozitivan cijeli broj ne zadovoljava uvjet da je manji od svakoga broja, već i samim time što nije manji od sebe. Prema tome je iskaz ‘$\exists x \forall y Rxy$’ neistinit.

Primijetimo da poredak količiteljâ u posljednjim dvama primjerima nije po volji promjenljiv! Primjerice, iskaz $\forall x \exists y Rxy$ kazuje da je svaki (pozitivan cijeli) broj manji barem od jednoga broja, što je istinito, dok iskaz $\exists y \forall y Rxy$ kazuje da ima neki (pozitivan cijeli) broj takav da je svaki broj od njega manji, što nije istinito. Općenito, **poredak neistovrsnih količitelja** koji neposredno slijede jedan za drugim, **nije** po volji **promjenljiv** a da značenje ostane nepromjenjeno.

Vježbe

Navedene primjere višestrukoga pokoličavanje možemo shvatiti kao uvrštavanje potvrdnih formula logičkoga kvadrata u potvrdne formule **logičkoga kvadrata**. Npr. $\forall x \exists y Rxy$ jest općepotvrdan iskaz u koji je uvrštena posebnopotvrdna formula $\exists y Rxy$.

U sljedećim vježbama neka predmetno područje čini skup pozitivnih cijelih brojeva, a R^2 neka znači relaciju "manji".

1. Provjerite istinitost slijedećih iskaza s niječnim podformulama, te ih izrazite hrvatski:
   (a) $\forall x \neg \forall y Rxy$,
   (b) $\neg \forall y \exists x Rxy$,
   (c) $\neg \exists y \exists x Ryx$.
   (d) $\forall x \exists y \neg Rxy$
   (e) $\forall x \neg \exists y Rxy$
2. Provjerite koji su od sljedećih iskaza istiniti! Izrazite ih hrvatskim jezikom! Neka P^2 znači 'biti veći od'.
   (a) $\forall x \forall y \neg Pyx$,
   (b) $\forall x \neg \forall y Pyx$,
   (c) $\neg \forall x \forall y Pyx$,
   (d) $\exists \mathrm{y} \neg \exists x Pxy$,
   (e) $\forall y \exists x Pxy$,
   (f) $\forall y \neg \exists x Pxy$,
   (g) $\exists x \forall y Pyx$.

4.4.2 Višestruko pokoličavanje u širokome predmetnome području

Nadovežimo se na prethodne primjere i uzmimo sada da je predmetno područje široko (šire od podmetova opsega). Pokušajmo prevesti iste ili slične hrvatske rečenice. U tu će nam svrhu trebati još jedan prirok, u značenju 'biti pozitivan cijeli broj', primjerice, B^1, kako bismo tvrdnje mogli ograničiti na pozitivne cijele brojeve. Dobivamo, dakle, sljedeći model, koji ćemo u primjerima dopunjavati ili preinačivati:

D: svi predmeti
B^1: ___ je pozitivan cijeli broj (umjesto toga ćemo govoriti kraće samo "___ je broj"),
R^2: ___ je manji od ___ .

PRIMJER 4.15 (NEISTINITOST ISKAZA $\forall x(Bx \to \forall y(By \to Rxy))$) *Iskaz '$\forall x(Bx \to \forall y(By \to Rxy))$', u skladu s upravo definiranim modelom, u hrvatskome znači: 'Svaki je broj manji od svakoga broja', što je neistinito. Potražimo uvjete neistinitosti toga iskaza pomoću istinitosnoga stabla.*

1	$\neg\forall x(Bx \to \forall y(By \to Rxy))\checkmark$	
2	$\neg(Bd \to \forall y(By \to Rdy)))\checkmark$	$1\neg\forall$
3	Bd	$2\neg\to$
4	$\neg\forall y(By \to Rdy)\checkmark$	$\neg\to$
5	$\neg(Bc \to Rdc)\checkmark$	$4\neg\forall$
6	Bc	$5\neg\to$
7	$\neg Rdc$	$5\neg\to$
	$\bigcirc$	

Dobiveno stablo jasno pokazuje da pod uvjetom da ima predmet označen pomoću 'd' i predmet označen pomoću 'c' (to mi mogao biti i isti predmet s dvama imenima) koji su oba brojevi, i da prvi nije manji od drugoga. Nije teško naći takvo tumačenje (npr. 'c': 1, 'd': 2, kao u prethodnome odjeljku).

Primijetimo kako je u iskazu '$\forall x(Bx \to \forall y(By \to Rxy))$', kojega neistinitost smo upravo analizirali, jedna formula logičkoga kvadrata uvrštena i podređena pod drugu. Cijeli iskaz ima oblik $\forall$x($p \to q'$), pri čem je sam q' oblika $\forall$y($q \to r$). Iskaz ima dakle oblik $\forall$x($p \to \forall$y($q \to r$)). $\forall$y($q \to r$) stoji i pod $\forall$x i pod $\forall$y.

Iskaz mora biti neistinit kao i $\forall x\forall yRxy$ u uskome predmetnome području:

PRIMJER 4.16 (ISTINITOST ISKAZA $\exists x(Bx \land \exists$Y(BY $\land\neg Rxy))$) *Iskaz '$\exists x(Bx\land\exists y(By \land\neg Rxy))$', u predloženu modelu, hrvatski znači 'Neki broj nije manji od nekoga broja', te je u tom smislu, kako znademo, istinit – kao i $\exists x\exists yRxy$ u* *odgovarajućem modelu s uskom predmetnome području.. Analizu možemo lako provesti na način sličan kao u prethodnome primjeru.*

Iskaz je oblika $\exists \mathrm{x}(p \land q')$*, a* q' *je oblika* $\exists \mathrm{y}(q \land r)$*. Prema tome cijeli iskaz ima oblik* $\exists \mathrm{x}(p \land \exists \mathrm{y}(q \land r))$*.* $\exists \mathrm{y}(q \land r)$ *u dosegu je količiteljâ* $\exists$x *i* $\exists$y.

PRIMJER 4.17 (ISTINITOST ISKAZA $\forall x(Bx \to \exists y(By \land Rxy))$) *Iskaz '*$\forall x(Bx \to \exists y(By \land Rxy))$*', prema našem modelu, hrvatski možemo izraziti rečenicom 'Svaki je broj manji od nekoga broja'.*

1	$\forall x(Bx \to \exists y(By \land Rxy))^{c\checkmark d\checkmark}$		
2	$Bc \to \exists y(By \land Rcy)$ ✓		1$\forall$
	/	\	
3	$\neg Bc$	$\exists y(By \land Rcy)$ ✓	2 $\to$
4	○	$Bd \land Rcd$ ✓	
5		Bd	4$\land$
6		Rcd	4$\land$
7		$Bd \to \exists y(By \land Rdy)$ ✓	1$\forall$
		/ \	
8		$\neg Bd$ $\exists y(By \land Rdy)$ ✓	7 $\to$
9		× $Be \land Rde$ ✓	8$\exists$
10		Be	9$\land$
11		Rde	9$\land$
		⋮	

Istinitosno stablo pokazuje da je zadani iskaz istinit pod uvjetom da bilo koji predmet, primjerice predmet označen pomoću 'c', nije broj ili pak ima broj (označimo ga pomoću 'd') takav da je predmet što ga označuje 'c' manji od predmeta označenoga pomoću 'd'. No i taj potonji predmet traži novi predmet (označili smo ga pomoću 'e') od kojega je manji, itd. Iskaz će, kako vidimo, biti istinit, kao i '$\forall x \exists y Rxy$*', u modelu s uskim (ali beskonačnim) predmetnim područjem.*

Iskaz je oblika $\forall \mathrm{x}(p \to q')$*, a* q' *je oblika* $\exists \mathrm{y}(q \land r)$*. Cijeli je iskaz, prema tome, oblika* $\forall \mathrm{x}(p \to \exists y(q \land r))$*.* $\exists y(q \land r)$ *u dosegu je količiteljâ* $\forall$x *i* $\exists$y.

PRIMJER 4.18 (ISKAZ $\exists x(Bx \wedge \forall y(By \rightarrow Rxy))$) *Iskaz '$\exists x(Bx \wedge \forall y(By \rightarrow Rxy))$', u gornjem modelu, znači 'Neki je broj manji od svakoga broja', te je neistinit. Pretpostavimo ipak da je istinit, kako bismo ustanovili koji su njegovi uvjeti istinitosti.*

$$
\begin{array}{lcl}
1\_ & \exists x(Bx \wedge \forall y(By \rightarrow Rxy))\checkmark & \\
2 & Bc \wedge \forall y(By \rightarrow Rcy)\checkmark & 1\exists \\
3 & Bc & 2\neg \rightarrow \\
4 & \forall y(By \rightarrow Rcy)^{c\checkmark} & 2\neg \rightarrow \\
5 & Bc \rightarrow Rcc\checkmark & 4\forall \\
 & / \quad \backslash & \\
6 & \neg Bc \quad Rcc & 5 \rightarrow \\
 & \times \quad \bigcirc &
\end{array}
$$

Uočavamo da je uvjet istinitosti navedenoga iskaza opstojnost broja koji bi bio manji ne samo od svih drugih brojeva, nego i sam od sebe. Kako nema takva pozitivnoga cijeloga broja, u modelu s tim brojevima gornji iskaz nikako nije istinit. No ako malo promijenimo tumačenje priroka 'R^2', možemo dobiti istinit iskaz. To je, primjerice, slučaj ako priroku 'R^2' kao njegovo značenje pridružimo relaciju "manji ili jednak":

R^2: ___ $\leq$ ___ .

PRIMJER 4.19 (ISKAZ $\forall x \exists y(Bx \rightarrow (By \wedge Rxy))$) *Iskaz '$\forall x \exists y(Bx \rightarrow (By \wedge Rxy))$' manja je preformulacija iskaza iz primjera 4.17 ('Svaki je broj manji od nekoga broja'). Razlika je u tome što je unutrašnji količitelj sada pomaknut neposredno pred pogodbu. Provjerite njegove istinitosne uvjete istinitosnim stablom.*

Poopćavajući posljednji primjer, možemo reći da se u svim primjerima 4.15–4.18 unutrašnji količitelj može staviti pred sve zagrade, odmah iza glavnoga količitelja.

Vježbe

1. Prevedite na hrvatski sljedeće iskaze (B^1: ___ je broj, M^2: ___ je manji od ___):

   (a) $\forall x(Bx \to \neg\forall y(By \to Mxy))$,

   (b) $\forall x(Bx \to \forall y(By \to \neg Mxy))$,

   (c) $\forall x\forall y((Bx \wedge By) \to \neg Mxy)$,

   (d) $\exists x(Bx \wedge \neg\exists y(By \wedge Mxy))$,

   (e) $\exists x(Bx \wedge \exists y(By \wedge \neg Mxy))$,

   (f) $\exists x\exists y(Bx \wedge (By \wedge \neg Mxy))$,

   (g) $\forall x(Bx \to \neg\exists y(By \wedge \neg Mxy))$,

   (h) $\forall x\exists y(Bx \to (By \wedge \neg Mxy))$,

   (i) $\exists x(Bx \wedge \neg\forall y(By \to Mxy))$,

   (j) $\exists x(Bx \wedge \forall y(By \to \neg Mxy))$.

2. Provjerite tablično istinitosnu vrijednost iskazâ iz vježbe 1!

3. Prevedite na hrvatski sljedeće iskaze (B^1: ___ je broj, D^2: ___ je djeljiv s ___):

   (a) $\forall y\forall x(Bx \to (By \to \neg Dxy))$,

   (b) $\forall y\exists x(Bx \to (By \wedge \neg \mathrm{Dxy}))$,

   (c) $\neg\forall y\forall x(Bx \to (By \to Dxy))$,

   (d) $\exists y\neg\exists x(Bx \wedge (By \wedge \neg \mathrm{Dxy}))$,

   (e) $\exists x\forall y(Bx \wedge (By \to \neg \mathrm{Dyx}))$,

   (f) $\neg\forall x\forall y((Bx \wedge \mathrm{By}) \to \neg \mathrm{Dyx})$,

   (g) $\neg\exists x\exists y(Bx \wedge (\mathrm{By} \wedge \neg \mathrm{Dyx}))$.

4. Prevedite na hrvatski sljedeće iskaze (B^1: ___ je broj, V^2: ___ je veći od ___):

   (a) $\neg\forall y\exists x(Bx \to (By \wedge \mathrm{Vxy}))$.

(b) $\forall y \neg \exists x(Bx \rightarrow (By \wedge \text{Vxy}))$,

(c) $\neg \exists \text{y} \forall x(Bx \wedge (By \rightarrow Vxy))$,

(d) $\exists y \neg \forall x(Bx \wedge (By \rightarrow Vxy))$,

(e) $\neg \forall x \exists \text{y} \ (\text{Bx} \rightarrow (By \wedge \neg \text{Vyx}))$,

(f) $\forall x \neg \exists \text{y} \ (\text{Bx} \rightarrow (By \wedge \neg \text{Vyx}))$,

(g) $\neg \exists x \forall y(Bx \wedge (By \rightarrow \neg \text{Vyx}))$.

4.5 POSTUPCI U PREVOĐENJU

4.5.1 Svođenje na logički kvadrat

Velika je pomoć pri prevođenju ako se u hrvatskoj rečenici i njezinim dijelovima može uočiti neki oblik iz logičkoga kvadrata. Takvim smo se primjerima bavili u poglavlju o višestrukome pokoličavanju. Evo još jednoga, malo složenijega primjera:

> Svaki grad od kojega ima neki južniji grad, jest sjeverniji od nekoga grada.

Cijela rečenica ima oblik **a** sa složenim "podmetom" 'grad od kojega ima neki južniji grad' i sa složenim "prirokom" 'jest sjevernije od nekoga grada'. Sam "prirok" ima oblik **i**, a podoblik **i** otkrivamo i u "podmetu". U modelu:

D: svi predmeti
G^1: ___ je grad,
S^2: ___ je sjeverniji od ___ ,
J^2: ___ je južniji od ___ .

navedenu hrvatsku rečenicu možemo ovako prevesti:

$$\forall x[(Gx \wedge \exists y(Gy \wedge Jyx)) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Sxy)].$$

4.5.2 Postupnost

Ako nam hrvatska rečenica izgleda složenom, možemo ju prevoditi postupno. Vratimo se na gornji primjer. Čim smo otkrili da cijela rečenica ima oblik **a**, to možemo odmah zapisati:

> $\forall x$ (x je grad od kojega ima neki južniji grad $\rightarrow$ x je sjeverniji od nekoga grada).

Zadržimo se najprije na "podmetu". Radi se 1) o gradu i 2) o tom da od njega ima neki južniji grad. Izraz 'neki' upućuje nas na to da se radi o posebnome obliku (**i** ili **o**). Pokušajmo drugi konjunkt preformulirati tako da što jasnije izrazimo njegov "podmet" i "prirok". Dobivamo formulaciju: 'Neki je grad južniji od grada x':

> $\forall x[(Gx\wedge$ neki je grad južniji od $x)) \rightarrow x$ je sjeverniji od nekoga grada)].

Prevedimo sad cijeli "podmet":

> $\forall x[(Gx \wedge \exists y(Gy \wedge Jyx)) \rightarrow x$ je sjeverniji od nekoga grada)].

Posljedak pogodbe također sadrži izraz 'neki'. Stoga posljedak također možemo jasnije preformulirati u oblik logičkoga kvadrata (**i**): 'Neki je grad sjeverniji od grada x'. Sada možemo dovršiti prijevod na $\mathscr{L}_p$:

> $\forall x[(Gx \wedge \exists y(Gy \wedge Jyx)) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Sxy)]$.

4.5.3 Magareće rečenice

U nekim slučajima i pri postupnome prevođenju zapadamo u poteškoće. Npr.

> Neki grad koji nije sjeverniji od nekoga grada, nije ni južniji od njega.

Postupnim prevođenjem, dobivamo sljedeće:

> $\exists x((Gx \wedge \exists y(Gy \wedge \neg Sxy)) \wedge \neg Jxy)$!

Tu je posljednji pojavak varijable y ostao slobodan, pa prema tome cijela formula uopće nije (istinit ili neistinit) iskaz. Stoga količitelj $\exists y$ mora na neki način uhvatiti u svoj doseg i pojavak varijable 'y' na kraju formule. To u našem primjeru postižemo tako da količitelj pomaknemo neposredno pred prvu lijevu zagradu:

$$\exists x \exists y((Gx \wedge (Gy \wedge \neg Sxy)) \wedge \neg Jxy).$$

Rečenice kao što je navedena hrvatska, nazivlju se magarećim rečenicama. Zaostanak zamjenice 'njega' na kraju rečenice, što se u prijevodu na $\mathscr{L}_p$ očituje kao zaostala slobodna varijabla, doista podsjeća na magarca koji je stao i stavio nas pred problem kako ga pridobiti da se pokrene naprijed.

4.5.4 Razni hrvatski izrazi za pokoličavanje

Općost ne mora u hrvatskome uvijek biti izražena sa 'svi' ili 'svaki', nego se katkad može izraziti i običnom množinom ('Ljudi su smrtni') ili pak jedninom ('Čovjek je smrtan'). No i opstojnost se u hrvatskom također može izreći i običnom jedninom ('Čovjek je ušao u dvoranu') ili množinom ('Ljudi ulaze u dvoranu'). Samo nam kontekst izricanja rečenice ili razumijevanje govoriteljeve nakane može pokazati je li pri običnoj množini ili jednini riječ o općosti ili samo o opstojnosti.

Čak se i izrazom 'neki' može izraziti općost. Primjerice, u rečenici:

> Ako je neki grad sjeverniji od Rima, Rim je južniji od njega.

U našem modelu (v. pododjeljak 4.5.1) dodajemo još jedno pridruživanje:

> r: Rim

U navedenoj je rečenici očito riječ o nekom općem odnosu, o uzajamnosti sjevernijega i južnijega položaja. Stoga gornju rečenicu treba upravo tako i prevesti:

$$\forall x((Gx \wedge Sxr) \rightarrow Jrx).$$

Evo i maloga usložnjenja gornjega primjera:

> Ako je neki grad sjeverniji od nekoga grada, taj je potonji grad južniji od prvoga.

Rečenicu možemo prevesti ovako:

$$\forall x \forall y((Gx \wedge (Gy \wedge Sxy)) \rightarrow Jyx),$$

ili:

$$\forall x \forall y((Gx \wedge Gy) \rightarrow (Sxy \rightarrow Jyx)).$$

4.5.5 Prijevodne alternative

Upravo smo prethodnim prijevodom naznačili da ne mora, niti najčešće ima samo jedan prijevod s hrvatskoga na $\mathscr{L}_p$. Sam smisao hrvatske rečenice može nas voditi do različitih prijevoda, koji se pokazuju logički istovrijednima (o semantičkoj i sintaktičkoj istovrijednosti u logici prvoga reda bit će riječ poslije).

Alternative se ne odnose samo na poveznike, nego i na količitelje. Npr. rečenicu

Nijedan grad nije sjeverniji od svih gradova

sasvim je naravno prevesti s

$$\forall x(Gx \rightarrow \neg \forall y(Gy \rightarrow Sxy)),$$

kao i s

$$\neg \exists x(Gx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Sxy)).$$

Često se, također, može mijenjati i položaj količiteljâ. Primjerice,

Svaki je broj neparan ili veći od nekoga broja

u modelu s pozitivnim cijelim brojevima kao predmetnim područjem možemo prevesti ovako:

$$\forall x(Nx \vee \exists y Vxy),$$

gdje N^1 znači ‘neparan’, a V^2 ‘veći’, ali i ovako:

$$\forall x \exists y(Nx \vee Vxy).$$

Poslije ćemo moći dokazati i logičku istovrijednost tih dvaju prijevoda. Sada samo općenito kažimo da se doseg količitelja ∀x i ∃x može s jednoga disjunkta proširiti na **disjunkciju** ako drugi disjunkt ne sadrži slobodan pojavak x. Isto vrijedi i za **konjunkciju**. To također vrijedi za **pogodbu**, s time da se količitelj kojega se doseg s prednjaka proširio i na pogodbu mijenja (opći u opstojni, a opstojni u opći).

4.5.6 Preformulacije

Gdjekad u hrvatskome nailazimo na izraze kojima je potrebna preformulacija da bismo ih mogli prevesti. Primjerice, u rečenici

> Ima gradova iste veličine.

Ako upotrijebimo prirok ‘biti veći’, V^2, možemo ‘biti iste veličine’ preformulirati u ‘ne biti veći jedan od drugoga’ i gornju rečenicu prevesti na sljedeći način:

$$\exists x \exists y((Gx \wedge Gy) \wedge \neg(Vxy \vee Vyx)).$$

Vježbe

4.6 FORMALNA DEFINICIJA ISTINE

Dosad smo, govoreći o istinitosti pokoličenih iskaza, neformalno govorili o zadovoljenosti formule predmetom i pritom se u odlučivanju o zadovoljenosti služili analogijom s istinitošću iskaza. Sada ćemo formalno definirati zadovoljenost formule i to pomoću pojma vrjednovanja varijabla. Na temelju toga ćemo moći kratko definirati istinu u logici prvoga reda.

4.6.1 VRJEDNOVANJE VARIJABLA

DEFINICIJA 4.14 (VRJEDNOVANJE VARIJABLA) *Vrjednovanje varijabla, v, jest pridruživanje člana predmetnoga područja svakoj predmetnoj varijabli.*

Ako je v vrjednovanje varijabla, vrijednost koju v pridružuje predmetnoj varijabli jest član predmetnoga područja, tj.:

$$v(x) \in \mathrm{D}.$$

Kao i u slučaju predmetnih konstanata, valja imati na umu sljedeće:

1. različitim varijablama može se pridružiti isti član, i
2. ne mora se svaki član pridružiti nekoj varijabli.

Slično kao i kad definiramo tumačenje, **neformalno** možemo uzimati u obzir vrjednovanje samo **slobodnih** varijabla koje su javljaju u analiziranim formulama.

Nadalje, vrjednovanje varijabla nije dio ali je uvijek povezano s nekim modelom $\mathfrak{M}$.

PRIMJER 4.20 *Neka vrjednovanja varijabla v_1, v_2, v_3 pridružuju varijabli x sljedeće vrijednosti:*

	x
v_1	*Split*
v_2	*Zadar*
v_3	*Osijek*

Tj.

$$v_1(x) = \textit{Split},$$
$$v_2(x) = \textit{Zadar},$$
$$v_3(x) = \textit{Osijek}.$$

Postavimo model $\mathfrak{M}$ (s tumačenjem $\mathcal{T}$):

D: naselja,
G^1: ___ je grad.

Promotrimo sada kako se prema različitim vrjednovanjima varijabla v_1, v_2, v_3 itd. u modelu $\mathfrak{M}$ mijenja značenje formule

$$Gx.$$

U $\mathfrak{M}$ formula ‘Gx’ dobiva sljedeća značenja, neformalno izražena hrvatski:

za v_1*: Split je grad,*
za v_2*: Zadar je grad,*
za v_3*: Osijek je grad.*

PRIMJER 4.21 *Proširimo sada odredbe vrjednovanja varijabla* v_1, v_2, v_3 *i na varijablu 'y' na sljedeći način:*

	x	y
v_1	*Split*	*Rijeka*
v_2	*Zadar*	*Split*
v_3	*Osijek*	*Zagreb*

Tj.

$$v_1(x) = \textit{Split}, \quad v_1(y) = \textit{Rijeka}$$
$$v_2(x) = \textit{Zadar}, \quad v_2(y) = \textit{Split}$$
$$v_3(x) = \textit{Osijek}, \quad v_3(y) = \textit{Zagreb}$$

Primijenimo model $\mathfrak{M}$ *iz prethodnoga primjera (4.20) s time da definiramo vrijednost još jednoga priroka:*

V^2*: ___ je veći od ___ .*

Promotrimo sada kako se mijenja značenje formule 'Vxy' u ovisnosti o vrjednovanjima varijabla definiranima vrijednostima za varijable 'x' i 'y'. U modelu $\mathfrak{M}$ *dobivamo sljedeća značenja formule '*Vxy*', izražena hrvatski:*

za v_1*: Split je veći od Rijeke,*
za v_2*: Zadar je veći od Splita,*
za v_3*: Osijek je veći od Zagreba.*

Inačica vrjednovanja varijabla Za definiciju zadovoljenosti formule potreban nam je i pojam inačice vrjednovanja varijabla, $v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]$.

DEFINICIJA 4.15 (INAČICA VRJEDNOVANJA VARIJABLA) *Inačica vrjednovanja varijabla* $v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]$ *jest vrjednovanje varijabla koje se od vrjednovanja varijabla* v *razlikuje najviše po tome što varijabli* x *pridružuje član* d *predmetnoga područja.*

Primijetimo da v[d/x] i v mogu biti potpuno jednaka, a ako se razlikuju, onda se razlikuju samo prema tome koji predmet pridružuju varijabli x: v[d/x] pridružuje varijabli x predmet d (kako je i naznačeno u uglatim zagradama), a v pridružuje varijabli x neki drugi predmet.

Primjer 4.22 *Neka v pridružuje varijablama ‘x’, ‘y’ i ‘z’ sljedeće vrijednosti:*

x: Zagreb,
y: Split,
z: Rijeka
itd.

Inačica v[Osijek/y] tada varijablama pridružuje sljedeće vrijednosti:

x: Zagreb,
y: Osijek,
z: Rijeka
itd.

Odnosno, formalno zapisano, ako

$v(x)$ = Zagreb,
$v(y)$ = Split,
$v(z)$ = Rijeka
itd.,

onda

v[Osijek/y](x) = Zagreb,
v[Osijek/y](y) = Osijek,
v[Osijek/y](z) = Rijeka
itd.

Razlika je samo u tome koji se predmet pridružuje varijabli ‘y’, jer inačica v[Osijek/y], kako je naznačeno u uglatim zagradama, unosi promjenu samo na varijabli ‘y’.

4.6.2 ZADOVOLJENOST FORMULA

Već i prije formalne definicije zadovoljenosti možemo reći da u primjerima iz prethodnoga poglavlja i v_1 i v_2 i v_3 zadovoljavaju formulu Gx jer su i Split i Zadar i Osijek gradovi, tj. jer imaju svojstvo (obilježje) “grad”.

Nadalje, v_1 zadovoljava formulu Vxy jer je Split veći od Rijeke, ali ni v_2 ni v_3 ne zadovoljavaju tu formulu je Zadar nije veći od Splita niti Osijek od Zagreba. Tj. Split stoji u relaciji “veći” prema Rijeci, dok Zadar prema Splitu, kao ni Osijek prema Zagrebu ne stoje u toj relaciji.

Izrazimo sad sve to formalnu, u skladu s našim dosadašnjim semantičkim definicijama.

$$
\begin{aligned}
&\text{Split} \in \mathcal{T}(G^1),\\
&\text{Zadar} \in \mathcal{T}(G^1),\\
&\text{Osijek} \in \mathcal{T}(G^1),\\
&\langle \text{Split, Rijeka} \rangle \in \mathcal{T}(V^2),\\
&\langle \text{Zadar, Split} \rangle \notin \mathcal{T}(V^2),\\
&\langle \text{Osijek, Zagreb} \rangle \notin \mathcal{T}(V^2).
\end{aligned}
$$

Na temelju pojma vrjednovanja varijabla možemo sada formalno odrediti pojam zadovoljenosti formule i zatim pojam istinitosti iskaza. Pritom ćemo umjesto duge formulacije

u modelu $\mathfrak{M}$ vrjednovanje varijabla v zadovoljava formulu p,

jednostavno pisati:

$$\mathfrak{M} \models_v p,$$

a umjesto

u modelu $\mathfrak{M}$ formula (iskaz) p je istinita,

pisat ćemo:

$$\mathfrak{M} \models p.$$

Jednostavne formule

Zadovoljenost jednostavne formule vrjednovanjem varijabla u modelu definiramo ovako:

$$\mathfrak{M} \models_v \mathrm{P}\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n \text{ ako i samo ako } \langle [\![\mathrm{t}_1]\!]^{\mathfrak{M}}_v, \ldots, [\![\mathrm{t}_n]\!]^{\mathfrak{M}}_v \rangle \in \mathcal{T}(\mathrm{P}^n)$$

Pri tome (prisjetimo se), neka je P^n *n*-mjesni prirok, a t predmetna oznaka (tj. konstanta ili varijabla). Također, ako je t predmetna konstanta, $[\![\mathrm{t}]\!]^{\mathfrak{M}}_v$ je vrijednost koju $\mathcal{T}$ pridružuje konstanti, a ako je t predmetna varijabla, $[\![\mathrm{t}]\!]^{\mathfrak{M}}_v$ je vrijednost koju vrjednovanje varijabla v pridružuje varijabli. Formalno zabilježeno:

$$[\![\mathrm{t}]\!]^{\mathfrak{M}}_v = \begin{cases} \mathcal{T}(\mathrm{c}) & \text{ako t = c,} \\ v(\mathrm{x}) & \text{ako t = x.} \end{cases}$$

Primjer 4.23 *Analizirajmo zadovoljenost formule 'Pxc_1' dvama vrjednovanjima varijabla v_1 i v_2:*

	x
v_1	5
v_2	1

u sljedećem modelu $\mathfrak{M}$:

D*: 1, 2, 3, . . . ,*
c_1*: 1,*
P^2*: ___ je veće od ___ ,*

1. *Primjenom vrjednovanja v_1 na formulu 'Pxc_1' dobivamo uređen par $\langle v_1(x), \mathcal{T}(c_1)\rangle$, tj. (kad uvrstimo vrijednosti) par $\langle 5, 1\rangle$. $\langle 5, 1\rangle$ je član skupa $\mathcal{T}(P^2)$, jer je 5 veće od 1, pa je formula 'Pxc_1' vrjednovanjem v_1 zadovoljena.*

2. *Primjenom vrjednovanja v_2 na formulu 'Pxc_1' u tumačenju $\mathcal{T}$ dobivamo uređen par $\langle v_2(x), \mathcal{T}(c_1)\rangle$, tj. par $\langle 1, 1\rangle$. $\langle 1, 1\rangle$ nije član skupa $T(P^2)$, jer 1 nije veće od 1, pa formula 'Pxc_1' vrjednovanjem v_2 nije zadovoljena.*

Ta dva slučaja možemo prikazati tablicom:

	x	c_1	Pxc_1
v_1	*5*	*1*	$\models$
v_2	*1*	*1*	$\not\models$

Sastavljene formule

Njihovo je vrjednovanje analogno vrjednovanju sastavljenih iskaza u iskaznoj logici:

$\mathfrak{M} \models_v \neg p$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \not\models_v p$.
$\mathfrak{M} \models_v (p \wedge q)$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v p$ i $\mathfrak{M} \models_v q$
$\mathfrak{M} \models_v (p \vee q)$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v p$ ili $\mathfrak{M} \models_v q$.
$\mathfrak{M} \models_v (p \rightarrow q)$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \not\models_v p$ ili $\mathfrak{M} \models_v q$.
$\mathfrak{M} \models_v (p \leftrightarrow q)$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v p, q$ ili $\mathfrak{M} \not\models_v p, q$.

PRIMJER 4.24 *Uzmimo za* ***primjer*** *formulu '*$(Qc_{10}x \wedge Pyc_{10}) \rightarrow \neg Qyx$*' i ispitajmo ju na dvama vrjednovanjima varijabla* v_1 *i*v_2*:*

	x	y
v_1	*2*	*12*
v_2	*2*	*11*

Postavimo model $\mathfrak{M}$*:*

D: 1, 2, 3, . . . ,
c_{10}*: 10,*
P^2*: __ je veće od __ ,*
Q^2*: __ je djeljivo s __ .*

Zadanu formulu u modelu $\mathfrak{M}$ *zadovoljava vrjednovanje* v_2*, a ne zadovoljava ju vrjednovanje* v_1*, kako to vidimo u sljedećoj tablici:*

	x	y	$(Qc_{10}x$	$\wedge$	$Pyc_{10})$	$\rightarrow$	$\neg Qyx$
v_1	*2*	*12*	$\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$
v_2	*2*	*11*	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$

Pokoličene formule

Opće formule Formula oblika $\forall \mathrm{x}p$ govori nešto o svakom članu predmetnoga područja. Stoga, da bismo ustanovili zadovoljava li neko vrjednovanje varijabla v u modelu $\mathfrak{M}$ takvu formulu, potrebno je to vrjednovanje preinačivati, i to tako da svaki član predmetnoga područja u zasebnoj inačici postane vrijednost varijable x.

> $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x}p$ ako i samo ako za svaki član d predmetnoga područja, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} p$.

Valja uočiti da gornje pravilo vrjednovanja općega iskaza traži da, u modelu $\mathfrak{M}$,

1. v zadovoljava cijelu formulu $\forall \mathrm{x}p$, a da
2. $v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]$ zadovoljava podformulu p (za svaki $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$).

PRIMJER 4.25 *Neka kao primjer posluži formula '$\forall xQxy$'. Promotrimo zadovoljavaju li tu formulu, u modelu $\mathfrak{M}$ iz prethodnoga primjera, vrjednovanje v_1 koje slobodnoj varijabli 'y' pridružuje broj 1, i vrjednovanje v_2 koje slobodnoj varijabli 'y' pridružuje broj 2:*

	y
v_1	*1*
v_2	*2*

Neformalno znademo da je svaki broj djeljiv s 1, ali da nije svaki djeljiv s 2, te da će prema tome vrjednovanje v_1 zadovoljavati formulu '$\forall xQxy$', a vrjednovanje v_2 neće.

*No provedimo **formalnu** analizu. Vrjednovanje varijabla v_1 u modelu $\mathfrak{M}$ zadovoljava formulu '$\forall xQxy$' ako i samo ako za svaki broj* d, *inačica* $v_1[\mathrm{d}/x]$ *zadovoljava podformulu 'Qxy'. To je doista slučaj jer su svi uređeni parovi dobiveni inačicama članovi skupa $\mathcal{T}(Q^2)$. To možemo prikazati sljedećom tablicom:*

	x	y	Qxy
$v_1[1/x]$	*1*	*1*	$\models$
$v_1[2/x]$	*2*	*1*	$\models$
$v_1[3/x]$	*3*	*1*	$\models$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dakle, $\mathfrak{M} \models_{v_1} \forall xQxy$.

Međutim, vrjednovanje v_2 *u* $\mathfrak{M}$ *ne zadovoljava formulu '*$\forall xQxy$*' jer inačica* $v_2[1/x]$ *ne zadovoljava podformulu '*Qxy*' i to zato jer uređen par* $\langle 1, 2\rangle \notin \mathcal{T}(Q^2)$*:*

	x	y	Qxy
$v_2[1/x]$	*1*	*2*	$\not\models$

Dakle, $\mathfrak{M} \not\models_{v_2} \forall xQxy$.

Opstojne formule Formula oblika $\exists \mathrm{x} p$ govori nešto barem o jednom, neodređeno kojem, članu predmetnoga područja. I tu ćemo morati upotrijebiti pojam inačice v[d/x].

> $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} p$ ako i samo ako opstoji barem jedan član d predmetnoga područja za koji $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d/x}]} p$.

Valja i u ovom pravilu uočiti razliku da govorimo o tom da, u modelu $\mathfrak{M}$,

1. v zadovoljava formulu $\exists \mathrm{x} p$, a

2. v[d/x] zadovoljava podformulu p (barem za jedan d $\in$ D).

Primjer 4.26 *Uzmimo za* ***primjer*** *formulu '*$\exists xPxy$*'. Ispitajmo njezinu zadovoljenost vrjednovanjem varijabla* v_1*, koje slobodnoj varijabli 'y' pridružuje broj 1, i vrjednovanjem* v_2*, koje slobodnoj varijabli 'y' pridružuje broj 2:*

	y
v_1	*1*
v_2	*2*

Neka i jedno i drugo vrjednovanje bude u okviru modela $\mathfrak{M}$*:*

D: *1, 2, 3, ...,*
P^2: ___ *je (neposredni) prethodnik od* ___ .

Neformalno možemo uvidjeti da broj 1 nema svoga prethodnika među pozitivnim cijelim brojevima (na koje je ograničeno predmetno područje), dok ga broj 2 ima. Prema tome vrjednovanje v_1 *u* $\mathfrak{M}$ *ne zadovoljava formulu* $\exists xPxy$, *dok ju vrjednovanje* v_2 *zadovoljava.*

Evo i ***formalne*** *semantičke analize. Za vrjednovanje* v_1, *koje broj 1 pridružuje varijabli 'y', možemo postaviti beskonačno mnogo inačica:* $v_1[1/x]$, $v_1[2/x]$, $v_1[3/x]$ *itd. Ali nijedna od tih inačica ne zadovoljava podformulu 'Pxy' jer nijedan od dobivenih uređenih parova* $\langle 1,1\rangle$, $\langle 2,1\rangle$, $\langle 3,1\rangle$ *itd. nije član skupa* $\mathcal{T}(P^2)$. *Prema tome, vrjednovanje varijabla* v_1 *u* $\mathfrak{M}$ *ne zadovoljava formulu '*$\exists xPxy$*'. Prikažimo to tablično:*

	x	y	Pxy
$v_1[1/x]$	*1*	*1*	$\not\models$
$v_1[2/x]$	*2*	*1*	$\not\models$
$v_1[3/x]$	*3*	*1*	$\not\models$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dakle, $\mathfrak{M} \not\models_{v_1} \exists xPxy$.

No za vrjednovanje v_2, *koje varijabli 'y' pridružuje broj 2, možemo postaviti inačicu* $v_2[1/x]$, *koja zadovoljava podformulu 'Pxy' jer je uređen par* $\langle 1,2\rangle$ *član skupa* $\mathcal{T}(P^2)$. *Stoga vrjednovanje varijabla* v_2 *u* $\mathfrak{M}$ *zadovoljava formulu '*$\exists xPxy$*'. Evo i tabličnoga prikaza:*

	x	y	Pxy
$v_2[1/x]$	*1*	*2*	$\models$

Dakle, $\mathfrak{M} \models_{v_2} \exists xPxy$.

Definicija zadovoljenosti formule

Ujedinimo sada sve gore naveden slučaje zadovoljenosti formule u jednu definiciju:

DEFINICIJA 4.16

1. $\mathfrak{M} \models_v \mathrm{Pt}_1, \ldots, \mathrm{t}_n$ *akko* $\langle [\![\mathrm{t}_1]\!]_v^{\mathfrak{M}}, \ldots, [\![\mathrm{t}_n]\!]_v^{\mathfrak{M}} \rangle \in \mathcal{T}(\mathrm{P}^n)$,
2. $\mathfrak{M} \models_v \neg p$ *akko* $\mathfrak{M} \not\models_v p$,
3. $\mathfrak{M} \models_v (p \wedge q)$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *i* $\mathfrak{M} \models_v q$,
4. $\mathfrak{M} \models_v (p \vee q)$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v q$,
5. $\mathfrak{M} \models_v (p \rightarrow q)$ *akko* $\mathfrak{M} \not\models_v p$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v q$,
6. $\mathfrak{M} \models_v (p \leftrightarrow q)$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p, q$ *ili* $\mathfrak{M} \not\models_v p, q$,
7. $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x} p$ *akko za svaki* $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d/x}]} p$,
8. $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} p$ *akko barem za jedan* $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d/x}]} p$.

Sljedeći stavak tvrdi da zadovoljenost formule p ovisi samo o vrijednostima onih varijabla koje se javljaju u p. Tj. vrijednosti varijabla koje se ne javljaju u p ne utječu na zadovoljenost formule p.

Stavak 4.1 *Neka formula p sadrži slobodne varijable* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ *i neka se vrjednovanja varijabla v i v' poklapaju u vrijednostima koje pridružuju varijablama* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$. *Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{M} \models_v p \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models_{v'} p.$$

Dokaz Naznačit ćemo samo osnovnu ideju dokaza prema pojedinim oblicima formula.

Prema definiciji 4.16 zadovoljenosti formula, za slučaj jednostavne *formule p, vidimo da će v i v' ili oba ili nijedno zadovoljiti p, jer zadovoljenost p ovisi isključivo o onim predmetnim simbolima (dakle i slobodnim varijablama) koji se javljaju u p. Nadalje, prema definiciji 4.16, ni poveznici ni količitelji ne čine zadovoljenost formule p u kojoj su glavni djelatelji, ovisnom o vrijednostima koje v i v' pridružuju varijablama koje se ne javljaju u p. Štoviše, količitelj čini zadovoljenost p neovisnom i o vrijednostima koje v i v' pridružuju vezanoj varijabli* x, *te umjesto toga zadovoljenost p čini ovisnom općenito o svim ili nekim vrijednostima koje se varijabli* x *mogu pridružiti.*

STAVAK 4.2 *Ako je p iskaz, svako vrjednovanje varijabla zadovoljava p ili nijedno.*

Dokaz Dokaz se temelji na tome da se u iskazu ne javljaju slobodne varijable, te dakle, prema stavku 4.1, razlike između po volji izabranih vrjednovanja varijabla v i v′ ne mogu utjecati na zadovoljenost p. Stoga, ako neko vrjednovanje v (u nekome modelu $\mathfrak{M}$) zadovoljava p, onda i svako vrjednovanje v′ (u modelu $\mathfrak{M}$) zadovoljava p. To ćemo dodatno osvijetliti na primjerima u sljedećem pododjeljku.

Istinitost iskaza

Polazeći od stavka 4.2 definiramo istinitost iskaza zadovoljenošću iskaza svakim vrjednovanjem varijabla. Kažemo da su iskazi koji su zadovoljeni svakim vrjednovanjem varijabla u nekom modelu, istiniti u tom modelu, te da su iskazi koji nisu zadovoljeni nijednim vrjednovanjem varijabla u nekom modelu, neistiniti u tom modelu.

DEFINICIJA 4.17 (ISTINITOST I NEISTINITOST ISKAZA)

1. *Ako je p iskaz,* $\mathfrak{M} \models p$ *ako i samo ako za svako v,* $\mathfrak{M} \models_v p$.
2. *Ako je p iskaz,* $\mathfrak{M} \not\models p$ *ako i samo ako za svako v,* $\mathfrak{M} \not\models p$.

Imajmo pri tom na umu da, na temelju stavka 4.2, ako barem jedno vrjednovanje varijabla u nekome modelu zadovoljava iskaz, zadovoljava ga u tom modelu svako vrjednovanje varijabla. Isto tako, ako barem jedno vrjednovanje varijabla u nekome modelu ne zadovoljava iskaz, ne zadovoljava ga u tom modelu nijedno vrjednovanje varijabla.

Pojasnimo te definicije na primjerima složenoga jednostavnoga iskaza i općega iskaza.

PRIMJER 4.27 (ISKAZ Scd) *Postavimo sljedeći model* $\mathfrak{M}$:

D*: gradovi,*
c: Osijek,
d: Split,
S^2*: __ je sjeverniji od __ .*

Izaberimo i neko vrjednovanje varijabla v koje varijabli x pridružuje grad Zagreb. Prema definiciji zadovoljenosti, vrjednovanje v u modelu $\mathfrak{M}$ *zadovoljava formulu '*Scd*' ako i samo ako* $\langle \mathcal{T}(c), \mathcal{T}(d)\rangle \in \mathcal{T}(S^2)$*. Doista,* $\langle \mathcal{T}(c), \mathcal{T}(d)\rangle \in \mathcal{T}(S^2)$*, pa prema tome i v u* $\mathfrak{M}$ *zadovoljava formulu (iskaz) '*Scd*'. U stvari, to što v pridružuje Zagreb varijabli 'x' nema nikakva utjecaja na zadovoljenost formule, jer formula uopće ne sadrži 'x', kao također ni jednu drugu varijablu. Slijedi da i svako drugo vrjednovanje* v' *također zadovoljava formulu '*Scd*', jer promjena vrjednovanja varijabla može utjecati samo na vrijednost varijabla, a '*Scd*' ne sadrži nijednu varijablu.*

PRIMJER 4.28 (ISKAZ $\forall xPxc_1$) *Primijenimo model* $\mathfrak{M}$*:*

> D*: 1, 2, 3, …,*
> c_1*: broj 1,*
> P^2*: ___ je veće od ___ .*

Neka vrjednovanje varijabla v varijabli 'x' pridružuje broj 1. Zadovoljava li to vrjednovanje formulu (iskaz) '$\forall xPxc_1$*'? Prema definiciji, v zadovoljava '*$\forall xPxc_1$*' ako i samo ako za svaki broj* d*, inačica* $v[\mathrm{d}/x]$ *zadovoljava podformulu '*Pxc_1*'. No inačica* $v[1/x]$ *ne zadovoljava podformulu '*Pxc_1*', pa prema tome ni vrjednovanje varijabla v u modelu* $\mathfrak{M}$ *ne zadovoljava formulu (iskaz) '*$\forall xPxc_1$*'. Ima li neko drugo vrjednovanje varijabla* v'*, koje u* $\mathfrak{M}$ *zadovoljava formulu (iskaz) '*$\forall xPxc_1$*'. Koje god vrjednovanje* v' *izabrali, uvijek će biti njegove inačice* $v'[1/x]$*, koja ne zadovoljava podformulu '*Pxc_1*'. Prema tome nijedno vrjednovanje varijabla ne zadovoljava formulu (iskaz) '*$\forall xPxc_1$*'. Prikažimo tu analizu tablično:*

	x	c_1	Pxc_1
$v_1[1/x]$	*1*	*1*	$\not\models$
$v_2[1/x]$	*1*	*1*	$\not\models$
$v_3[1/x]$	*1*	*1*	$\not\models$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dakle, $\mathfrak{M} \not\models \forall xPxc_1$.

Primijetimo u tablici da koju god vrijednost vrjednovanje v_n *pridružilo varijabli 'x', inačica* $v_n[1/x]$ *varijabli 'x' uvijek pridružuje broj 1. To pak* *uvijek dovodi do nezadovoljenosti podformule ‘*Pxc_1*’ inačicom* $v_n[1/x]$*, a time i do nezadovoljenosti formule (iskaza) ‘*$\forall xPxc_1$*’ samim vrjednovanjem* v_n *od kojega inačica potječe.*

Primjeri nam jasno naznačuju da, ili svako vrjednovanje varijabla v u tumačenju $\mathcal{T}$ zadovoljava iskaz, ili nijedno vrjednovanje varijabla v u tumačenju $\mathcal{T}$ ne zadovoljava iskaz. I to zbog toga jer se u iskazu nijedna varijabla ne javlja slobodno.

Vježbe

Poglavlje 5

OČUVANJE ISTINE U LOGICI PRVOGA REDA

Semantičke pojmove koji se odnose na različit način očuvanja istinitosti iskaza kad iskaze promatramo kroz moguće modele, možemo definirati analogno iskaznoj logici. Moramo samo voditi računa da je sada riječ o iskazima novoga jezika $\mathscr{L}_p$, i o modelima i istinitosti kako su definirani u semantici logike prvoga reda. Napomenimo i da se, nakon formalne semantike istine u prethodnome poglavlju, vraćamo na poluformalan pristup iz prijašnjih poglavlja.

5.1 ZADOVOLJIVOST

Najprije prenosimo iz iskazne logike dobro poznatu definiciju i stavak o zadovoljivosti, i to u u analognom obliku, odgovarajućem logici prvoga reda.

DEFINICIJA 5.1 (ZADOVOLJIVOST) *Skup je iskaza* Γ *zadovoljiv ako i samo ako ima barem jedan model u kojem je svaki član* Γ *istinit.*

Skup je iskaza Γ **nezadovoljiv** ako i samo ako nije zadovoljiv, tj. ako i samo ako ni za jedno tumačenje nisu svi članovi skupa Γ istiniti.

I u logici prvoga reda vrijedi stavak o zadovoljivosti skupova i nadskupova koji je potpuno analogan stavku 2.1 iskazne logike:

STAVAK 5.1 *Ako je skup iskaza Δ zadovoljiv, zadovoljiv je i svaki njegov podskup, a ako je Δ nezadovoljiv, nezadovoljiv je i svaki nadskup skupa Δ.*

Dokaz Dokaz je sasvim analogan dokazu stavka 2.1 iskazne logike.

U primjeni stabla polazimo upravo od pojma nezadovoljivosti:

Skup je iskaza Γ **nezadovoljiv** ako i samo ako ima istinitosno stablo za neki podskup skupa Γ u kojem su **svi putovi zatvoreni**.

Evo primjera ispitivanja zadovoljivosti skupa **istinitosnim stablom**. Stablo, kao i u iskaznoj logici, započinje nizanjem članova zadanoga skupa jednoga ispod drugoga.

PRIMJER 5.1 *Je li skup $\{\forall x\forall y(\neg Pxy \rightarrow \neg Qxy), \neg\exists x\exists y(Pxy \wedge Qxy), \exists xQcx\}$ zadovoljiv?*

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \forall x\forall y(\neg Pxy \rightarrow \neg Qxy)\ ^{c\checkmark} & \\
2 & \neg\exists x\exists y(Pxy \wedge Qxy)\ ^{c\checkmark} & \\
3 & \exists xQcx\ \checkmark & \\
4 & Qcd & 3\exists \\
5 & \forall y(\neg Pcy \rightarrow \neg Qcy)\ ^{d\checkmark} & 1\forall \\
6 & \neg Pcd \rightarrow \neg Qcd\checkmark & 5\forall \\
 & / \qquad \backslash & \\
7 & \neg\neg Pcd \qquad \neg Qcd & 6\rightarrow \\
 & | \qquad\qquad \times & \\
8 & Pcd & 7\neg\neg \\
9 & \neg\exists y(Pcy \wedge Qcy)\ ^{d\checkmark} & 2\neg\exists \\
10 & \neg(Pcd \wedge Qcd)\checkmark & 9\neg\exists \\
 & / \ \backslash & \\
11 & \neg Pcd \quad \neg Qcd & 10\neg\wedge \\
 & \times \qquad \times &
\end{array}
$$

Stablo pokazuje da je zadani skup iskaza nezadovoljiv.

5.2 POSLJEDICA I VALJANOST

Definicije i stavke koje ovdje donosimo također su poznati iz iskazne logike, i ovdje ih samo prilagođavamo za logiku prvoga reda.

DEFINICIJA 5.2 (POSLJEDICA) *Iskaz p jest posljedica skupa iskaza Γ ako i samo ako je p istinit u svakome modelu za koji je svaki član skupa Γ istinit.*

Model u kojem je svaki član skupa Γ istinit, a iskaz p neistinit jest protuprimjer, koji pokazuje da p nije posljedica skupa Γ ($\Gamma \not\models p$).

DEFINICIJA 5.3 (SEMANTIČKA VALJANOST ZAKLJUČKA) *Zaključak je semantički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak istinit u svakome modelu u kojem su sve premise istinite.*

DEFINICIJA 5.4 (SEMANTIČKA VALJANOST ISKAZA) *Iskaz je semantički valjan ako i samo ako je istinit u svakome modelu.*

Sljedeći su stavci potpuno su analogni stavcima 2.2–2.6 iskazne logike i dokazuju se na sličan način.

STAVAK 5.2 $\Gamma \models p$ *ako i samo ako je skup* $\Gamma \cup \{\neg p\}$ *nezadovoljiv.*

STAVAK 5.3 *Ako* $\Gamma \models p, \neg p$*, onda je* Γ *nezadovoljiv.*

STAVAK 5.4 *Valjan je iskaz posljedica bilo kojega skupa iskazâ.*

STAVAK 5.5 *Iskaz p je valjan ako i samo ako je p posljedica praznoga skupa iskaza.*

Provjeru **posljedičnoga** odnosa $\Gamma \models p$ istinitosnim stablom svodimo na provjeru **nezadovoljivosti skupa** $\Gamma \cup \{\neg p\}$, tj. skupa što ga čine svi članovi Γ i nijek posljedice. Stoga gradimo stablo za skup što ga čine članovi (ne nužno svi) skupa Γ i iskaz $\neg p$. Takvo stablo, u kojem su svi putovi zatvoreni, pokazuje da posljedični odnos $\Gamma \models p$ vrijedi.

PRIMJER 5.2 *Provjerimo sljedeći posljedični odnos:* $\{\exists x(\forall y Qxy \vee Rx), \forall x \forall y \neg Qxy\} \models$

$\exists xRx$!

$$
\begin{array}{llll}
1 & \exists x(\forall yQxy \vee Rx)\ \checkmark & & \\
2 & \quad \forall x\forall y\neg Qxy\ ^{c\checkmark} & & \\
3\_ & \quad\quad \neg\exists xRx\ ^{c\checkmark} & & \\
4 & \quad \forall yQcy \vee Rc\ \checkmark 1 & & \exists \\
 & \quad\quad\quad / \quad \backslash & & \\
5 & \forall yQcy\ ^{c\checkmark} & Rc & 4\vee \\
6 & \quad | & \neg Rc & 3\neg\exists \\
 & \quad | & \times & \\
7 & Qcc & & 5\forall \\
8 & \forall y\neg Qcy\ ^{c\checkmark} & & 2\forall \\
9 & \neg Qcc & & 8\forall \\
 & \times & &
\end{array}
$$

Svi su putovi zatvoreni. Prema tome posljedični odnos vrijedi.

Primjer 5.3 *Provjerimo je li iskaz ‘$\forall x\forall y(Px \to Qy) \to (\forall x\neg Px \vee \neg\exists xQx)$’*

valjan!

1	$\underline{\neg(\forall x\forall y(Px \to Qy) \to (\forall x\neg Px \vee \neg\exists xQx))\ \checkmark}$	
2	$\forall x\forall y(Px \to Qy)\ ^{d\checkmark e\checkmark}$	$1\neg\to$
3	$\neg(\forall x\neg Px \vee \neg\exists xQx)\ \checkmark$	$1\neg\to$
4	$\neg\forall x\neg Px\ \checkmark$	$3\neg\vee$
5	$\neg\neg\exists xQx\ \checkmark$	$3\neg\vee$
6	$\exists xQx\ \checkmark$	$5\neg\neg$
7	Qe	$6\exists$
8	$\neg\neg Pd\ \checkmark$	$4\neg\forall$
9	Pd	$8\neg\neg$
10	$\forall y(Pd \to Qy)\ ^{e\checkmark d\checkmark}$	$2\forall$
11	$Pd \to Qe\ \checkmark$	$10\forall$
	/ \	
12	$\neg Pd$ $\quad$ Qe	$11\to$
	$\times$ $\quad$ |	
13	$\forall y(Pe \to Qy)\ ^{d\checkmark e\checkmark}$	$2\forall$
14	$Pd \to Qd\ \checkmark$	$10\forall$
15	$Pe \to Qe\ \checkmark$	$13\forall$
16	$Pe \to Qd\ \checkmark$	$13\forall$
	/ \	
17	$\neg Pd$ $\quad$ Qd	$14\to$
	$\times$ $\quad$ / \	
18	$\neg Pe$ $\quad$ Qe	$15\to$
	/ \ $\quad$ / \	
19	$\neg Pe\ Qd\ \neg Pe\ Qd$	$16\to$
	○ ○ ○ ○	

Iskaz nije valjan jer stablo za njegov nijek ima potpune otvorene putove. Primijetimo kako svaki novi opstojni iskaz i nijek općega iskaza uvijek traže u raščlambi novu konstantu, koja se prethodno ne javlja na putu. Lijevi smo put zatvorili zahvaljujući odgovarajućemu ponavljanju tih konstanata u raščlambi općega iskaza. Desni je put potpun i otvoren jer su, uz ostalo, svi opći iskazi sadržani u njem raščlanjeni za svaku konstantu koja se u njem javlja (nema nijedan nijek opstojnoga iskaza). Iako u retku 12 možemo vrlo *jasno vidjeti da će put ostati otvoren, potrebno je sve raščlambe općih iskaza i iz tih raščlamba dobivenih iskaza provesti do kraja (redci 13-19).*

5.3 SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST

DEFINICIJA 5.5 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST, $\simeq$) *Iskazi p i q jesu semantički istovrijedni (kraće $p \simeq q$) ako i samo ako p i q u svakome modelu imaju istu istinitosnu vrijednost.*

PRIMJER 5.4 . *Provjerimo semantičku istovrijednost iskazâ $\forall x(Px \to \exists yGy)$ i $\exists xPx \to \exists yGy$!*

$$
\begin{array}{llll}
1 & \multicolumn{2}{l}{\forall x(Px \to \exists yQy)^{c\checkmark}} & \\
2 & \multicolumn{2}{l}{\neg(\exists xPx \to \exists yQy) \checkmark} & \\
3 & \multicolumn{2}{c}{\exists xPx \checkmark} & 2\neg\to \\
4 & \multicolumn{2}{c}{\neg\exists yQy^{d\checkmark}} & 2\neg\to \\
5 & \multicolumn{2}{c}{Pc} & 3\exists \\
6 & \multicolumn{2}{c}{Pc \to \exists yQy \checkmark} & 1\forall \\
 & / & \backslash & \\
7 & \neg Pc & \exists yQy \checkmark & 6\to \\
 & \times & | & \\
8 & & Qd & 7\exists \\
9 & & \neg Qd & 4\neg\exists \\
 & & \times &
\end{array}
$$

1	$\neg\forall x(Px \to \exists yQy)$ ✓		
2	$\exists xPx \to \exists yQy$ ✓		
3	$\neg(Pc \to \exists yQy)$ ✓		$1\neg\forall$
4	Pc		$3\neg\to$
5	$\neg\exists yQy$ $^{d\checkmark}$		$3\neg\to$
	/	\	
6	$\neg\exists xPx$ $^{c\checkmark}$	$\exists yQy$ ✓	$2\to$
7	$\neg Pc$	|	$6\neg\exists$
	$\times$	|	
8		Qd	$6\exists$
9		$\neg Qd$	$5\neg\exists$
		$\times$	

Oba stabla sa svim putovima zatvorenim pokazuju da su zadani iskazi semantički istovrijedni. Uočimo da se radi o pomicanju količitelja s prednjaka na cijelu pogodbu, o čem je bila riječ u poglavlju o prevođenju.

5.4 ZADOVOLJIVOST, POSLJEDIČNI ODNOS I ISTOVRIJEDNOST FORMULA

U dosadašnjem razmatranju zadovoljivosti, posljedičnoga odnosa i istovrijednosti ograničili smo sa samo na iskaze. Na temelju formalne definicije zadovoljenosti i istinitosti formula u odjeljku od formalnoj definiciji istine (4.6), možemo te pojmove proširiti i definirati ih za formule $\mathscr{L}_p$ općenito.

DEFINICIJA 5.6 (ZADOVOLJIVOST SKUPA FORMULA) *Skup je iskaza Γ zadovoljiv ako i samo ako ima barem jedan model $\mathfrak{M}$ i vrjednovanje varijabla v takvi da za svaku formulu $p \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models_v p$.*

DEFINICIJA 5.7 (NEZADOVOLJIVOST SKUPA FORMULA) *Skup je formula Γ nezadovoljiv ako i samo ako Γ nije zadovoljiv.*

DEFINICIJA 5.8 (POSLJEDICA, $\models$) $\Gamma \models p$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v p$ *kadgod za svaku formulu $q \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models_v q$.*

DEFINICIJA 5.9 (VALJANOST FORMULE) *Formula je valjana ako i samo ako u svakome modelu $\mathfrak{M}$ i za svako vrjednovanje varijabla v, $\mathfrak{M} \models_v p$.*

DEFINICIJA 5.10 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST FORMULA, $\simeq$) *$p \simeq q$ ako i samo ako za svaki model $\mathfrak{M}$ i za svako vrjednovanje varijabla v, $\mathfrak{M} \models_v p$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v q$.*

Navedena se svojstva formula provjeravaju istom metodom istinitosnoga stabla (s istim raščlambenim pravilima) kao i iskazi. Put se zatvara kad se na njem pojave protuslovne slovne formule.

Sematička se svojstva formula (kao i iskaza) mogu poopćiti tako da vrijede **za oblike formula općenito**. Poznati su, primjerice, De Morganovi zakoni za količitelje:

STAVAK 5.6 (DE MORGANOVI ZAKONI ZA KOLIČITELJE)

$$\neg\forall \mathrm{x} p \simeq \exists \mathrm{x} \neg p$$
$$\neg\exists \mathrm{x} p \simeq \forall \mathrm{x} \neg p,$$

Dokaz Nije teško uvidjeti da gornje istovrijednosti općenito vrijede ako se pozovemo na **neformalan** pojam zadovoljenosti formule (kakav smo rabili u prvobitnoj, poluformalnoj definicije istine općih i opstojnih iskaza). Naime, ako nije svakim predmetom zadovoljena formula p, onda je barem jednim predmetom zadovoljena formula $\neg p$. I obratno. Također, ako ne opstoji predmet kojim je zadovoljena formula p, onda je svakim predmetom zadovoljena formula p.

U strogome dokazu moramo se pozvati na **formalnu** definiciju zadovoljenosti formule.

Prva istovrijednost.

Neka $\mathfrak{M} = \langle D, T\rangle \models_v \neg\forall \mathrm{x} p$.	
dakle, $\mathfrak{M} \not\models \forall \mathrm{x} p$,	zadovoljenost nijeka
dakle, barem za jedan $d \in D, \mathfrak{M} \not\models_v [d/x]p$,	zadovoljenost opće formule,
dakle, barem za jedan $d \in D, \mathfrak{M} \models_v [d/x]\neg p$,	zadovoljenost nijeka,
dakle, $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} \neg p$,	zadovoljenost opstojne formule.

Druga istovrijednost. V. dolje vježbu 4!

5.5 PRIJEGLED DEFINICIJA I PROVJERA ZA ISKAZE

1. **Zadovoljivost.** Skup je iskaza Γ zadovoljiv akko ima barem jedan model $\mathfrak{M}$, takav da za svaki iskaz $p \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models p$.

   Provjera: u istinitosnome stablu za konačan skup Γ ima barem jedan potpun otvoren ili beskonačan put.

2. **Nezadovoljivost.** Skup je iskaza Γ nezadovoljiv akko nije nezadovoljiv.

   Provjera: u istinitosnome stablu za skup što ga čine (ne nužno svi) članovi skupa Γ, svi su putovi zatvoreni.

3. **posljedica ($\models$).** $\Gamma \models p$ akko $\mathfrak{M} \models p$ kadgod za svaki $q \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models q$.

   Provjera: u istinitosnome stablu za skup što ga čine članovi (ne nužno svi) skupa Γ i $\neg p$, svi su putovi zatvoreni.

4. **semantička valjanost zaključka.** Zaključak je semantički valjan akko je zaglavak posljedica premisa.

   Provjera: u istinitosnome stablu za skup što ga čine premise (ne nužno sve) i nijek zaglavka, svi su putovi zatvoreni.

5. **valjanost iskaza.** Iskaz p je valjan akko u svakome modelu $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models p$.

   Provjera: u istinitosnome stablu za skup $\{\neg p\}$ svi su putovi zatvoreni.

6. **Semantička istovrijednost ($\simeq$).** $p \simeq q$ akko u svakome modelu $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models p$ akko $\mathfrak{M} \models q$.

   Provjera: u istinitosnome stablu za $\{p, \neg q\}$ i u istinitosnome stablu za $\{\neg p, q\}$ svi su putovi zatvoreni.

Vježbe

1. Provjerite jesu li sljedeći skupovi iskaza zadovoljivi

   (a) $\{\forall x((Px \lor \neg Px) \to (Rxa \leftrightarrow Px))\}$,

   (b) $\{\exists x(Rxb \land \neg\exists y(Rxy \lor Ryx))\}$,

   (c) $\{\forall x(Rx \to Qx), \forall x(\neg Rx \to Qx)\}$,

   (d) $\{\neg\exists x(Px \lor \exists yRxy), \exists x(\neg Px \land Rxa\}$,

   (e) $\{\neg(\forall xPx \to \neg\forall xQxc), \exists x\exists y\neg Qyx, \forall x\forall y(\neg Py \lor \neg Qxy)\}$,

   (f) $\{\neg\forall x(\exists yPy \to Qxx), \forall y\forall y(Qxy \to \neg Py), \exists xPx\}$.

2. Provjerite vrijede li sljedeći posljedični odnosi i zaključci:

   (a) $\{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx\} \models \exists xQx$,

   (b) $$\frac{\forall x(P_1x \to P_2x)}{\exists x(P_1x \land P_2x)},$$

   (c) $\models \forall y\neg\exists y((\neg Pxy \to (Qyx \lor Rx)) \lor \neg(\neg Pxy \land (\neg Qyx \land \neg Rx)))$,

   (d) $\{\exists x(Px \lor \exists yQyc)\} \models \forall x(Px \land Qxc)$,

   (e) $\{\exists x\forall y(Ryx \to (\neg Px \land Qd)), \forall x\forall y(Px \to \neg Rxy))\} \models \exists x(\neg Px \land \exists y\neg Ryx)$,

   (f) $\{\forall x(\neg Pxc \to Qdx)\} \models \exists x(Pxc \lor Qdx)$.

3. Provjerite sljedeće tvrdnje o istovrijednosti:

   (a) $\exists x(Px \land \forall yQxy) \simeq \exists x\forall y(Px \land Qxy)$,

   (b) $Pc \to \exists xQx \simeq \exists x(Pc \to Qx)$,

   (c) $\forall xPx \to Qc \simeq \exists x(Px \to Qc)$,

   (d) $\forall x(Px \to \exists y(Py \land Qxy)) \simeq \forall x\exists y(Px \to (Py \land Qxy))$,

   (e) $\forall x(Px \to \forall y(Py \to Qxy)) \simeq \forall x\forall y((Px \land Py) \to Qxy)$.

4. Dokažite na formalnosemantički način i drugu istovrijednost stavka 5.6 (De Morganovi zakoni).

Poglavlje 6

DEDUKTIVNI SUSTAV U LOGICI PRVOGA REDA

Kao i u poglavlju o očuvanju istine, tako ćemo i ovdje težište staviti na proširenja i razlike u odnosu na deduktivni sustav iskazne logike. Ključna je činjenica da se u logici prvoga reda preuzimlju izvodna pravila iz iskaznologičkoga sustava naravne dedukcije i dodaju nova za uvođenje i isključenje općega i opstojnoga količitelja.

6.1 DOKAZI I NOVA IZVODNA PRAVILA

Definicije **dokaza** i **dokažljivosti**, kao i dostupnosti retka i poddokaza, preuzimljemo iz iskazne logike (v. definicije 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4), naravno, vodeći računa da su iskazi sada iskazi jezika $\mathscr{L}_p$ i da se uvode i **nova dokazna pravila**. To znači da se i u deduktivnome sustavu logike prvoga reda javljaju **jednostavni dokazi**, **poddokazi** i **neizravni dokazi**. Nova su pravila uvođenje i isključenje općega i opstojnoga količitelja, koja ćemo sada navesti i prikazati na primjerima. Dokazni ćemo sustav primijenjivati uvijek na iskaze $\mathscr{L}_p$, osim mjestimice, gdje ćemo ga (uz izričito upozorenje) primijeniti i na formule $\mathscr{L}_p$ općenito.

Imajmo stoga na umu da i u logici prvoga reda možemo reći da

> **dokaz** jest niz iskaza (formula) od kojih je svaki pretpostavka ili je izveden prema dokaznome pravilu,

i da

> p jest **dokažljivo** iz skupa Γ (kraće $\Gamma \vdash p$) ako i samo ako ima dokaz iskaza (formule) p iz podskupa skupa Γ.

Isključenje općega količitelja

Tim pravilom iz općega iskaza možemo zaključiti na bilo koji njegov supstitucijski primjer:

$$\begin{array}{r|ll} h & \forall \mathrm{x} p & \\ i & p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) & h \text{ i}\forall \end{array}$$

PRIMJER 6.1 *Evo dokaza u kojem se pet puta primjenjuje pravilo i* $\forall$*:*

$$\{Rcdc \to \forall x \forall y Qxy, Pc \to \forall x \forall y Rxyx, \forall x Px\} \vdash Pc \wedge Qcd.$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|ll} 1 & Rcdc \to \forall x \forall y Qxy & \\ 2 & Pc \to \forall x \forall y Rxyx & \\ 3 & \underline{\forall x Px} & \\ 4 & Pc & 3\ i\forall \\ 5 & \forall x \forall y Rxyx & 4, 2\ i{\to} \\ 6 & \forall y Rcyc & 5\ i\forall \\ 7 & Rcdc & 6\ i\forall \\ 8 & \forall x \forall y Qxy & 1, 7\ i{\to} \\ 9 & \forall y Qcy & 8\ i\forall \\ 10 & Qcd & 9\ i\forall \\ 11 & Pc \wedge Qcd & 4, 10\ u\wedge \end{array}$$

Uvođenje općega količitelja

Ako o nekome predmetu, neovisno o njegovim posebnim obilježjima, vrijedi p, onda p vrijedi o bilo kojem predmetu. Tako, primjerice, u geometriji na temelju jedne konstrukcije pravokutnoga trokuta možemo općenito dokazati Pythagorin poučak. Neovisnosti predmeta o njegovim posebnim obilježjima u deduktivnome sustavu odgovara neovisnost oprimjerujuće konstante o vrijedećim pretpostavkama i o samoj tvrdnji koja se dokazuje. Pod tim uvjetima vrijedi uvođenje općega količitelja:

$$\begin{array}{r|ll} h & p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) & \\ i & \forall \mathrm{x} p & h \text{ u}\forall \end{array}$$

c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama ni u p

Evo kratkoga primjera:

PRIMJER 6.2

$$\{Pc\} \vdash \forall x(Pc \lor Qx).$$

Dokaz

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \underline{Pc} & \\ 2 & Pc \lor Qd & 1\ u\lor \\ 3 & \forall x(Pc \lor Qx) & 2\ u\forall \end{array}$$

Uvođenje opstojnoga količitelja

Iz supstitucijskoga primjera možemo izvesti opstojni iskaz – ako p vrijedi o određenome predmetu, možemo općenitije reći da vrijedi o nekome predmetu. Tomu odgovara pravilo uvođenja opstojnoga količitelja:

$$\begin{array}{r|ll} h & p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) & \\ i & \exists \mathrm{x} p & h \text{ u}\exists \end{array}$$

Primijetimo da p može sadržavati c i na mjestima na kojima c u p(c/x) ne zamijenjuje x. Stoga $\exists$xp još uvijek može na nekim mjestima sadržavati konstantu c. Primjerice, p može biti formula Pcx, p(c/x) je tada Pcc, a $\exists$xp je $\exists xPcx$.

Pogledajmo primjenu toga pravila na **primjeru**!

PRIMJER 6.3

$$\{Rdd, \exists xRxd \to Qcc\} \vdash \exists xQxx.$$

Dokaz

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & Rdd & \\
2 & \underline{\exists xRxd \rightarrow Qcc} & \\
3 & \exists xRxd & 1\ \mathrm{u}\exists \\
4 & Qcc & 1,3\ \mathrm{i} \rightarrow \\
5 & \exists xQxx & 4\ \mathrm{u}\exists
\end{array}
$$

Primijetimo (redak 3) da pri primjeni pravila u∃ *ne moramo svaku oprimjerujuću konstantu zamijeniti vezanom varijablom.*

Isključenje opstojnoga količitelja

To je sljedeće, najsloženije pravilo u deduktivnome sustavu logike prvoga reda:

$$
\begin{array}{r|l}
h & \exists \mathrm{x} p \\
i & \quad \begin{array}{|l} \underline{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})} \end{array} \\
j & \quad \begin{array}{|l} q \end{array} \\
k & q
\end{array}
$$

c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama, ∃x p, ni u q

Uvjeti o ograničenju pojavaka oprimjerujuće konstante c osiguravaju da p(c/x) nema nikakvu drugu ulogu osim uloge primjera za opstojni iskaz – tj. da nema nikakvih posebnih povezanosti s polazištem i ciljem dokazivanja. Pravilo kaže da ono što slijedi iz takva primjera slijedi i iz oprimjerenoga opstojnoga iskaza.

Evo **primjera**:

PRIMJER 6.4

$$\{Ha \rightarrow \exists xFxa, \forall xHx, \exists x\exists yFxy \rightarrow Ga\} \vdash \exists xGx.$$

Dokaz

1	$Ha \to \exists xFxa$	
2	$\forall xHx$	
3	$\exists x\exists yFxy \to Ga$	
4	Ha	2 i$\forall$
5	$\exists xFxa$	1, 4 i $\to$
6	$\quad Fba$	
7	$\quad \exists yFby$	6 u$\exists$
8	$\quad \exists x\exists yFxy$	7 u$\exists$
9	$\quad Ga$	3, 8 i $\to$
10	$\quad \exists xGx$	9 u$\exists$
11	$\exists xGx$	5, 6–10$i\exists$

Iskaz izveden pravilom i$\exists$ *može biti bilo kojega oblika, pa tako i opstojni, kao što je u gornjem primjeru.*

6.2 ZAKLJUČAK I POUČAK

Odredbe sintaktične valjanosti i poučka za logiku prvoga reda možemo analogijski preuzeti iz iskazne logike, imajući na umu da se sada kao iskazi javljaju svi iskazi jezika $\mathscr{L}_p$ i da rabimo sva izvodna pravila deduktivnoga sustava logike prvoga reda. Stoga samo podsjećamo da

> **zaključak** jest **sintaktički valjan** ako i samo ako je zaglavak dokažljiv iz skupa koji se sastoji od premisa,

i da

> iskaz p jest **poučak** ako i samo ako je p dokažljiv iz praznoga skupa iskaza.

Navedimo primjere nekih deduktivnih provjera.

PRIMJER 6.5 (SINTAKTIČKI VALJAN ZAKLJUČAK)

$$\begin{array}{l} \forall x(Sx \rightarrow \exists yTxy) \\ \forall x\neg\exists yTxy \\ \hline \neg\forall zSz \end{array}$$

Dokaz

1	$\forall x(Sx \rightarrow \exists yTxy)$	
2	$\forall x\neg\exists yTxy$	
3	$\quad \forall zSz$	
4	$\quad Sa$	3 i$\forall$
5	$\quad Sa \rightarrow \exists yTay$	1 i$\forall$
6	$\quad \exists yTay$	4, 5 i $\rightarrow$
7	$\quad \neg\exists yTay$	2 i$\forall$
8	$\neg\forall zSz$	3–7 u$\neg$

Zaključak je sintaktički valjan jer je zaglavak dokažljiv iz premisa.

Primjer 6.6 (Poučak)

$$\vdash \forall x(Qx \rightarrow \exists y(Ry \rightarrow \exists zQz)).$$

Dokaz

1	$\quad Qa$	
2	$\quad\quad Ra$	
3	$\quad\quad \exists zQz$	1 u$\exists$
4	$\quad Ra \rightarrow \exists zQz$	2–3 u $\rightarrow$
5	$\quad \exists y(Ry \rightarrow \exists zQz)$	4 u$\exists$
6	$Qa \rightarrow \exists y(Ry \rightarrow \exists zQz)$	1–5 u $\rightarrow$
7	$\forall x(Qx \rightarrow \exists y(Ry \rightarrow \exists zQz))$	6 u$\forall$

U sljedećem stavku pojam poučka proširujemo na formule općenito.

STAVAK 6.1 Formule *su sljedećih oblika poučci:*

$\vdash \forall \mathrm{x} p \rightarrow \exists \mathrm{x} p$
$\vdash \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y} p \rightarrow \forall \mathrm{y} \forall \mathrm{x} p$
$\vdash \exists \mathrm{x} \exists \mathrm{y} p \rightarrow \exists \mathrm{y} \exists \mathrm{x} p$
$\vdash \exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} p \rightarrow \forall \mathrm{y} \exists \mathrm{x} p$
$\vdash (\forall \mathrm{x} p \vee \forall \mathrm{x} q) \rightarrow \forall \mathrm{x}(p \vee q)$
$\vdash \exists \mathrm{x}(p \wedge q) \rightarrow (\exists \mathrm{x} p \wedge \exists \mathrm{x} q)$
$\vdash \forall \mathrm{x}(p \rightarrow q) \rightarrow (\forall \mathrm{x} p \rightarrow \forall \mathrm{x} q)$
$\vdash \exists \mathrm{x}(p \rightarrow q) \rightarrow (\forall \mathrm{x} p \rightarrow \exists \mathrm{x} q)$
$\vdash (\exists \mathrm{x} p \rightarrow \forall \mathrm{x} q) \rightarrow \forall \mathrm{x}(p \rightarrow q)$

Dokaz Svi se oblici poučaka iz stavka 6.1 dokazuju općim oblicima dokaza. Npr.

1	$\exists \mathrm{x} p \rightarrow \forall \mathrm{x} q$	
2	$p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	
3	$\exists \mathrm{x} p$	2 u$\exists$
4	$\forall \mathrm{x} q$	1, 3 i $\rightarrow$
5	$q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	4 i$\forall$
6	$p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \rightarrow q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	2–5 u $\rightarrow$
7	$\forall \mathrm{x}(p \rightarrow q)$	7 u$\forall$
8	$(\exists \mathrm{x} p \rightarrow \forall \mathrm{x} q) \rightarrow \forall \mathrm{x}(p \rightarrow q)$	1–7 u $\rightarrow$

VJEŽBA 6.1 *Dokažite i ostale oblike poučaka iz stavka 6.1!*

6.3 NESUVISLOST I ISTOVRIJEDNOST

Iz iskazne logike analogijski preuzimljemo i definicije nesuvislosti i sintaktične istovrijednosti. Prisjetimo se u tom smislu da

> skup iskaza Γ jest **nesuvisao** ako i samo ako su iz njega dokažljivi iskazi p i $\neg p$,

i da

> iskazi p i q jesu **sintaktički istovrijedni** ako i samo ako je q dokažljivo iz $\{p\}$, a p dokažljivo iz $\{q\}$.

PRIMJER 6.7 (SINTAKTIČNA ISTOVRIJEDNOST ISKAZÂ)

$$\exists x(Fx \to \forall yQy) \dashv\vdash \exists x\forall y(Fx \to Qy).$$

Dokaz

$$\{\exists x(Px \to \forall yQy)\} \vdash \exists x\forall y(Px \to Qy).$$

1	$\exists x(Px \to \forall yQy)$	
2	$\mid\ Pc \to \forall yQy$	
3	$\mid\ \mid\ Pc$	
4	$\mid\ \mid\ \forall yQy$	$2, 3$ i $\to$
5	$\mid\ \mid\ Qd$	4 i$\forall$
6	$\mid\ Pc \to Qd$	3–5 u $\to$
7	$\mid\ \forall y(Pc \to Qy)$	6 u$\forall$
8	$\mid\ \exists x\forall y(Px \to Qy)$	7 u$\exists$
9	$\exists x\forall y(Px \to Qy)$	$1, 2$–8, i$\exists$

$$\{\exists x\forall y(Px \to Qy)\} \vdash \exists x(Px \to \forall yQy).$$

1	$\exists x\forall y(Px \to Qy)$	
2	$\mid\ \forall y(Pc \to Qy)$	
3	$\mid\ \mid\ Pc$	
4	$\mid\ \mid\ Pc \to Qd$	2 i$\forall$
5	$\mid\ \mid\ Qd$	$4, 3$ i $\to$
6	$\mid\ \mid\ \forall yQy$	5 u$\forall$
7	$\mid\ Pc \to \forall yQy$	3–6 u $\to$
8	$\mid\ \exists x(Px \to \forall yQy)$	7 u$\exists$
9	$\exists x(Px \to \forall yQy)$	$1, 2$–8 i$\exists$

Iskazi su sintaktički istovrijedni jer su dokažljivi jedan iz drugoga.

U sljedećem stavku navodimo niz sintaktičnih istovrijednosti među oblicima *formula*.

Stavak 6.2

$\neg\forall \mathrm{x} p \dashv\vdash \exists \mathrm{x}\neg p$	*De Morganov zakon za* $\forall$ *i* $\exists$
$\neg\exists \mathrm{x} p \dashv\vdash \forall \mathrm{x}\neg p$	*De Morganov zakon za* $\forall$ *i* $\exists$
$p \dashv\vdash \forall \mathrm{x} p$, *p ne sadrži slobodan x*	*prazno pokoličavanje*
$p \dashv\vdash \exists \mathrm{x} p$, *p ne sadrži slobodan x*	*prazno pokoličavanje*
$\forall \mathrm{x}(p \wedge q) \dashv\vdash \forall \mathrm{x} p \wedge \forall \mathrm{x} q$	*zakon raspodjeljivosti* $\forall$ *na* $\wedge$
$\exists \mathrm{x}(p \vee q) \dashv\vdash \exists \mathrm{x} p \vee \exists \mathrm{x} q$	*zakon raspodjeljivosti* $\exists$ *na* $\vee$
$\forall \mathrm{x} p \dashv\vdash \forall \mathrm{x}' p(\mathrm{x}'/\mathrm{x})$, *p ne sadrži slobodan* x'	*preimenovanje x*
$\exists \mathrm{x} p \dashv\vdash \exists \mathrm{x}' p(\mathrm{x}'/\mathrm{x})$, *p ne sadrži slobodan* x'	*preimenovanje x*
$\forall \mathrm{x} p \wedge q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \wedge q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\forall$ *preko* $\wedge$
$\forall \mathrm{x} p \vee q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \vee q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\forall$ *preko* $\vee$
$\exists \mathrm{x} p \wedge q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \wedge q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\exists$ *preko* $\wedge$
$\exists \mathrm{x} p \vee q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \vee q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\exists$ *preko* $\vee$
$\forall \mathrm{x} p \rightarrow q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \rightarrow q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*promjena količitelja*
$\exists \mathrm{x} p \rightarrow q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \rightarrow q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*promjena količitelja*
$p \rightarrow \forall \mathrm{x} q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \rightarrow q)$, *p ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\forall$ *preko* $\rightarrow$
$p \rightarrow \exists \mathrm{x} q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \rightarrow q)$, *p ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\exists$ *preko* $\rightarrow$

Vrijede i sintaktične istovrijednosti iz iskazne logike, stavak 3.6, s poopćenjem p, q i r tako da se te metavarijable odnose na formule logike prvoga reda.

Dokaz Sve se istovrijednosti navedene u stavku 6.2 dokazuju općim oblicima dokaza na formulama. Dokažimo, primjerice, istovrijednost $p \rightarrow \exists \mathrm{x} q \dashv\vdash$

$\exists$x($p \to q$) s lijeva na desno!

1	$p \to \exists \mathrm{x} q(\mathrm{x})$	p ne sadrži slobodan x
2	$\mid\ \neg\exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	
3	$\mid\ \mid\ p$	
4	$\mid\ \mid\ \exists \mathrm{x} q(\mathrm{x})$	1, 3 i $\to$
5	$\mid\ \mid\ \mid\ q(\mathrm{d}/\mathrm{x})$	
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p$	
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \mid\ q(\mathrm{d}/\mathrm{x})$	5op
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p \to q(\mathrm{d}/\mathrm{x})$	7–8 u $\to$
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	9 u$\exists$
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg\exists \mathrm{x}(p(\mathrm{x}) \to q)$	2op
12	$\mid\ \mid\ \mid\ q(\mathrm{c}/\mathrm{x}))$	6–11 i$\neg$
13	$\mid\ \mid\ q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	4, 3–12 i$\exists$
14	$\mid\ p \to q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	3–13 u $\to$
15	$\mid\ \exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	14 u$\exists$
16	$\mid\ \neg\exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	2op
17	$\exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	2 – 16 i$\neg$

VJEŽBA 6.2 *Dokažite istovrijednost iz primjera dokaza stavka 6.2 s desna na lijevo!*

VJEŽBA 6.3 *Dokažite i ostale istovrijednosti iz stavka 6.2!*

PRIMJER 6.8 (NESUVISLOST I SUVISLOST SKUPA ISKAZA) *Nesuvisao je skup* $\{\exists xPx \vee \exists xRx, \neg\exists x(Px \vee Rx)\}$*:*

$$\{\exists xPx \vee \exists xRx, \neg\exists x(Px \vee Rx)\} \vdash \bot.$$

Dokaz

1	$\exists x Px \vee \exists x Rx$	
2	$\neg \exists x (Px \vee Rx)$	
3	$\exists x Px$	
4	Pa	
5	$Pa \vee Ra$	4 u$\vee$
6	$\exists x (Px \vee Rx)$	5 u$\exists$
7	$\exists x (Px \vee Rx)$	3, 4–6 i$\exists$
8	$\exists x Rx$	
9	Ra	
10	$Pa \vee Ra$	9 u$\vee$
11	$\exists x (Px \vee Rx)$	10 u$\exists$
12	$\exists x (Px \vee Rx)$	8, 9–11 i$\exists$
13	$\exists x (Px \vee Rx)$	1, 3–7, 8–12 i$\vee$
14	$\neg \exists x (Px \vee Rx)$	2op

Navedeni je dvočlani skup iskaza sintaktički nesuvisao jer smo iz njega u redcima 13 i 14 dokazali protuslovlje.

6.4 KANONSKI DOKAZ

Kao i u iskaznoj logici, tako se i u logici prvoga reda može definirati kanonski oblik dokazivanja. Prethodno, svi se iskazi, članovi skupa koji se ispituje, moraju pretvoriti u **preneksni normalni oblik**. To je oblik u kojem svaki količitelj stoji na početku iskaza, a preostali se dio iskaza desno od količitelja nalazi u dosegu količitelja. Primjerice, sljedeći je iskaz u preneksnome normalnome obliku:

$$\forall x \exists y \forall z ((Px \wedge \neg Qy) \vee (Px \wedge \neg Rz))$$

Niz količitelja na početku formule nazivlje se **predmetkom**, a ostatak formule **matricom**. Preneksni normalni oblik izvodimo na temelju sintaktičkih istovrijednosti formula iz stavka 6.2. Za kanonski dokaz i matricu pretvaramo u disjunktivni normalni oblik, prema zakonima sintaktične istovrijednosti za iskaznu logiku, poopćenima za formule logike prvoga reda.

Uvodimo i pokratu $\perp$ te pravila u$\perp$ i i$\perp$, kao u iskaznoj logici.

Provjerimo kanonskim dokazom, primjerice, je li iskaz

$$(\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \forall xQx))$$

poučak logike prvoga reda! To ćemo učiniti tako da provjerimo je li nijek navedenoga iskaza suvisao. Nijek iskaza najprije pretvaramo u preneksni normalni oblik s matricom u disjunktivnome normalnome obliku:

$\neg(\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \forall xQx))$		
$\dashv\vdash$	$\neg(\neg\forall x(\neg Px \vee Qx) \vee (\neg\forall xPx \vee \forall xQx))$	*svođenje* $\rightarrow$
$\dashv\vdash$	$\forall x(\neg Px \vee Qx) \wedge \neg(\neg\forall xPx \vee \forall xQx)$	*De Morgan, svođenje* $\neg\neg$
$\dashv\vdash$	$\forall x(\neg Px \vee Qx) \wedge (\forall xPx \wedge \neg\forall xQx)$	*De Morgan, svođenje* $\neg\neg$
$\dashv\vdash$	$\forall x(\neg Px \vee Qx) \wedge (\forall xPx \wedge \exists x\neg Qx)$	$\neg\forall$
$\dashv\vdash$	$\forall x(\neg Px \vee Qx) \wedge (\forall xPx \wedge \exists y\neg Qy)$	*preimenovanje x u y*
$\dashv\vdash$	$\forall x(\neg Px \vee Qx) \wedge \exists y(\forall xPx \wedge \neg Qy)$	*pomicanje* $\exists$
$\dashv\vdash$	$\exists y(\forall x(\neg Px \vee Qx) \wedge (\forall xPx \wedge \neg Qy))$	*pomicanje* $\exists$
$\dashv\vdash$	$\exists y\forall x((\neg Px \vee Qx) \wedge (Px \wedge \neg Qy))$	*raspodjeljivost* $\forall$ *na* $\wedge$
$\dashv\vdash$	$\exists y\forall x(((Px \wedge \neg Qy) \wedge \neg Px) \vee ((Px \wedge \neg Qy) \wedge Qx))$	*raspodjeljivost* $\wedge$ *na* $\vee$

Cilj je kanonskoga dokaza u logici prvoga reda izvesti protuslovlje iz zadanoga skupa isključivanjem količitelja, disjunkcija i konjunkcija. U opravdanju, u zagradama bilježimo odakle je dobiveno protuslovlje ($\perp$).

1	$\exists y \forall x(((Px \wedge \neg Qy) \wedge \neg Px) \vee ((Px \wedge \neg Qy) \wedge Qx))$	
2	$\quad \forall x(((Px \wedge \neg Qc) \wedge \neg Px) \vee ((Px \wedge \neg Qc) \wedge Qx))$	
3	$\quad ((Pc \wedge \neg Qc) \wedge \neg Pc) \vee ((Pc \wedge \neg Qc) \wedge Qc)$	i$\forall$
4	$\quad\quad (Pc \wedge \neg Qc) \wedge \neg Pc$	
5	$\quad\quad Pc \wedge \neg Qc$	4 i$\wedge$
6	$\quad\quad Pc$	5 i$\wedge$
7	$\quad\quad \neg Pc$	4 i$\wedge$
8	$\quad\quad \perp$	6, 7 u$\perp$
9	$\quad\quad (Pc \wedge \neg Qc) \wedge Qc$	
10	$\quad\quad Pc \wedge \neg Qc$	8 i$\wedge$
11	$\quad\quad \neg Qc$	9 i$\wedge$
12	$\quad\quad Qc$	8 i$\wedge$
13	$\quad\quad \perp$	11, 12 u$\perp$
14	$\quad \perp$	3, 4–8, 9–13 i$\vee$
15	$\perp$	1, 2–14 i$\exists$

Pogledajmo i sljedeći primjer kanonskoga dokaza!

Primjer 6.9 (Iskaz $\neg\forall x\exists y\forall z\exists x_1(\neg Rxy \vee Rx_1z)$) *Iz '$\neg\forall x\exists y\forall z\exists x_1(\neg Rxy \vee Rx_1z)$' dobivamo sljedeći iskaz u preneksnome normalnome obliku:*

$$\exists x\forall y\exists z\forall x_1(Rxy \wedge \neg Rx_1z).$$

Evo i kanonskoga dokaza nesuvislosti:

1	$\exists x \forall y \exists z \forall x_1 (Rxy \land \neg Rx_1 z)$	
2	$\quad \forall y \exists z \forall x_1 (Rcy \land \neg Rx_1 z)$	
3	$\quad \exists z \forall x_1 (Rcc \land \neg Rx_1 z)$	2 i$\forall$
4	$\quad\quad \forall x_1 (Rcc \land \neg Rx_1 d)$	
5	$\quad\quad Rcc \land \neg Rcd$	4 i$\forall$
6	$\quad\quad Rcc \land \neg Rdd$	4 i$\forall$
7	$\quad\quad \exists z \forall x_1 (Rcd \land \neg Rx_1 z)$	2 i$\forall$
8	$\quad\quad\quad \forall x_1 (Rcd \land \neg Rx_1 e)$	
9	$\quad\quad\quad Rcd \land \neg Rce$	8 i$\forall$
10	$\quad\quad\quad \neg Rcd$	5 i$\land$
11	$\quad\quad\quad Rcd$	9 i$\land$
12	$\quad\quad\quad \bot$	10, 11 u$\bot$
13	$\quad\quad \bot$	7, 8–12 i$\exists$
14	$\quad \bot$	3, 4–13 i$\exists$
15	$\bot$	1, 2–14 i$\exists$

VJEŽBA 6.4 *Provjerite koji se zakoni istovrijednosti primijenjuju pri pretvorbi zadanoga iskaza iz primjera 6.9 u preneksni normalni oblik!*

VJEŽBA 6.5 *Provjerite kanonskim dokazom valjanost sljedećega zaključka:*

$$\begin{array}{l} \exists x(\neg \forall y Qxy \to Rx) \\ \forall \neg \exists y Qxy \\ \hline \exists x Rx \end{array}$$

Kanonski "dokaz" može katkad biti i beskonačan. U tom slučaju zadani je skup pretpostavaka suvisao.

VJEŽBA 6.6 *Pokušajte provjeriti kanonskim dokazom je li skup* $\{\forall x \exists y Rxy\}$ *suvisao! (Inače,* $\forall x \exists y Rxy$ *navodi G. Boolos kao primjer iskaza koji ima beskonačno stablo s pravilima kako smo ih definirali.)*

Poglavlje 7

FUNKCIJE

U logici prvoga reda možemo olakšati prevođenje složenih izraza kao što su 'Ivanov otac', 'Ivanova majka', 'neposredni sljedbenik broja 1', 'zbroj brojeva 3 i 4' i sl., koji uvijek označuju samo po jedan predmet (osobu, broj). U tu svrhu u logiku prvoga reda možemo uvesti n-mjesne funkcijske simbole, npr h^1 za 'otac od __' i f^2 za 'zbroj od __ i __'. Pomoću funkcijskih simbola tvorimo novovrsne predmetne oznake kao što su $h(c)$ za 'Ivanov otac', $f(c_2, c_3)$ za 'zbroj od dva i tri'. Te su oznake, za razliku od predmetnih konstanata, složene, ali se, kao i predmetne konstante, svaka odnosi samo na jedan predmet. Štoviše, predmetne bismo konstante mogli promatrati kao 0-mjesne funkcijske simbole (kao što, analogno, i iskazna slova možemo promatrati kao 0-mjesne priroke).

Pogledajmo sada na sustavniji način kako u logiku prvoga reda uključujemo funkcijske simbole.

7.1 SINTAKSA

Osnovnim simbolima pridodajemo **funkcijske simbole**:

$$f^1, g^1, h^1, \ldots, f^1_1, \ldots, f^2, \ldots,$$

Prije definicije formule, u logici s funkcijskim simbolima potrebno je dati definiciju **predmetne oznake**, t:

DEFINICIJA 7.1 (PREDMETNA OZNAKA)

1. *svaka je predmetna konstanta predmetna oznaka,*

2. *svaka je predmetna varijabla predmetna oznaka,*

3. *ako je* f^n $n-$*mjesni funkcijski simbol a* $t_1, \ldots t_n$ *predmetne oznake,* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *je predmetna oznaka.*

Novina je slučaj 3. koji govori o tvorbi predmetnih oznaka pomoću funkcijskih simbola. Nazovimo predmetne oznake definirane slučajem 3. **složenim** predmetnim oznakama.

Razlikujmo otvorenu i zatvorenu predmetnu oznaku.

DEFINICIJA 7.2 (OTVORENA I ZATVORENA PREDMETNA OZNAKA)

1. *Predmetna je oznaka* otvorena *ako i samo ako sadrži pojavak varijable.*

2. *Predmetna je oznaka* zatvorena *ako i samo ako nije otvorena.*

To je razlikovanje koje se prije svega odnosi na složene predmetne oznake. Inače, sve su predmetne varijable otvorene predmetne oznake a sve predmetne konstante zatvorene.

Primijetimo sada da će se u **jednostavnim** formulama na mjestu predmetnih oznaka javljati i složene oznake. Pritom, u jednostavnim se iskazima na mjestu predmetnih oznaka ne javljaju otvorene složene oznake.

Kako se u formulama može javiti bilo koji predmetni simbol, sada su moguće i ovakve formule:

$$Qh(c),$$

primjerice, za ‘Ivanov je otac strog;

$$Rf(c_2, c_3)f(c_1, c_2),$$

primjerice, za ‘Zbroj od 2 i 3 veći je od zbroja od 1 i 2’;

$$Pf(c_1, f(c_1, c_2)),$$

primjerice, za ‘Zbroj broja 1 i zbroja od 1 i 2 jest paran’;

$$\exists x P f(c_1, f(x, c_2))$$

za ‘Neki je broj takav da je zbroj od 1 i zbroja toga broja i 2 paran’.

Funkcijski simboli poznati su nam osobito iz **aritmetičkoga** jezika. Tamo, uz druge razlike, za ‘zbroj’ stoji funkcijski simbol +, pa umjesto $Rf(c_2, c_3)f(c_1, c_2)$, aritmetičkim jezikom pišemo $2 + 3 > 1 + 2$.

7.2 SEMANTIKA

U modelu, tumačenje se prvoga reda proširuje tumačenjem funkcijskih simbola. Za naše početne primjere o Ivanu i njegovu ocu postavit ćemo sljedeće tumačenje:

D: ljudi
h^1: otac (od) ___ ,
c: Ivan,
Q^1: ___ je strog.

Za gornje aritmetičke primjere postavljamo pak tumačenje:

D: pozitivni cijeli brojevi
c_1: broj 1,
c_2: broj 2,
c_3: broj 3,
f^2: zbroj od ___ i ___ ,
P^1: ___ je paran,
R^2: ___ je veće od ___ .

Funkcijski simbol f^n znači neku funkciju **f** koja uvijek uređenoj n-torci članova predmetnoga područja pridružuje član predmetnoga područja, tj.

$$\mathbf{f} : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}.$$

Prema tome, tumačenje prvoga reda sada redefiniramo dodajući, uz pridruživanje vrijednosti predmetnim konstantama i prirocima, i novi slučaj da tumačenje prvoga reda svakomu funkcijskomu simbolu f pridružuje funkciju **f**: $D^n \to D$.

Neka je t složena predmetna oznaka, dakle oznaka oblika $f(t_1, \ldots, t_n)$. Njezina semantička vrijednost određena je tumačenjem $\mathcal{T}$ za funkcijski simbol f^n, te tumačenjem $\mathcal{T}$ i vrjednovanjem varijabla v za svaku oznaku t_i (koja može biti predmetna konstanta, predmetna varijabla ili složena predmetna oznaka).

Istinitosno stablo Pravila za raščlambu **općega** i **nijek opstojnoga** iskaza proširujemo i na složene predmetne oznake:

$h \quad \forall x p\ ^{t\checkmark}$
$i \quad p(t/x) \quad h\,\forall$
t je zatvorena predmetna oznaka

$h \quad \neg\forall x p\ \checkmark$
$i \quad \neg p(t/x) \quad h\neg\exists$
t je zatvorena predmetna oznaka,
sadrži samo nove simbole

$h \quad \exists x p\ \checkmark$
$i \quad p(t/x) \quad h\,\forall$
t je zatvorena predmetna oznaka,
sadrži samo nove simbole

$h \quad \neg\exists x p\ ^{t\checkmark}$
$i \quad \neg p(t/x) \quad h\neg\exists$
t je zatvorena predmetna oznaka

U pravilima za $\forall$ i $\neg\exists$ 'novi simboli' su simboli koji se prethodno ne javljaju na putu. Na odgovarajući se način preinačuju i **razgranbena** pravila za **opstojni** i **nijek općega** iskaza:

$h \qquad \exists x p\ \checkmark$
$\qquad / \ldots \mid \qquad \backslash$
$i \quad p(t_1/x) \ldots p(t_n/x) \quad p(t/x) \quad h\,\exists'$
$t_1 \ldots t_n$ su stare zatvorene predmetne oznake,
t je zatvorena predmetna oznaka, samo s novim simbolima

$h \qquad \neg\forall x p\ \checkmark$
$\qquad / \ldots \mid \qquad \backslash$
$i \quad \neg p(t_1/x) \ldots \neg p(t_n/x) \quad \neg p(t/x) \quad h\,\neg\forall'$
$t_1 \ldots t_n$ su stare zatvorene predmetne oznake,
t je zatvorena predmetna oznaka, samo s novim simbolima

'Stare predmetne oznake' su predmetne oznake koje se prethodno javljaju na putu. Važno je uočiti, zbog proširene definicije jednostavnoga iskaza, da se kao **slovni iskaz** sada može javiti i slovni iskaz sa zatvorenom složenom predmetnom oznakom.

PRIMJER 7.1

7.3 DEDUKTIVNI SUSTAV

Slično kao i u istinitosnome stablu, mijenjaju se i pravila deduktivnoga sustava, uvodeći funkcijske simbole:

$$\begin{array}{r|ll} h & \forall \mathrm{x} p & \\ i & p(\mathrm{t}/\mathrm{x}) & h\ i\forall \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka

$$\begin{array}{r|ll} h & p(\mathrm{t}/\mathrm{x}) & \\ i & \forall \mathrm{x} p & h\ u\forall \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka, ne sadrži simbole koji se javljaju u vrijedećim pretpostavkama ili u $\forall \mathrm{x} p$

$$\begin{array}{r|ll} h & p(\mathrm{t}/\mathrm{x}) & \\ i & \exists \mathrm{x} p & h\ u\exists \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka,

$$\begin{array}{r|ll} h & \exists \mathrm{x} p & \\ i & \quad \underline{p(\mathrm{t}/\mathrm{x})} & \\ j & \quad q & h\ i\forall \\ k & q & h, i\text{–}j\ i\exists \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka, ne sadrži simbole koji se javljaju u vrijedećim pretpostavkama, $\exists \mathrm{x} p$ ili q

VJEŽBA 7.1

Poglavlje 8

ISTOVJETNOST

Ocrtat ćemo najprije logiku prvoga reda s istovjetnošću bez funkcija. Na kraju ćemo dodati nekoliko napomena o promjenama koje nastaju ako u logici prvoga reda s istovjetnošću imamo i funkcije.

8.1 SINTAKSA I SEMANTIKA ISTOVJETNOSTI

Rječnik $\mathscr{L}_p$ proširujemo novim simbolom, dvomjesnim prirokom:

$$=^2$$

Umjesto formula $= \mathrm{t}_1\mathrm{t}_2$ *neformalno* pišemo:

$$\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2.$$

Te formule čitamo ovako: “t_1 je istovjetno s t_2”. Nijek tih formula pišemo kao i obično:

$$\neg \mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2.$$

Taj prošireni jezik nazvat ćemo $\mathscr{L}_{p=}$.

U svakom modelu $\mathfrak{M}$ i tumačenju prvoga reda $\mathcal{T}$ vrijedi:

$=^2$: __ je istovjetno s __ .

Istaknimo da se vrijednost priroka $=^2$ ne mijenja, nego ostaje uvijek ista, neovisno o promjeni tumačenja. Preciznije možemo reći da prirok $=^2$ u svakom tumačenju kao svoju vrijednost ima skup uređenih parova predmetnoga područja takvih da je **prvi član istovjetan s drugim**. Npr. u predmetnome području koje čine pozitivni cijeli brojevi, to je skup $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \ldots\}$. Istovjetni su predmeti koji su samo **označeni na različit način**, npr. ako u nekom tumačenju $\mathcal{T}$ i s c i s d označimo broj 1, tj. ako $c = d$, onda je u opseg priroka istovjetnosti uključen i uređen par $\langle \mathcal{T}(c), \mathcal{T}(d)\rangle$. Općenito, u svakom tumačenju prvoga reda vrijednost priroka $=^2$ jest skup svih uređenih parova $\langle \mathrm{d}, \mathrm{d}\rangle$ za svaki član d predmetnoga područja D.

Zbog stalnosti značenja priroka $=^2$ u svim tumačenjima prvoga reda taj prirok ima ulogu **logičkoga simbola**, kao i logički djelatelji, te ga ne treba izričito navoditi u opisu pojedinih tumačenja.

Nadalje, jasno je na temelju značenja priroka $=^2$ da je iskaz oblika $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$ istinit u modelu $\mathfrak{M}$ ako i samo ako za tumačenje $\mathcal{T}$ toga modela vrijedi $\mathcal{T}(\mathrm{t}_1) = \mathcal{T}(\mathrm{t}_2)$.

Formalna semantika U formalnoj semantici logike prvoga reda treba nadopuniti definiciju zadovoljenosti posebnim, drugim slučajem za jednostavne formule oblika $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$:

$$\mathfrak{M} \models_v \mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2 \text{ ako i samo ako } [\![\mathrm{t}_1]\!]_v^{\mathfrak{M}} = [\![\mathrm{t}_2]\!]_v^{\mathfrak{M}}.$$

Istinitosno stablo I u logici prvoga reda s istovjetnošću možemo uporabiti metodu istinitosnoga stabla. Uvodimo novo pravilo – za **istovjetnost**:

$$\begin{array}{lll} h & \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 & \\ i & p(\mathrm{c}_1) & \\ j & p(\mathrm{c}_2//\mathrm{c}_1) & h, i \ = \end{array}$$

p je slovni iskaz

$p(\mathrm{c}_2//\mathrm{c}_1)$ je kao i p osim što barem na jednom mjestu sadrži c_2 umjesto c_1.

Nadalje, put je **zatvoren** i kad se u njem nalazi iskaz oblika $\neg \mathrm{c}{=}\mathrm{c}$.

Ako **potpun otvoren put** sadrži i iskaze oblika $\mathrm{c}_1{=}\mathrm{c}_2$, oni su raščlanjeni tako da za svaki slovni iskaz $p(\mathrm{c}_1)$, put sadrži i sve iskaze $p(\mathrm{c}_2//\mathrm{c}_1)$ koji se mogu dobiti primjenom pravila za simbol = (osim ako je dobiveni iskaz c=c, koji ne treba dodavati). Pritom nije potrebno ponavljati iskaze koji se prethodno već javljaju na putu.

PRIMJER 8.1 *V. primjer analize iskaz pomoću istinitosnoga stabla u odjeljku o brojnosti ('samo jedan')!*

8.2 PREVOĐENJE

8.2.1 IDENTIFIKACIJA I RAZLIKOVANJE

Pomoću $=^2$ možemo izraziti **identifikaciju** i **razlikovanje (izuzimanje)**. Pokažimo to na nekolikim primjerima u sljedećem tumačenju:

D: 1, 2, 3, . . . ,
P^1: ___ je paran,
Q^2: ___ je djeljivo s ___ ,
R^2: ___ je manje od ___ ,
c_1: broj 1,
c_2: broj 2,
c_3: broj 3.

PRIMJER 8.2 *Neki broj s kojim je djeljiv broj dva, jest broj jedan.*

$$\exists x(Qc_2x \land x = c_1)$$

PRIMJER 8.3 *Neki je broj manji od svakoga drugoga broja.*

$$\exists x\forall y(\neg y = x \to Rxy)$$

To je broj 1. Uočimo razliku prema (neistinitoj) rečenici 'Neki je broj manji od svakoga broja'. Potonja rečenica ne govori izričito o svakome drugome broju, te ju stoga doslovce prevodimo ovako:

$$\exists x\forall yRxy$$

Taj iskaz nije istinit jer nijedan broj nije manji sam od sebe.

PRIMJER 8.4 *Svi parni brojevi osim dva, veći su od tri.*

$$\forall x[(Px \wedge \neg x = c_2) \rightarrow Vxc_3]$$

PRIMJER 8.5 *Neki je paran broj manji od svih drugih parnih brojeva.*

$$\exists x(Px \wedge \forall y[(Py \wedge \neg y = x) \rightarrow Rxy])$$

PRIMJER 8.6 *Sa svakim je parnim brojem djeljiv neki drugi parni broj.*

$$\forall x(Px \rightarrow \exists y[(Py \wedge \neg y = x) \wedge Qyx])$$

Vježbe

8.2.2 BROJNOST

Pomoću priroka $=^2$ možemo izraziti, primjerice, tvrdnje o broju predmetâ.

Barem jedan

To da je **barem jedan** vladar pravedan ("Neki su vladari pravedni") možemo u **uskome** predmetnome području prevesti s $\exists xPx$. Neka pritom vrijedi tumačenje T:

D: vladari
P^1: ___ je pravedan.

Samo jedan

Tvrdnju da ima **samo jedan** (upravo jedan; jedan i samo jedan) pravedni vladar, dakle tvrdnju o **jedinstvenosti**, treba prevesti, primjerice, ovako:

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y = x)).$$

Analizirajmo istinitosnim stablo gornji iskaz:

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \exists x(Px \land \forall y(Py \to y = x)) \checkmark & \\
2 & Pc \land \forall y(Py \to y = c) \checkmark & 1\ \exists \\
3 & Pc & 2\ \mathrm{i}\land \\
4 & \forall y(Py \to y = c)^{\,c\checkmark d\checkmark e\checkmark \ldots} & 2\ \mathrm{i}\land \\
5 & Pc \to c = c & 4\ \mathrm{i}\forall \\
6 & Pd \to d = c & 4\ \mathrm{i}\forall \\
7 & Pe \to e = c & 4\ \mathrm{i}\forall \\
 & / \quad \backslash & \\
8 & \neg Pc \quad c = c & 5\ \mathrm{i} \to \\
 & \times \quad / \quad \backslash & \\
9 & \neg Pd \quad d = c & 6\ \mathrm{i} \to \\
10 & \vdots \quad Pd & 9,3\ = \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Stablo lijepo pokazuje da u slučju istinitosti zadanoga iskaza

1. *ima barem jedan* predmet (vladar), označili smo ga konstantom c, koji je pravedan (redak 3),
2. svaki predmet (vladar), označili smo ih redom pomoću $c, d, e, \ldots$, ili nije pravedan, ili je istovjetan predmetu označenom pomoću c (redci 5 nadalje) – stoga i *nema više od jednoga* predmeta (vladara) koji je pravedan.

Kad bi bila, primjerice, dva različita pravedna vladara, ne bi mogli biti istovjetni s jednim te istim predmetom (c).

Kraće možemo gornji iskaz pisati ovako: $\exists x \forall y(Py \leftrightarrow y = x)$. To je istovrijedno s iskazom $\exists x \forall y((Py \to y = x) \land (y = x \to Py))$. Naime, vrijedi li samo lijeva pogodba, bilo bi moguće da uopće nema nijednoga pravednoga vladara. Mora stoga vrijediti i desna (obratna) pogodba jer predmet x je istovjetan barem sam sebi, i ako je tako, onda je pravedan.

Barem dva

Nadalje, možemo izraziti i tvrdnju da ima **barem dva** pravedna vladara:

$$\exists x \exists y((Px \land Py) \land \neg x = y).$$

Samo dva

Tvrdnju da ima **samo dva** pravedna vladara možemo izraziti na sljedeći način:

$$\exists x \exists y([(Px \land Py) \land \neg x = y] \land \forall z[Pz \to (z = x \lor z = y)]).$$

Kraće: $\exists x \exists y(\neg x = y \land \forall z[Pz \leftrightarrow (z = x \lor z = y)])$.

Brojnost u širokome predmetnome području

Izrazimo sve gore analizirane rečenice u **širokome** predmetnome području:

D: ljudi
V^1: ___ je vladar

Tada, 'Ima **barem jedan** pravedan vladar' prevodimo, kako je poznate, ovako:

$$\exists x(Vx \land Px).$$

Da ima **upravo jedan** pravedan vladar izražujemo ovako:

$$\exists x[(Vx \land Px) \land \forall y((Vy \land Py) \to y = x)].$$

Da ima **barem dva** pravedna vladara možemo pak izraziti ovako:

$$\exists x \exists y([(Vx \land Px) \land (Vy \land Py)] \land \neg x = z).$$

'Ima **upravo dva** pravedna vladara' prevodimo ovako:

$$\exists x \exists y[([(Vx \land Px) \land (Vy \land Py)] \land \neg x = y) \land \forall z[(Vz \land Pz) \to (z = x \lor z = y)]].$$

Vježbe

1. Izrazite u $\mathscr{L}_{p=}$ tvrdnju da ima
   (a) najviše jedan predmet,
   (b) upravo jedan predmet.
2. Izrazite u $\mathscr{L}_{p=}$ tvrdnju da ima
   (a) najviše dva predmeta (= vj. 1.),
   (b) najviše jedan pravedan vladar,
   (c) najviše dva pravedna vladara,
   (d) najviše tri pravedan vladara.

   Upotrijebite tumačenje iz gornjega teksta.
3. Izrazite jezikom $\mathscr{L}_{p=}$ (u manjem predmetnome području) tvrdnju da ima barem tri i tvrdnju da ima upravo tri pravedna vladara!

8.2.3 ODREĐENI OPIS

Pogledajmo sada hrvatske izraze kao što je sljedeći:

logičar koji je napisao *Pojmopis*.

Tim se izrazom označuje upravo jedan jedini predmet (pisac koji je sam napisao cijeli *Pojmopis*), iako to nije izričito rečeno, naime Gottlob Frege. Takvi se opisni izrazi, koji nisu imena ali kao imena imaju ulogu označiti samo jedan predmet, često nazivlju "određenim opisima". U nekim jezicima na početku određenoga opisa stoji određeni član (u engl. 'the', u njem. 'der', 'die', 'das'). U jezicima bez članova (kao što je hrvatski) razumijevanju pomaže kontekst. Primjerice, 'sadašnji zastupnik u Hrvatskome saboru' nije određeni opis jer, kako znamo, Hrvatski sabor ima više od jednoga zastupnika. No 'sadašnji hrvatski predsjednik' jest određeni opis jer Hrvatska ima (prema Ustavu) samo jednoga predsjednika.

Kako određeni opis 'logičar koji je napisao *Pojmopis*' možemo prevesti na jezik logike logike prvoga reda? Ako ga prevedemo predmetnom konstantom, npr. 'f' za Fregea, pri tom bi se izgubio unutrašnji logički ustroj toga izraza. Stoga, primjerice, ne bismo mogli izvoditi zaključke koji ovise upravo o unutrašnjem ustroju određenoga opisa. Npr. iz toga da je Frege Nijemac, ne slijedi da je neki logičar Nijemac. Ali iz toga da je logičar koji je napisao *Pojmopis*, Nijemac, svakako slijedi da je neki logičar Nijemac.

Izlaz iz te poteškoće leži u mogućnosti **kontekstualnoga** prijevoda određenoga opisa. Određeni opis možemo prevesti prevodeći rečenice koje nešto kazuju o predmetu označenom određenim opisom. Takva je, primjerice, rečenica:

Logičar koji je napisao *Pojmopis*, jest slavan.

Prevodeći tu rečenicu treba izraziti

1. da ima neki predmet koji je logičar i koji je napisao *Pojmopis*,
2. da je to samo jedan predmet (u tu ćemo svrhu upotrijebiti prirok $=^2$),
3. da je taj predmet slavan.

Dobivamo, s odgovarajućim tumačenjem prirokâ, sljedeći iskaz:

$$\exists x([(Lx \land Nxp) \land \forall y((Ly \land Nyp) \rightarrow y = x)] \land Sx).$$

Kraće:

$$\exists x(\forall y[(Ly \land Nyp) \leftrightarrow y = x] \land Sx).$$

Pritom vrijedi sljedeće tumačenje:

D: ljudi i knjige,
L^1: ___ je logičar,
N^2: ___ je napisao ___ ,
S^1: ___ je slavan.

Neoznačujući određeni opisi Što je pak s opisom ‘sadašnji francuski kralj’, koji ostavlja dojam **kao da nešto označuje**, ali ipak ne označuje ništa jer nema predmeta na koji bi se odnosio. Tu već i zbog neoznačivanja ne možemo upotrijebiti predmetnu konstantu. Kao i u prethodnome primjeru, prijevod će biti kontekstualan. Rečenicu

Francuski je kralj pravedan

na $\mathscr{L}_{p=}$ možemo prevesti ovako:

$$\exists x([Fx \land \forall y(Fy \to y = x)] \land Px),$$

pri čem

P^1: ___ je pravedan.

Kraći je prijevod $\exists x(\forall y(Fyg \leftrightarrow y = x) \land Px)$. Taj je iskaz neistinit, jer ne opstoji francuski kralj (mislimo pritom na sadašnju Francusku).

Izloženi kontekstualni način prevođenja određenih opisa (označujućih ili neoznačujućih) potječe iz “teorije opisa” koju je razvio B. *Russell* (u članku ‘On denoting’, *Mind*, 1905., i zatim u *Principia Mathematica*, 1, 1910).

8.2.4 OPSTOJNOST

Logička teorija određenih opisa otvara još jednu mogućnost na koju upozorava *Quine* (u članku ‘On What There Is’, 1948.). Pogledajmo rečenicu ‘Opstoji Pegaz’. Riječju ‘Pegaz’, jer je ime, želi se označiti jedan jedinstveni predmet, no ni u kojem (stvarnom) predmetnome području nema predmeta Pegaza. Kad netko govori o Pegazu, osobito to da Pegaz opstoji, tada ime Pegaz moramo razumjeti kao određeni opis i tvrdnju prevesti služeći se, ne imenom, nego prirokom ‘biti Pegaz’ (“pegazirati”):

$$\exists x(Px \land \forall y(Py \to y = x)).$$

Sada možemo reći da je taj iskaz neistinit.

Na takav način možemo prevesti i rečenice koje sadrže imena stvarnih predmeta. Npr. rečenicu ‘Opstoji Hrvatska’ možemo prevesti shvaćajući ‘Hrvatska’ ne kao ime, nego kao određeni opis i uvodeći prirok ‘biti Hrvatska’:

$$\exists x(Hx \land \forall y(Hy \to y = x)).$$

Iskaz je, dakako, istinit.

Posljednja nas dva primjera upućuju na mogućnost da se u logici s istovjetnošću imena mogu sasvim isključiti.

Vježbe

1. Prevedite na $\mathscr{L}_{p=}$ rečenice ‘Opstoji bog’ i ‘Opstoji Bog’ (Bog jest). U čem je značenjska razlika tih dviju rečenica?

8.3 OČUVANJE ISTINITOSTI

Na razini semantičkih svojstava ima važan dobitak u logici s istovjetnošću. Promatramo li u semantici međusoban odnos različitih modela uočavamo da $\forall xIxx$, gdje bi (neformalan) prirok I^2 u nekome modelu mogao značiti istovjetnost, nije u logici prvoga reda valjan iskaz, ali isto tako uočavamo da je $\forall xx = x$ valjan u logici prvoga reda s istovjetnošću. Ništa ne priječi da ima modela u kojima I^2 može značiti ‘iza’ te ne vrijediti ni o jednom paru predmeta. Općenito, u nekom po volji izabranome modelu, možemo priroku I^2 pridružiti bilo koji skup uređenih parova predmeta. Ali u svakome modelu svaki je predmet d istovjetan sebi, pa je stoga iskaz $\forall xx = x$ u logici prvoga reda s istovjetnošću valjan. S time su povezani i drugi oblici posljedičnih odnosa, koji ne vrijede za po volji izabrani dvomjesni prirok.

Primjer 8.7 (Valjan zaključak)

$$
\begin{array}{l}
c = d \land d = e \\
Pe \\
\hline
\exists x(x = d \land Px)
\end{array}
$$

1	$c = d \wedge d = e$ ✓		
2	Pe		
3_	$\neg\exists x(x = d \wedge Px)$ ^{c}✓		
4	$c = d$		$1 \wedge$
5	$d = e$		$1 \wedge$
6	$\neg(c = d \wedge Pc)$ ✓		$3 \neg\exists$
	/	\	
7	$\neg c = d$	$\neg Pc$	$6 \neg\wedge$
8	$\times$	$\neg Pd$	$4, 7 =$
9		$\neg Pe$	$5, 8 =$
		$\times$	

Svi su putovi zatvoreni te je zaključak valjan. U retku 8 istovjetnost ‘c=d’ raščlanili smo na iskazu ¬Pc’, a zatim, u retku 9, istovjetnost ‘d=e’ na iskazu ¬Pe’.

PRIMJER 8.8 (ZADOVOLJIVOST I UVJETI ISTINITOSTI SKUPA $\{c_1 = c_2, \exists x\exists y\forall z(\neg x = z \vee \neg y = z)\}$)

$$
\begin{array}{rcl}
1 & c_1 = c_2 & \\
2 & \exists x\exists y\forall z(\neg x = z \vee \neg y = z) \checkmark & \\
3 & \exists y\forall z(\neg d = z \vee \neg y = z) \checkmark & 2\ \exists \\
4 & \forall z(\neg d = z \vee \neg e = z)\ ^{e\checkmark c_1\checkmark c_2\checkmark} & 3\exists \\
5 & \neg d = d \vee \neg e = d \checkmark & 4\ \forall \\
 & / \qquad \backslash & \\
6 & \neg d = d \qquad \neg e = d & 5\ \vee \\
 & \times \qquad\quad | & \\
7 & \neg d = e \vee \neg e = e \checkmark & 4\ \forall \\
 & / \quad \backslash & \\
8 & \neg d = e \quad \neg e = e & 7\ \vee \\
 & | \qquad \times & \\
9 & \neg d = c_1 \vee \neg e = c_1 \checkmark & 4\ \forall \\
10 & \neg d = c_2 \vee \neg e = c_2 \checkmark & 4\ \forall \\
 & / \qquad \backslash & \\
11 & \neg d = c_2 \qquad \neg e = c_2 & 10 \vee \\
 & /\ \backslash \qquad\qquad /\ \backslash & \\
12 & \neg d = c_1\ \neg e = c_1\ \neg d = c_1\ \neg e = c_1 & 9\ \vee \\
13 & \neg d = c_2\ \neg e = c_2\ \neg d = c_2\ \neg e = c_2 & 1, 12\ = \\
 & \circ \qquad \circ \qquad \circ \qquad \circ &
\end{array}
$$

Skup je iskaza zadovoljiv. Svi su članovi skupa istiniti u četirima skupinama tumačenja. Svaka je skupina određena po jednim putom u stablu i to istinitošću jednostavnih iskaza i neistinitošću zanijekanih jednostavnih iskaza koji se nalaze na tom putu. U retku 13 primijenili smo istovjetnost $c_1 = c_2$ *(redak 1) na iskaze iz retka 12 da bismo dobili potpune otvorene putove.*

Vježbe

1. Provjerite valjanost zaključka:

(a) $$\frac{Fa \to Fb}{\forall x \forall y(x = b \to x = a)}$$

2. Provjerite valjanost iskazâ:

   (a) $\forall x \forall y((Ax \wedge \neg Ax) \to \neg x = y)$,
   (b) $\forall x \forall y((Dx \leftrightarrow Dy) \leftrightarrow x = y)$,
   (c) $\exists x \exists y(x = y \to (Dx \leftrightarrow Dy))$.

3. Provjerite semantičku istovrijednost iskazâ:

   (a) $\forall x \forall y((Fx \wedge Fy) \to x = y), \forall x Fx$,
   (b) $\exists x((Px \wedge \forall y(Py \to y = x)), \exists x \forall y(Py \leftrightarrow y = x)$.

8.4 DEDUKTIVNI SUSTAV

Na sustav naravne dedukcije u logici prvoga reda valja dodati još dva dokazna pravila. Najprije pravilo za **uvođenje istovjetnosti**:

$$h \mid \mathrm{c} = \mathrm{c} \quad u =$$

Iskaz oblika $\forall \mathrm{x} = \mathrm{x}$ može se uvesti u bilo kojem retku u izvodu. Primijetimo da takvi iskazi sami sebe dokazuju kao poučke.

Dodajemo još i pravilo za **isključenje istovjetnosti**. Oznake (konstante) za istovjetan predmet mogu se u iskazima po volji zamjenjivati:

$$\begin{array}{r|cl} h & \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 & \\ i & p(\mathrm{c}_1) & \\ j & p(\mathrm{c}_2//\mathrm{c}_1) & h, i \ \mathrm{i} = \end{array} \qquad \begin{array}{r|cl} h & \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 & \\ i & p(\mathrm{c}_2) & \\ j & p(\mathrm{c}_1//\mathrm{c}_2) & h, i \ \mathrm{i} = \end{array}$$

Primjer 8.9 (Poučak)

$$\vdash \forall x \forall y(x = y \to \exists z(x = z \wedge y = z))$$

Dokaz

1	$\quad \underline{c = d}$	
2	$\quad c = c$	2 u =
3	$\quad d = c$	2, 1 i =
4	$\quad c = c \wedge d = c$	2, 3 u$\wedge$
5	$\quad \exists z(c = z \wedge d = z)$	4 u$\exists$
6	$c = d \rightarrow \exists z(c = z \wedge d = z)$	1–5 u $\rightarrow$
7	$\forall y(c = y \rightarrow \exists z(c = z \wedge y = z))$	6 u$\forall$
8	$\forall x \forall y(x = y \rightarrow \exists z(x = z \wedge y = z))$	7 u$\forall$

Zadani je iskaz dokazan bez pretpostavaka pa je, prema tome, poučak. Istaknimo da smo u retku 3 na iskaz $c = c$ primijenili istovjetnost $c = d$.

Dodajmo da je u neizravnome dokazu dostatno dokazati i iskaz oblika ¬c=c (umjesto iskaza p i $\neg p$).

Vježbe

1. Provjerite jesu li sljedeći iskazi poučci:

   (a) $\forall x \exists$y x=y,

   (b) $\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow y = x)$,

   (c) $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$,

   (d) $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge x = z) \rightarrow y = z)$.

2. Provjerite jesu li sljedeći iskazi sintaktično istovrijedni:

   (a) $\exists x(Ax \wedge \forall y(Ay \rightarrow y = x))$, $\exists x \forall y(Ay \leftrightarrow y = x)$.

8.5 ISTOVJETNOST I FUNKCIJE

Složene predmetne oznake, u kojima se rabe funkcijski simboli, možemo u logici prvoga reda s istovjetnošću izraziti bez funkcijskih simbola. To možemo učiniti na isti način kao što smo postupili s određenim opisima.

Primjerice, 'Ivanov je otac strog', možemo izraziti ne samo s 'Qh(c)' (kao u poglavlju 7), nego i na sljedeći način:

$$\exists x(\forall y(Hyc \leftrightarrow y = x) \land Qx).$$

Umjesto funkcijskoga simbola h^1, upotrijebili smo priroke H^2 i $=^2$. Jasno je već iz toga primjera da uporaba funkcijskih simbola pojednostavnjuje logičke rečenice.

Želimo li u logiku prvoga reda s istovjetnošću uvesti i funkcije, unosimo sva ona proširenja koja smo unijeli u logiku prvoga reda bez istovjetnosti. Sve promjene u logici prvoga reda s istovjetnošću proistječu iz činjenice da se sada u oblicima t_1=t_2 za t mogu javiti i složene predmetne oznake.

To prikazuje poopćenje pravila za = u **istinitosnome stablu**, tako da sada obuhvaća i zatvorene složene predmetne oznake:

$$\begin{array}{ll} h & t_1 = t_2 \\ i & p(t_1) \\ j & p(t_2//t_1) \quad h, i \ = \end{array}$$

p je slovni iskaz,
t_1 i t_2 su zatvorene predmetne oznake

PRIMJER 8.10

8.5.1 Deduktivni sustav

Deduktivna pravila za istovjetnost, kao i u istinitosnome stablu, poopćavamo tako da vrijede i za zatvorene složene predmetne oznake:

$$h \,|\, t = t \quad u \ =$$

t je zatvorena predmetna oznaka

$$\begin{array}{l|l} h & t_1 = t_2 \\ i & p(t_1) \\ j & p(t_2//t_1) \quad h, i \text{ i } = \end{array}$$

t_1 i t_2 su zatvorene predmetne oznake

$$\begin{array}{l|l} h & t_1 = t_2 \\ i & p(t_2) \\ j & p(t_1//t_2) \quad h, i \text{ i } = \end{array}$$

t_1 i t_2 su zatvorene predmetne oznake

Primjer

Dio III

POUZDANOST I POTPUNOST

Poglavlje 9

SVOĐENJE LOGIČKOGA JEZIKA

U razmatranjima o elementarnoj logici zanimljivo je pitanje je li logički jezik kojim smo se dosad služili (s peterim poveznicima i dvama količiteljnim simbolima) jedini mogući, ako je i on uopće dostatan, ili se on može svesti na jezik s manje djelatelja. Jesu li logički djelatelji međusobno svedljivi? S tim je pitanjem povezano i pitanje ima li nekih općih oblika formula na koje se mogu svesti sve formule elementarne logike.

9.1 IZRAŽAJNOST POVEZNIKĀ I SVOĐENJE JEZIKA $\mathscr{L}_i$

U poglavlju 2.2.3., o općem pojmu istine u iskaznoj logici, ustanovili smo da svakomu iskazu jezika $\mathscr{L}_i$ odgovara istinitosna funkcija koja uređenomu skupu istinitosnih vrijednosti jednostavnih podiskaza (lijeva strana istinitosne tablice) pridružuje istinitosnu vrijednost cijeloga iskaza (glavni stupac na desnoj strani istinitosne tablice). No odgovara li i svakoj istinitosnoj funkciji neki iskaz jezika $\mathscr{L}_i$? Drugim riječima, može li se jezikom $\mathscr{L}_i$ izraziti svaka istinitosna funkcija? Kako je način pridruživanja istinitosne vrijednosti (iskaza) uređenomu skupu istinitosnih vrijednosti (neposrednih podiskaza) određen poveznikom, naše se pitanje pretvara u pitanje "je li skup poveznika $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ **izražajno potpun**?".

Prije nego odgovorimo na gornja pitanja potrebno je podrobnije nego dosad razjasniti pojam istinitosne funkcije.

9.1.1 Istinitosne funkcije

Učvrstimo i precizirajmo pojam istinitosne funkcije. Što je to istinitosna (iliti Booleova) funkcija? To je pridruživanje kojemu je **argument** uređena *n*-torka istinitosnih vrijednosti, a **vrijednost** mu je istinitosna vrijednost.

Npr. konjunkciji odgovara istinitosna funkcija s dvama argumentima koja uređenomu paru argumenata $\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle$ pridružuje vrijednost **i**, a svim ostalim parovima pridružuje **n**. Pogodbi odgovora istinitosna funkcija s dvama argumentima koja uređenomu paru $\langle \mathbf{i}, \mathbf{n} \rangle$ pridružuje vrijednost **n**, a svim ostalim parovima vrijednost **i**. Općenito:

Definicija 9.1 (Istinitosna funkcija) *Istinitosna funkcija s n argumenata jest pridruživanje istinitosne vrijednosti svakoj uređenoj n-torci istinitosnih vrijednosti.*

(Ili, drugim riječima, istinitosna funkcija s n argumenata jest preslikavanje sa skupa uređenih n-toraka istinitosnih vrijednosti u skup istinitosnih vrijednosti.)

Istinitosne funkcije možemo prijegledno prikazivati **tablicom**, osobito funkcije s jednim ili dvama argumentima. Istinitosnih funkcija s **jednim** argumentom ima četiri, i prikazane su četirima stupcima desno od vertikalne crte u sljedećoj istinitosnoj tablici:

i	**i**	**i**	**n**	**n**
n	**i**	**n**	**i**	**n**

Istinitosne funkcije s **dvama** argumentima prikazujemo tablicom s četirima redcima (svaki za jedan uređen par istinitosnih vrijednosti). Tih funkcija ima ukupno $2^4 = 16$:

i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**
i	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**
n	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**
n	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**

Možemo uočiti da su sve istinitosne funkcije s jednim argumentom sadržane među istinitosnim funkcijama s dvama argumentima.

Općenito, broj istinitosnih funkcija s *n* ***argumenata*** izračunavamo na sljedeći način. Najprije izračunamo broj uređenih *n*-članih skupova argumenata - to je (kako znamo) 2^n (broj redaka u tablici). Zatim izračunamo broj istinitosnih funkcija za *n* argumenata - to je 2^{2^n} (broj mogućih stupaca u desnome dijelu tablice). Npr. istinitosnih funkcija s trima argumentima ima $2^{2^2} = 2^8 = 256$.

Kako broj argumenata raste u beskonačnost, i istinitosnih funkcija ima beskonačno mnogo.

9.1.2 Izražajno potpun skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Podsjetimo se najprije da niz disjunkata od kojih je svaki niz slovnih konjunkata, nazivljemo **disjunktivnim normalnim oblikom** (DNO). Disjunktivni normalni oblik (DNO) kojega svaki disjunkt sadrži, za *svako* zadano iskazno slovo, bilo sámo iskazno slovo bilo nijek iskaznoga slova, nazivljemo **potpunim disjunktivnim normalnim oblikom** (PDNO).

Nadalje, kažemo da je skup poveznika **izražajno potpun** u iskaznoj logici akko se **svaka istinitosna funkcija** može u jeziku $\mathscr{L}_i$ izraziti iskazom koji sadrži samo te poveznike.

Tvrdimo da vrijedi sljedeći metateorijski **poučak** (metapoučak):

POUČAK 9.1 *Skup* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *jest izražajno potpun.*

Dokaz Evo kako taj poučak možemo **dokazati**.

Pogledajmo najprije primjer tablice:

P	Q	
i	**i**	**i**
i	**n**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Prema prvome retku tablice, iskaz koji izražuje tablicom prikazanu istinitosnu funkciju, jest istinit ako je istinito i P i Q, dakle ako je istinito $P \wedge Q$. Također, prema drugome retku, istinit je ako je P istinito, a Q neistinito, tj.

ako je istinito $P \wedge \neg Q$. Istinit je također, prema četvrtome retku, ako su i P i Q neistiniti, tj. ako je $\neg P \wedge \neg Q$ istinito. Nema drugih tumačenja za koja je iskaz koji izražuje tablicom prikazanu istinitosnu funkciju, istinit. On je stoga istinit akko je istinito bilo $P \wedge Q$, bilo $P \wedge \neg Q$, bilo $\neg P \wedge \neg Q$, tj. akko je istinito

$$((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Dobiveni iskaz ima sljedeću istinitosnu tablicu:

P	Q	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
i	**i**	**i**
i	**n**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Glavni redak u desnome dijelu tablice odgovara vrijednostima zadane istinitosne funkcije. Gornji iskaz neformalno, zbog bolje prijeglednosti, možemo pisati i kao višečlanu disjunkciju:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Općenito, istinitosnu funkciju prikazanu istinitosnom tablicom možemo izraziti **nizom disjunkata od kojih je svaki niz slovnih konjunkata**. Pritom se svaki redak tablice u kojem je funkcijska vrijednost **i**, opisuje nizom konjunkata koje čine svako iskazno slovo koje je u tom retku istinito, i nijek svakoga iskaznoga slova koje je u tom retku neistinito.

Iskaz koji smo malo prije dobili opisujući zadanu istinitosnu tablicu, jest u PDNO jer svaki disjunkt za svako zadano iskazno slovo sadrži konjunkt koji je bilo iskazno slovo bilo nijek iskaznoga slova.

Ako se u istinitosnoj tablici samo jednom javlja **i** kao vrijednost funkcije, dobivamo jedan disjunkt koji je niz (makar i jednočlan) slovnih konjunkata. Stoga i takav oblik, bilo to, primjerice, tek p, smatramo potpunim disjunktivnim normalnim oblikom.

Ako pak ni u jednom retku vrijednost istinitosne funkcije nije **i**, istinitosnu funkciju možemo izraziti konjunkcijom svih iskaznih slova koja se javljaju u tablici, s njihovim nijekovima. Npr.

$$(P \wedge \neg P) \wedge (Q \wedge \neg Q) \wedge (R \wedge \neg R) \wedge \ldots$$

I takav je iskaz u PDNO jer ga možemo smatrati jednim disjunktom koji je niz slovnih konjunkata za svako zadano piročno slovo.

Dakle, svaka se istinitosna funkcija dade izraziti iskazom u potpunome disjunktivnome normalnome obliku. Prema tome je skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ izražajno potpun. $\dashv$

Da bismo izrazili bilo koju istinitosnu funkciju, umjesto PDNO možemo uporabiti i **potpun konjunktivni normalni oblik** (PKNO). Taj oblik dobivamo kad istinitosnu tablicu opisujemo niječući svako tumačenje kad je funkcijska vrijednost neistina. Evo primjera:

P	Q	
i	**i**	**n**
i	**n**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Treba zanijekati prvi i treći redak, a to činimo tako da 1) zaniječemo P ili Q i 2) potvrdimo P ili zaniječemo Q. Time dobivamo sljedeću konjunkciju disjunkcija:

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

Općenito, tumačenje u kojem je funkcijska vrijednost neistina, niječemo nizom disjunkata koje čine nijek svakoga iskaznoga slova koje je u tom tumačenju istinito, i svako iskazno slovo koje je u tom tumačenju neistinito.

Kako već znamo, niz konjunkata od kojih je svaki niz slovnih disjunkata, nazivljemo **konjunktivnim normalnim oblikom** (**KNO**). KNO kojega svaki konjunkt sadrži, za *svako* zadano iskazno slovo, bilo smo iskazno slovo bilo nijek iskaznoga slova, jest **potpuni konjunktivni normalni oblik** (**PKNO**). Iskaz $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$, koji smo dobili opisom naše istinitosne tablice, jest u potpunome konjunktivnome normalnome obliku jer je to niz dvaju konjunkata, a svaki konjunkt za svako zadano iskazno slovo sadrži disjunkt koji je bilo iskazno slovo, bilo nijek iskaznoga slova.

Ako ni u jednom retku istinitosne tablice funkcijska vrijednost nije neistina, PKNO može biti

$$(P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg R) \vee \dots$$

Zaključimo da se svaka istinitosna funkcija dade izraziti iskazom u potpunome konjunktivnome normalnome obliku. I ta činjenica također dokazuje da je skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ izražajno potpun.

9.1.3 Ostali izražajno potpuni skupovi poveznika

Skup $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Ako je skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ izražajno potpun, izražajno je potpun i njegov nadskup $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, a to je skup upotrijebljen u jeziku $\mathscr{L}_i$.

Skup $\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$

Nadalje, izražajno su potpuni i skupovi $\{\neg, \vee\}$ i $\{\neg, \wedge\}$. Naime, na temelju De Morganovih zakona, uzetih u semantičkome smislu:

$$\neg(p \wedge q) \simeq \neg p \vee \neg q,$$
$$\neg(p \vee q) \simeq \neg p \wedge \neg q,$$

stoje sljedeće semantičke istovrijednosti:

$$p \wedge q \simeq \neg(\neg p \vee \neg q),$$
$$p \vee q \simeq \neg(\neg p \wedge \neg q),$$

koje iskazuju da disjunkciju možemo izraziti pomoću nijeka i konjunkcije, a konjunciju pomoću nijeka i disjunkcije.

Skup $\{\neg, \rightarrow\}$

Također je izražajno potpun i skup $\{\neg, \rightarrow\}$ jer se i disjunkcija i konjunkcija mogu izraziti pomoću $\neg$ i $\rightarrow$:

$$p \wedge q \simeq \neg(p \rightarrow \neg q),$$
$$p \vee q \simeq \neg p \rightarrow q.$$

Te istovrijednosti možemo provjeriti istinitosnom tablicom!

Skup $\{|\}, \{\downarrow\}$

Poveznike možemo, napokon, svesti i na samo jedan. Bilo na **disjunktivni nijek**, | (“ne *p* ili ne *q*”), bilo na **dvonijek** (binegacija), $\downarrow$ (“ni *p* ni *q*”). Evo njihovih općih tablica:

p	q	$p \mid q$	$p \downarrow q$
i	**i**	**n**	**n**
i	**n**	**i**	**n**
n	**i**	**i**	**n**
n	**n**	**i**	**i**

Primijetimo da se disjunktivni nijek svodi na nijek konjunkcije, a dvonijek na nijek disjunkcije.

Skupovi $\{|\}$ i $\{\downarrow\}$ jesu za iskaznu logiku izražajno potpuni. To možemo dokazati svođenjem nijeka, konjunkcije i disjunkcije kako na disjunktivni nijek, tako i na dvonijek:

$$
\begin{array}{lcl}
\neg p & \simeq & p \mid p \\
p \wedge q & \simeq & (p \mid q) \mid (p \mid q) \\
p \vee q & \simeq & (p \mid p) \mid (q \mid q) \\
\neg p & \simeq & p \downarrow p \\
p \wedge q & \simeq & (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\
p \vee q & \simeq & (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).
\end{array}
$$

Na ideju da se svi poveznici mogu svesti na jedan jedini, došao je C. S. *Peirce* (oko 1880.), ali je članak o tome prvi objavio američki logičar H. M. *Sheffer* 1913. Deduktivni (aksiomatski) sustav za iskaznu logiku samo s poveznikom | postavio je 1917. *J. Nicod*.

9.1.4 Izražajna nepotpunost

Skup $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Od petero poveznika našega jezika $\mathscr{L}_i$ ne smijemo izostaviti $\neg$. Tj.

STAVAK 9.1 *Skup* $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *nije izražajno potpun.*

Razlog je tomu što je svaki iskaz u kojem nema $\neg$, zadovoljiv, tj. bez $\neg$ se ne može izgraditi nezadovoljiv iskaz. Tvrdnju da, kad bismo se ograničili samo na gornji skup poveznika, svi bi iskazi bili zadovoljivi, možemo dokazati posebnim načinom dokazivanja koji se nazivlje **matematičkom indukcijom** i često se rabi u metalogici. Za potrebe toga dokaza razdijelit ćemo iskaze jezika $\mathscr{L}_i$ bez $\neg$ u skupine prema duljini. **Duljina iskaza** jest broj pojavaka poveznika u iskazu. U prvoj su skupini iskazi duljine 0 (s 0 pojavaka poveznika, to su iskazna slova), u sljedećoj su skupini iskazi duljine 1 (s jednim pojavkom poveznika), u sljedećoj iskazi duljine 2 (s dvama pojavcima poveznika) itd. Za potrebe dokaza definirajmo i osnovno tumačenje T_0, u koje svakomu iskaznomu slovu pridžuje vrijednost **i**. Tvrdimo:

STAVAK 9.2 *Svi su iskazi bez* $\neg$ *istiniti za osnovno tumačenje* T_0, *koje svakomu iskaznomu slovu pridružuje vrijednost* ***i***.

Dokaz U dokazu stavka 9.2 služimo se zaključkom pomoću matematičke indukcije, koji se sastoji od dviju premisa: *osnovice* i *induktivnoga koraka*. Osnovica te matematičke indukcije kaže da je svaki iskaz prve skupine za T_0 istinit. Induktivni korak je pogodba koja kaže sljedeće: ako je za T_0 istinit svaki iskaz u nekoj i svim njoj prethodećim skupinama, za T_0 je istinit i svaki iskaz u sljedećoj skupini. Prednjak induktivnoga koraka nazivljemo *induktivnom hipotezom*. Iz tih dviju premisa (koje još treba dokazati) slijedi i *zaglavak* da je svaki iskaz (bilo koje skupine) istinit za osnovno tumačenje T_0. Prema tome je svaki iskaz zadovoljiv.

Evo sada prijegledno cijeloga dokaza.

Osnovica:

> Svaki iskaz bez $\neg$ duljine 0, jest istinit za T_0.

Induktivni korak:

> Ako je za T_0 istinit svaki iskaz bez $\neg$ duljine n ili manje (INDUKTIVNA HIPOTEZA),
>
> za T_0 je istinit i svaki iskaz bez $\neg$ duljine n+1.

Zaglavak:

Svaki je iskaz bez ¬ istinit za tumačenje T_0.

Sada slijede dokazi premisa (osnovice i induktivnoga koraka).

Dokaz osnovice:

Iskazi bez ¬ duljine 0 jesu iskazna slova, a njima svima T_0 pridružuje vrijednost **i**.

Dokaz induktivnoga koraka:

Iskaz p bez ¬ duljine n+1 može imati četiri oblika: $q \wedge r$, $q \vee r$, $q \rightarrow r$ i $q \leftrightarrow r$. U svim tim slučajima podiskaz q, kao i podiskaz r imaju duljinu n ili manje. Neka o njima vrijedi induktivna hipoteza (prednjak induktivnoga koraka). Prema induktivnoj hipotezi i q i r su za T_0 istiniti. Pogledajmo vrijedi li i posljedak induktivnoga koraka, tj. vrijedi li cijela pogodba (induktivni korak). Ako su i q i r istiniti, istiniti su svi oblici $q \wedge r$, $q \vee r$, $q \rightarrow r$ i $q \leftrightarrow r$ (što se lako može dokazati istinitosnom tablicom). Dakle, istinit je i svaki oblik s n+1 pojavkoma poveznikā. Time je dokazan induktivni korak.

Ako smo dokazali osnovicu i induktivni korak, dokazali smo i zaglavak - da su svi iskazi bez ¬ za T_0 istiniti. Jer, prema osnovici su za T_0 istiniti svi iskazi bez ¬ duljine 0. Ali, prema induktivnome koraku, tada su za T_0 istiniti i svi iskazi bez ¬ duljine 1. Ako su pak za T_0 istiniti svi iskazi bez ¬ duljine 1, prema induktivnome su koraku za T_0 istiniti i svi iskazi bez ¬ duljine 2, stoga su (opet prema induktivnome koraku) istiniti i svi iskazi bez ¬ duljine 3, itd. Dakle, svi iskazi bez ¬ koje god duljine n, istiniti su za T_0.

Ako su svi iskazi bez ¬ istiniti za osnovno tumačenje T_0, svi su oni zadovoljivi. Dakle se bez ¬ ne mogu izraziti nezadovoljivi iskazi, pa je skup $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ izražajno nepotpun, što je i trebalo dokazati. ⊣

Ostali izražajno nepotpuni skupovi

Ni sam ¬ nije semantički dostatan:

STAVAK 9.3 *Skup* {¬} *nije izražajno potpun.*

Samo poveznikom ¬ ne mogu se izgraditi ni valjani ni nezadovoljivi iskazi, nego su svi iskazi u kojima su svi poveznici ¬, semantički neodređeni (kontingentni), tj. zadovoljivi ali nevaljani. Tu tvrdnju također dokazujemo matematičkom indukcijom.

STAVAK 9.4 *Svaki iskaz u kojem su svi poveznici ¬, jest semantički neodređen.*

Dokaz Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.
Osnovica:

> Svaki iskaz duljine 0 u kojem su svi poveznici ¬, jest semantički neodređen.

Induktivni korak:

> Ako je svaki iskaz duljine n ili manje u kojem su svi poveznici ¬, semantički neodređen (INDUKTIVNA HIPOTEZA),
>
> onda je svaki iskaz duljine $n+1$ u kojem su svi poveznici ¬, semantički neodređen.

Zaglavak:

> Svaki je iskaz u kojem su svi poveznici ¬, semantički neodređen.

Dokaz osnovice: Iskaz duljine 0 jest jednostavan iskaz. Svaki je jednostavan iskaz za neka osnovna tumačenja istinit, a za druga neistinit, pa je prema tome semantički neodređen.

Dokaz induktivnoga koraka: Iskaz p u kojem su svi poveznici ¬ i duljine je $n+1$, uvijek ima oblik $\neg q$. Ako je q (prema induktivnoj hipotezi) semantički neodređen, onda je i $\neg q$ semantički neodređen. Jer za ona osnovna tumačenja za koja je q istinito, $\neg q$ je neistinito, i obratno, gdje je q neistinito, $\neg q$ je istinito. Dakle, u nekim je tumačenjima $\neg q$ istinito, a u nekima neistinito.

Na temelju dokazane osnovice i induktivnoga koraka slijedi zaglavak da je svaki iskaz u kojem su svi poveznici ¬, semantički neodređen. ⊣

Nije izražajno potpun ni skup $\{\neg, \leftrightarrow\}$, što se također dokazuje matematičkom indukcijom i to tako što se dokazuje da iskaz s dvama iskaznim slovima u kojem su svi poveznici ¬ i ↔, u glavnom stupcu istinitosne tablice uvijek ima paran broj (0, 2 ili 4) **i**.

Sažmimo ishod razmatranja o izražajnoj potpunosti povezničkih skupova. Od petero poveznika u jeziku $\mathscr{L}_i$ ne može se izostaviti ¬. Samomu povezniku ¬ treba pridodati barem ∧ ili ∨ ili → želimo li da skup poveznika bude izražajno potpun. Ako izostavimo ¬, potrebno je uvesti | ili ↓, kojima pak za izražajnu potpunost nije potreban drugi poveznik.

9.2 SVOĐENJE JEZIKĀ $\mathscr{L}_p$ i $\mathscr{L}_{p=}$

9.2.1 Svođenje na jedan količitelj

Služeći se *De Morganovim* zakonima za **količitelje** u semantičkome smislu:

$$\neg\forall \mathrm{x} p \simeq \exists \mathrm{x}\neg p$$
$$\neg\exists \mathrm{x} p \simeq \forall \mathrm{x}\neg p,$$

opći količitelj možemo u $\mathscr{L}_p$ i $\mathscr{L}_{p=}$ izraziti pomoću nijeka i opstojnoga količitelja, a opstojni količitelj pomoću nijeka i općega količitelja. Stoga u rječniku možemo zadržati samo jedan količiteljni simbol, bilo ∀ bilo ∃.

9.2.2 Isključivanje predmetnih konstanata i funkcijskih simbola

Iz $\mathscr{L}_p$= možemo isključiti **predmetne konstante** na način kao što isključujemo određene opise. To isključivanje možemo provesti samo kontekstualno, uz izbor odgovarajućega priroka te uz izraz uvjeta opstojnosti i jedinstvenosti. Npr. umjesto

$$Pc$$

možemo pisati:

$$\exists x[\forall y(Cy \leftrightarrow y = x) \wedge Px].$$

Općenito, umjesto predmetne konstante c uvodimo 1-mjesni prirok P^1.

U našem primjeru vrijedi da je Pc istinito u tumačenju prvoga reda $\mathcal{T}$ (modela $\mathfrak{M}$) akko je istinito u tumačenju $\mathcal{T}'$ (modela $\mathfrak{M}'$) za koje $\mathcal{T}(P^1) = \mathcal{T}'(P^1)$, a $\mathcal{T}(c) \in \mathcal{T}'(C^1)$. Pc i $\exists x[\forall y(Cy \leftrightarrow y = x) \wedge Px]$ nisu semantički istovrijedni, nego je riječ o semantičkome odnosu koji možemo općenito opisati ovim stavkom:

STAVAK 9.5 $\mathfrak{M} \models_v p(\mathrm{c})$ *akko* $\mathfrak{M}' \models_v \exists \mathrm{x}(\forall \mathrm{y}(\mathrm{Cy} \leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}) \wedge p(\mathrm{x}/\mathrm{c}))$, *pri čem* $\mathcal{T}'(\mathrm{C}^1) = \{\mathcal{T}(\mathrm{c})\}$, *a prema obziru na ostale se simbole sadržane u obama iskazima* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *ne razlikuju.*

Dokaz

> $\mathfrak{M} \models_v p(\mathrm{c})$ akko $\mathcal{T}(\mathrm{c})$ zadovoljava $p(\mathrm{x}/\mathrm{c})$.
> $\mathcal{T}(\mathrm{c})$ zadovoljava $p(\mathrm{x}/\mathrm{c})$ akko $\mathfrak{M}' \models_v \exists \mathrm{x}(\forall \mathrm{y}(\mathrm{Cy} \leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}) \wedge p(\mathrm{x}/\mathrm{c}))$,
> jer $\mathcal{T}'(\mathrm{C}^1) = \{\mathcal{T}(\mathrm{c})\}$. ⊣

Na sličan način možemo isključiti i funkcijske simbole. Naime, umjesto

$$Pf(x, y)$$

možemo pisati:

$$\exists z(\forall w(Fzxy \leftrightarrow w = z) \wedge Pz).$$

Općenito, umjesto n-mjesnoga funkcijskoga simbola f^n uvodimo n+1-mjesni prirok F^{n+1}.

Kako predmetnu konstantu možemo shvatiti kao 0-mjesni funkcijski simbol, da bismo dokazali da se iz $\mathscr{L}_p$ mogu isključiti predmetne konstante i funkcijski simboli, potrebno je dokazati sljedeći stavak:

STAVAK 9.6 $\mathfrak{M} \models_v p[\mathrm{f}(\mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_n)]$ *akko* $\mathfrak{M}' \models_v \exists \mathrm{x}(\forall \mathrm{y}(\mathrm{Fyt}_1 \ldots \mathrm{t}_n \leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}) \wedge p(\mathrm{x}/\mathrm{f}(\mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_n)))$, *pri čem* $\langle \mathrm{d}, [\![\mathrm{t}_1]\!]_v^{\mathfrak{M}}, \ldots, [\![\mathrm{t}_n]\!]_v^{\mathfrak{M}} \rangle \in \mathcal{T}'(\mathrm{F}^{1+n})$ *i uvijek* $\mathrm{d} = \{[\![\mathrm{f}(\mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_n)]\!]_v^{\mathfrak{M}}\}$, *a prema obziru na ostale se simbole sadržane u oba iskaza* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *ne razlikuju.*

Dokaz Sličan dokazu za isključenje konstanata (kao 0-mjesnih funkcijskih simbola). ⊣

9.2.3 Svedeni jezik

U potpuno svedenom obliku jezika logike prvoga reda (s '=') ostaju sljedeći simboli:

1. priroci,

2. predmetne varijable,
3. | ili ↓,
4. ∀ ili ∃, i
5. razgodci.

9.3 ZAKONI DVOJNOSTI

De Morganovi zakoni za poveznike i količitelje, pomoću kojih se međusobno definiraju ∧ i ∨, kao i ∀ i ∃, samo su posebni slučaji zakonā dvojnosti, o kojima će upravo biti riječ.

9.3.1 Zakon niječne dvojnosti za iskaznu logiku

Ako je p iskaz u kojem su svi poveznici ¬, ∧ ili ∨, njegova je **dvojina** (dual) iskaz p', koji dobivamo tako da se u p međusobno zamijene ∧ i ∨. Neka niječna dvojina $p^* = p'(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, gdje su $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ sva iskazna slova koja se javljaju u p. Tj. niječna dvojina je dvojina u kojoj je pred svako iskazno slovo predmetnuto ¬. (Razlikujmo niječnu dvojinu od običnoga nijeka dvojine.)

STAVAK 9.7 (ZAKON NIJEČNE DVOJNOSTI ZA ISKAZNU LOGIKU) *Za svaki iskaz p u kojem su svi poveznici ¬, ∧ ili ∨, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno niječnoj dvojini p^*.*

Dokaz U dokazu se služimo matematičkom indukcijom.
Osnovica:

> Za svaki iskaz p duljine 0 u kojem su svi poveznici ¬, ∧ ili ∨, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Induktivni korak:

> Ako za svaki iskaz p duljine n ili manje u kojem su svi poveznici ¬, ∧ ili ∨, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^* (INDUKTIVNA HIPOTEZA),

> onda i za svaki iskaz p duljine $n+1$ u kojem su svi poveznici $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Zaglavak:

> Za svaki iskaz p u kojem su svi poveznici $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Sada slijede dokazi premisa (osnovice i induktivnoga koraka).

Dokaz osnovice:

p je jednostavni iskaz, p^* je $\neg p$, pa su prema tome $\neg p$ i p^* semantički istovrijedni.

Dokaz induktivnoga koraka:

Iskaz p duljine $n+1$ može imati oblik $\neg q$, $q \wedge r$ ili $q \vee r$. Prema induktivnoj hipotezi $\neg q$ i $\neg r$ semantički su istovrijedni s q^*, odnosno, s r^* (jer q, kao i r, imaju svaki duljinu n ili manje).

1. p ima oblik $\neg q$. Sljedeća tablica pokazuje da su $\neg\neg q$ i $(\neg q)^* = \neg q^*$ semantički istovrijedni ako vrijedi induktivna hipteza:

q	$\neg\neg q$	$\neg q^*$
i	**i**	**i n**
n	**n**	**n i**

2. p ima oblik $q \wedge r$. Tablica pokazuje da su $\neg(q \wedge r)$ i $(q \wedge r)^* = q^* \vee r^*$ semantički istovrijedni ako vrijedi induktivna hipoteza:

q	r	$\neg(q \wedge r)$	$q^* \vee r^*$
i	**i**	**n i**	**n n n**
i	**n**	**i n**	**n i i**
n	**i**	**i n**	**i i n**
n	**n**	**i n**	**i i i**

3. p ima oblik $q \vee r$. Iz sljedeće tablice vidimo da su $\neg(q \vee r)$ i $(q \vee r)^* = q^* \wedge r^*$ semantički istovrijedni ako stoji induktivna hipoteza:

q	r	$\neg(q \vee r)$	$q^* \wedge r^*$
i	**i**	**n i**	**n n n**
i	**n**	**n i**	**n n i**
n	**i**	**n i**	**i n n**
n	**n**	**i n**	**i i i**

Time je dokazan induktivni korak, a on zajedno s osnovicom povlači zaglavak da su za svaki iskaz p u kojem su svi poveznici $\neg, \wedge$ i $\vee$, $\neg p$ i p^* semantički istovrijedni. $\dashv$

9.3.2 Zakon dvojnosti za iskaznu logiku

Sada možemo dokazati i sljedeći stavak:

STAVAK 9.8 *Dvojina p' semantički je istovrijedna s $\neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, gdje su $P_1, \ldots, P_n$ sva iskazna slova koja se javljaju u p.*

Dokaz Neka su u p svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$. $\simeq$ znači odnos semantičke istovrijednosti.

Svaki je iskaz p dvojina nekoga iskaza q,
  jer uvijek ima iskaz q koji je dvojina od p, a dvojina dvojine od p jest p,
nadalje, $q \simeq \neg q^*$, jer $\neg q \simeq q^*$, prema niječnome zakonu o dvojnosti,
dakle, $p' \simeq \neg q^*$, jer $p' = q$,
također, $q^* = p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, jer $q' = p$.
Prema tome $p' \simeq \neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$. $\dashv$

Sada dolazimo do samoga zakona dvojnosti:

STAVAK 9.9 (ZAKON DVOJNOSTI ZA ISKAZNU LOGIKU) *Ako su iskazi p i q u kojima su svi poveznici $\neg, \wedge$ i $\vee$, semantički istovrijedni, semantički su istovrijedne i njihove dvojine p' i q'.*

Dokaz Rabimo znak $\simeq$ kao izraz za semantičku istovrijednost.

Neka $p \simeq q$,
dakle, $\neg p \simeq \neg q$,
dakle, $\neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n) \simeq \neg q(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$
  (jer $\simeq$ ne ovisi o promjeni istinitosne vrijednosti iskaznih slova),
prema tome, $p' \simeq q'$ (prema stavku 9.8). $\dashv$

9.3.3 Zakon niječne dvojnosti za logiku prvoga reda

Umjesto pojma iskaza iskazne logike uvodimo pojam formule logike prvoga reda, a umjesto pojma istinitosti pojam zadovoljenosti. Na odgovarajući način poopćavamo pojam dvojine: dvojina formule p u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, jest formula p', koju dobivamo tako da se u p međusobno zamijene $\wedge$ i $\vee$, te $\forall$ i $\exists$. Niječna dvojina $p^* = p'(\neg P_1/P_1, \ldots, \neg P_n/P_n)$, gdje su $P_1, \ldots, P_n$ sva priročna slova u p, tj. niječna dvojina od p jest dvojina od p u kojoj je pred svako priročno slovo predmetnuto $\neg$. U dokazu rabimo i pojam **duljine formule** i definiramo ga brojem pojavaka djelatelj$\overline{\text{a}}$ u formuli.

STAVAK 9.10 (ZAKON NIJEČNE DVOJNOSTI ZA LOGIKU PRVOGA REDA) *Za svaku formulu p u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s niječnom dvojinom p^*.*

Dokaz Dokaz je sljedeća matematička indukcija.
Osnovica:

> Za svaku formulu p duljine 0 u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Induktivni korak:

> Ako za svaku formulu p duljine n ili manje u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^* (INDUKTIVNA HIPOTEZA),
>
> onda i za svaku formulu p duljine $n+1$ u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Zaglavak:

> Za svaku formulu p u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Sada slijede dokazi premisa (osnovice i induktivnoga koraka).
Dokaz osnovice:
p je jednostavna formula, pa je $p^* = \neg p$. Prema tome su $\neg p \simeq p^*$.

Dokaz induktivnoga koraka:

Formula p duljine n+1 može imati oblik $\neg q$, $q \wedge r$, $q \vee r$, $\forall \mathrm{x} q$ i $\exists \mathrm{x} q$. Prema induktivnoj hipotezi $\neg q$ i $\neg r$ semantički su istovrijedni s q^*, odnosno, s r^* (jer je q, kao i r, duljine n ili manje). Slučaji 1.-3. analogni su odgovarajućim slučajima u dokazu za iskaznu logiku. Preostaje dokazati slučaje 4. i 5:

4. p ima oblik $\forall \mathrm{x} q$.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \neg \forall \mathrm{x} q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \not\models_v \forall \mathrm{x} q$,
> dakle, barem za jedan d $\in$ D($\in \mathfrak{M}$), $\mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} \neg q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} q^* = (\forall \mathrm{x} q)^*$.

I *obratno*.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} q^* = (\forall \mathrm{x} q)^*$,
> dakle, barem za jedan d $\in$ D($\in \mathfrak{M}$), $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} \neg q$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle, $\mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \not\models_v \forall \mathrm{x} q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_v \neg \forall \mathrm{x} q$.

Prema tome su $\neg \forall \mathrm{x} q$ i $(\forall \mathrm{x} q)^* = \exists \mathrm{x} q^*$ semantički istovrijedni.

5. p ima oblik $\exists \mathrm{x} q$.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \neg \exists \mathrm{x} q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \not\models_v \exists \mathrm{x} q$,
> dakle, za svaki d $\in$ D($\in \mathfrak{M}$), $\mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$,
> dakle, za svaki d $\in$ D, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} \neg q$,
> dakle, za svaki d $\in$ D, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x} q^* = (\exists \mathrm{x} q)^*$.

I *obratno*.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x} q^* = (\exists \mathrm{x} q)^*$,
> dakle, za svaki $\mathrm{d} \in D(\in \mathfrak{M}), \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$,
> dakle, za svaki $\mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle, $\mathfrak{M} \not\models_v \exists \mathrm{x} q$,
> dakle, $\mathfrak{M} \models_v \neg\exists \mathrm{x} q$.

Prema tome su $\neg\exists \mathrm{x} q$ i $(\exists \mathrm{x} q)^* = \forall \mathrm{x} q^*$ semantički istovrijedni.
Slijedi zaglavak matematičke indukcije da su za svaku formulu p u kojoj su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, $\neg p$ i p^*, semantički istovrijedni. $\dashv$

9.3.4 Zakon dvojnosti za logiku prvoga reda

Za logiku prvoga reda vrijedi i stavak:

STAVAK 9.11 *Dvojina p' semantički je istovrijedna s $\neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, gdje su $P_1, \ldots, P_n$ sva priročna slova u p.*

Dokaz Dokaz je poopćen ali i analogan dokazu za iskaznu logiku. $\dashv$

Za logiku prvoga reda vrijedi i poopćeni zakon dvojnosti:

STAVAK 9.12 (ZAKON DVOJNOSTI ZA LOGIKU PRVOGA REDA) *Ako su formule p i q, u kojima su svi poveznici $\neg, \wedge$ ili $\vee$, semantički istovrijedne, istovrijedne su i njihove dvojine p' i q'.*

Dokaz Dokaz se dobiva poopćenjem u analogiji s dokazom za iskaznu logiku. $\dashv$

9.4 ZADATCI

1. Nacrtajte istinitosnu tablicu sa svim istinitosnim funkcijama s jednim argumentom i istinitosnu tablicu sa svim istinitosnim funkcijama s dvama argumentima! Izrazite svaku istinitosnu funkciju iz dviju tablica jezikom $\mathcal{L}_i$!

2. Izrazite istinitosnu funkciju koja u tabličnome prikazu ima u trećem, četvrtome i sedmome retku vrijednost **i**, iskazom u potpunome disjunktivnome normalnome obliku!

3. Izrazite istinitosnu funkciju koja u tabličnome prikazu ima u drugome, trećem i šestome retku vrijednost **n**, iskazom u potpunome konjunktivnome normalnome obliku!

4. Iskaze

$$\neg P \to \neg Q,$$
$$P \to \neg(Q \to R),$$
$$(\neg Q \leftrightarrow R) \to P$$

   izrazite svaki četirima istovrijednima iskazima, služeći se skupovima poveznika $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{|\}$ i $\{\downarrow\}$!

5. Iskaze

$$\neg P \wedge \neg Q,$$
$$P \vee (\neg P \wedge Q),$$
$$\neg(P \leftrightarrow (Q \to R))$$

   izrazite svaki jednim istovrijednim iskazom, služeći se samo skupom poveznika $\{\neg, \to\}$!

6. Iskaz

$$\forall x \neg \exists y (Pxy \to (\neg Pxc \leftrightarrow \exists z Qyz))$$

   izrazite dvama istovrijednim iskazima služeći se, jednom, skupom djelateljnih simbola $\{\forall, \neg, \wedge\}$, a drugi put, skupom djelateljnih simbola $\{\exists, \neg, \vee\}$!

7. Preoblikujte sljedeća dva iskaza svaki u istovrijedan iskaz u kojem se $\neg$ javlja samo pred iskaznim/piročnim slovima (*niječni normalni oblik*):

$$\neg(((P \vee Q) \wedge \neg(Q \wedge R)) \vee \neg(P \wedge Q)),$$
$$\neg \exists x (Px \wedge \forall y \neg(Qxy \vee Rx)).$$

Preobliku svaki put izvršite na dva načina: jednom se poslužite De Morganovim zakonima za poveznike i količitelje, a drugi put zakonom niječne dvojnosti.

Poglavlje 10

POUZDANOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA

Prisjetimo se da metateorijski simbol $\vdash$ označuje dokažljivost (sintaktičnu posljedicu) u deduktivnome sustavu. $\Gamma \vdash p$ znači da je p dokažljivo iz skupa Γ prema dokaznim pravilima deduktivnoga sustava. Ako je dokaz ispravno izgrađen, tj. u skladu s dokaznim pravilima, onda za svaki redak n u dokazu vrijedi da $\Gamma_n \vdash p_n$. Prisjetimo se na poznatome primjeru što su to pretpostavke koje vrijede u pojedinim redcima dokaza. Evo primjera dokaza u iskaznoj logici:

1	$\forall x(Px \to Qx)$	
2	$\exists xPx$	
3	Pc	
4	$Pc \to Qc$	1 i$\forall$
5	Qc	3, 4 i $\to$
6	$\exists xQx$	5 u$\exists$
7	$\exists xQx$	2, 3–6 i$\exists$

Evo i raščlambe dokaza:

Γ_n, tj. pretpostavke koje vrijede u retku n	p_n, tj. iskaz izveden u retku n	$\Gamma_n \vdash p_n$, tj. dokažljivost u retku n
$\Gamma_1 = \{\forall x(Px \to Qx)\}$	$p_1 = \forall x(Px \to Qx)$	$\Gamma_1 \vdash p_1$
$\Gamma_2 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx\}$	$p_2 = \exists xPx$	$\Gamma_2 \vdash p_2$
$\Gamma_3 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx, Pc\}$	$p_3 = Pc$	$\Gamma_3 \vdash p_3$
$\Gamma_4 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx, Pc\}$	$p_4 = Pc \to Qc$	$\Gamma_4 \vdash p_4$
$\Gamma_5 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx, Pc\}$	$p_5 = Qc$	$\Gamma_5 \vdash p_5$
$\Gamma_6 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx, Pc\}$	$p_6 = \exists xQx$	$\Gamma_6 \vdash p_6$
$\Gamma_7 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists xPx\}$	$p_7 = \exists xQx$	$\Gamma_7 \vdash p_7$

10.1 POUČAK O POUZDANOSTI

10.1.1 Pouzdanost i matematička indukcija

Poučak o pouzdanosti kaže da dokazna pravila čuvaju istinitost: ako smo krenuli od istine, zaključujući prema tim pravilima, uvijek ćemo doći do istine. Tj., ako je iskaz p dokažljiv iz nekoga skup iskaza Γ, onda je p i semantička posljedica skupa Γ:

POUČAK 10.1 (POUZDANOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA PRVOGA REDA S =) *Ako* $\Gamma \vdash p$*, onda* $\Gamma \models p$.

Dokaz
Poučak ćemo dokazati matematičkom indukcijom tako da tvrdnju o pouzdanosti najprije dokažemo za

- prvi redak dokaza, a zatim
- za svaki n+prvi redak, pod pretpostavkom (induktivnom hipotezom) da je pouzdan svaki redak do uključujući n-toga.

Kažemo da je riječ o matematičkoj indukciji na duljinu dokaza. Pritom, **duljina dokaza** jest broj redaka u dokazu. Prema poučku o pouzdanosti:

> Za svaki redak n u dokazu vrijedi da skup pretpostavaka koje vrijede u retku n, ima kao (semantičku) posljedicu iskaz upisan u redak n.

Kraće možemo pisati:

> za svaki redak n, $\Gamma_n \models p_n$.

Evo sada i matematičke indukcije kojom se dokazuje posljedični odnos u svakome retku dokaza u logici prvoga reda s istovjetnočću:

Osnovica:

> posljedični odnos vrijedi u prvome retku dokaza.

Induktivni korak:

> *ako* posljedični odnos vrijedi u retku n i u svim prethodnim redcima dokaza (INDUKTIVNA HIPOTEZA), *onda* vrijedi i u n+prvom retku.

Zaglavak:

> tvrdnja vrijedi o svakom retku u dokazu.

Zapišimo zaključak kraće i preglednije:

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \models p_1 \\ \text{Ako za svaki } m \leq n, \Gamma_m \models p_m, \text{ onda } \Gamma_{n+1} \models p_{n+1} \\ \hline \text{Za svaki redak } n, \Gamma_n \models p_n. \end{array}$$

10.1.2 Dokazi osnovice i induktivnoga koraka, zaglavak

Dokaz osnovice:

a) Ako je p_1 pretpostavka, znači da $\Gamma = \{p_1\}$. Pojednostavnjeno rečeno, svaki je iskaz svoja posljedica. Preglednije prikazano:

> Neka $\Gamma_1 = \{p_1\}$,
> $\{p_1\} \models p_1$,
> dakle, $\Gamma_1 \models p_1$.

b) Ima još jedan slučaj, koji se javlja u logici s istovjetnošću, a to je primjena pravila u =, tj. upis iskaza oblika c = c bez ikakvih pretpostavaka. U tom slučaju, dakle, skup pretpostavaka vrijedećih u prvome retku jest prazan. No c = c je posljedica praznoga skupa,

$$\varnothing \models \mathrm{c} = \mathrm{c},$$

jer je c = c istinito u svakome modelu.

Dokaz induktivnoga koraka:

Prijelaz iz *n*-toga retku u *n*+prvi moguć je u dokazu samo postavljanjem (pod)pretpostavke ili primjenom nekoga dokaznoga pravila. Dokaz induktivnoga koraka je dokaz da prijelazom u *n*+prvi redak posljedični odnos ostaje očuvan. Induktivni korak, koji je pogodbena rečenica, dokazujemo na sljedeći način:

1. prihvatimo da vrijedi prednjak induktivnoga koraka (induktivna hipoteza)

2. dokažimo da vrijedi i posljedak induktivnoga koraka.

Zadržimo se samo na nekim tipičnim slučajima.

a) Posljedični odnos u jednostavnome dokazu.

Primjer: pravilo i→.

$$\begin{array}{r|ll} i & p \to q & \\ j & p & \\ n+1 & q & \quad i, j \text{ i } \to \end{array}$$

$\Gamma_i \models p \to q$	prema induktivnog hipotezi
$\Gamma_j \models p$	prema induktivnog hipotezi
$\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$	jer je redak i dostupan u retku$n + 1$
$\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1}$	jer je redak j dostupan u retku $n + 1$
dakle, $\Gamma_{n+1} \models p \to q, p$	posljedica skupa je i posljedica nadskupa, poopćeni stavak 2.4
dakle, $\Gamma_{n+1} \models p \to q$	prema semantici pogodbe.

b) Posljedični odnos u dokazu s poddokazom.
Primjer: pravilo u→.

$$\begin{array}{r|l}
i & \quad \underline{|\, p} \\
j & \quad |\, q \\
n+1 & p \to q \quad i\text{–}j \text{ i } \to
\end{array}$$

$\Gamma_j \models q$	prema indukt. hipotezi
$\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1} \cup \{p\}$	jer je poddokaz u redcima i–j dostupan u retku $n + 1$
dakle, $\Gamma_{n+1} \cup \{p\} \models q$	
dakle, $\Gamma_{n+1} \models p \to q$	prema semantici pogodbe

Slično postupamo i u dokazu pouzdanosti neizravnoga dokaza.

c) Posljedični odnos u pravilima za količitelje.
Primjer: pravilo i∃.

$$\begin{array}{r|l}
i & \exists \mathrm{x} p \\
j & \quad \underline{|\, p(\mathrm{c}/\mathrm{x})} \\
k & \quad |\, q \\
n+1 & q \qquad\qquad i, j\text{–}k \text{ i } \exists
\end{array}$$

c se ne javlja u $\Gamma_{n+1}, \exists \mathrm{x} p$, ni u q.

Posljedični se odnos dokazuje kao i za jednostavni dokaz, s time da posebno treba dokazati sljedeću tvrdnju:

ako $\Gamma_{n+1} \models \exists \mathrm{x} p$ i $\Gamma_{n+1} \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \models q$, onda $\Gamma_{n+1} \models q$,
pod uvjetom za c kao u pravilu i∃.

Dokažimo tu tvrdnju za skup Δ općenito, pod analognim uvjetima za c.

Neka $\Delta \models \exists \mathrm{x} p$,
neka $\Delta \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \models q$ (c se ne javlja u članovima Δ, u $\exists \mathrm{x} p$ ni u q),
– neka $\Delta \not\models q$,
– dakle, ima model $\mathfrak{M}$ takav da $\mathfrak{M} \models \Delta$, ali $\mathfrak{M} \not\models q$,
– dakle, $\mathfrak{M} \not\models p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$ (v. drugu pretpostavku),
– dakle, $\mathfrak{M} \models \exists \mathrm{x} p$ (v. prvu i četvrtu pretpostavku),
– neka je $\mathfrak{M}'$ kao i $\mathfrak{M}$, osim što $[\![\mathrm{c}]\!]^{\mathfrak{M}'}$ zadovoljava p ($\mathfrak{M}' \models \exists \mathrm{x} p$ jer $\mathfrak{M} \models \exists \mathrm{x} p$),
– tada, $\mathfrak{M}' \models \Delta$ (kao i $\mathfrak{M}$), $\mathfrak{M}' \models p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$,
– ali $\mathfrak{M}' \not\models q$ (kao ni $\mathfrak{M}$),
– dakle, $\Delta \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \not\models q$ (suprotno drugoj pretpostavci),
dakle, $\Delta \models q$ (red. ad absurdum).

d) Dokažite za *vježbu* induktivni korak za slučaje uvođenja i isključenja istovjetnosti.

Slijedi da je **sustav naravne dedukcije za logiku prvoga reda s istovjetnošću pouzdan**.

Slučaj a) osnovice i slučaji a) i b) induktivnoga koraka (tj. sva dokazna pravila za iskaznu logiku) dostaju za dokaz pouzdanosti deduktivnoga sustava iskazne logike. Slučaj b) osnovice, kao ni slučaj d) induktivnoga koraka, nisu potrebni za dokaz pouzdanosti logike prvoga reda bez istovjetnosti. $\dashv$

10.2 SUVISLOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA

Definicija 10.1 (Suvislost (konsistentnost) deduktivnoga sustava) *Sustav je logike prvoga reda s istovjetnošću suvisao akko u njem nisu poučci i p i $\neg p$.*

Suvislost deduktivnoga sustava slijedi iz njegove pouzdanosti.

Stavak 10.1 *Deduktivni sustav logike prvoga reda s istovjetnošću je suvisao.*

Dokaz

– Neka $\vdash p, \neg p$ (tj. neka sustav nije suvisao),
– dakle, $\models p, \neg p$ (prema poučku o pouzdanosti) ,
– dakle, za svaki model prvoga reda $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models p, \neg p$,
dakle, $\nvdash p, \neg p$. $\dashv$

Poglavlje 11

POTPUNOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA

11.1 PRETHODNA SINTAKTIČNA RAZMATRANJA

Zadržimo se najprije na sintaktičnim pojmovima maksimalnoga suvisloga skupa, ω-potpunoga i zasićenoga skupa, te na nekim njihovim svojstvima. Nakon što uvedemo i semantički pojam kanonskoga modela, moći ćemo dati dokaz potpunosti deduktivnoga sustava logike prvoga reda (također i logike prvoga reda s istovjetnošću). – Napomenimo da je i *suvislost sustava* sintaktički pojam, iako smo ju u prethodnome poglavlju dokazali pomoću pouzdanosti sustava, dakle na temelju zaključivanja koje je uključuje semantičke pojmove.

11.1.1 Maksimalan suvisao skup iskaza

Što je maksimalan suvisao skup?

Definirajmo najprije maksimalan suvisao skup iskaza u logici prvoga reda bez istovjetnosti i dokažimo neka zanimljiva i važna svojstva maksimalnih suvislih skupova. Podrazumijevamo da se uvijek radi o iskazima jezika $\mathscr{L}_p$ i deduktivnome sustavu logike prvoga reda bez istovjetnosti koji smo definirali u prvome dijelu ovih skripta.

DEFINICIJA 11.1 (MAKSIMALAN SUVISAO SKUP) Γ^{max} *je maksimalan suvisao skup iskaza akko je*

1. *Γ^{max} suvisao, a*

2. *svaki* pravi *nadskup skupa Γ^{max} nesuvisao.*

Općenito kažemo (u teoriji skupova) da je Δ *pravi nadskup* skupa Γ, tj. $\Delta \supset \Gamma$, akko je (a) Δ *nadskup* skupa Γ ($\Delta \supseteq \Gamma$, tj. svi članovi skupa Γ članovi su skupa Δ), i (b) ima član skupa Δ koji *nije član* skupa Γ. U istome slučaju kažemo i da je Γ pravi podskup skupa Δ, tj. $\Gamma \subset \Delta$.

STAVAK 11.1 *Ako je iskaz p dokažljiv iz maksimalnoga suvisloga skupa Γ^{max}, onda je p član Γ^{max}. Kraće*

$$\textit{ako } \Gamma^{max} \vdash p, \ \textit{onda } p \in \Gamma^{max}.$$

Dokaz

Neka je Γ^{max} maksimalan suvisao skup	
Neka $\Gamma^{max} \vdash p$	
− neka $p \notin \Gamma^{max}$	
− dakle, $\Gamma^{max} \cup \{p\}$ je nesuvisao	prema definiciji 11.1
− dakle, $\Gamma^{max} \vdash \neg p$	poopćeni stavak 3.5
− ali $\Gamma^{max} \vdash p$	druga pretpostavka
− dakle, Γ^{max} je nesuvisao	poopćena def. 3.7 nesuvisloga skupa
− ali Γ^{max} je suvisao	prema def. maks. suvisloga skupa
dakle, $p \in \Gamma^{max}$	red. ad absurdum $\dashv$

Lindenbaumova lema

LEMA 11.1 (LINDENBAUMOVA LEMA) *Svaki suvisao skup iskaza podskup je barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa.*

Dokaz

Dokaz se sastoji od dvaju dijelova:

1. izgradnja nadskupa Θ za po volji izabran suvisao skup Γ,

2. dokaz da je skup Θ maksimalan suvisao skup.

1. *Izgradnja nadskupa* Θ *za po volji izabran skup* Γ

Svi se iskazi jezika $\mathscr{L}_{p=}$ mogu poredati u niz

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

tako da svaki iskaz dobije kao pokazatelj pozitivan cijeli broj, te možemo govoriti o prvom, drugom, trećem itd. iskazu. Primjerice, u tu svrhu mogu poslužiti Gödelovi brojevi (v. Gödelov dokaz poučka o nepotpunosti), koji se dobiju na temelju posebno određenih brojeva simbola i brojeva mjesta na kojima se simboli pojavljuju u iskazu.

Polazimo od zadanoga suvisloga skupa iskaza $\Gamma = \Gamma_1$ i razmatramo iskaze jedan po jedan, dodajući ih prethodno dobivenomu skupu akko time dobivamo suvisao skup. Dobivamo niz skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$:

Γ_1 je polazišni suvisao skup.
Γ_2 - razmatramo čini li skup Γ_1 proširen iskazom p_1 suvisao skup:
 ako da, $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{p_1\}$,
 ako ne, $\Gamma_2 = \Gamma_1$.
Γ_3 - razmatramo čini li skup Γ_2 proširen iskazom p_2 suvisao skup;
 ako da, $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{p_2\}$,
 ako ne, $\Gamma_3 = \Gamma_2$.
itd.

Općenito:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{p_n\} & \text{ako je } \Gamma_n \cup \{p_n\} \text{ suvislo} \\ \Gamma_n & \text{inače.} \end{cases}$$

Svaki je od skupova u izgrađenome nizu podskup idućega, tj. $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$.

Sada definiramo skup Θ kao uniju svih skupova u izgrađenome nizu, $\bigcup_n \Gamma_n$, tj., skup koji sadrži svaki iskaz koji je član barem jednoga skupa u nizu. (Primijetimo da u drukčijem poretku iskaza, i skup $\bigcup_n \Gamma_n$ može biti drukčiji.) Iz toga slijedi da $\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \Theta$.

2. *Dokaz da je* Θ *maksimalan suvisao skup*

U skladu s definicijom 11.1 maksimalnoga suvisloga skupa dokazujemo dvije stvari:

a) da je Θ suvisao,

b) da je svaki pravi nadskup skupa Θ nesuvisao.

Dokaz za *a*) (Θ je suvisao). Ako je Θ nesuvisao, neki je njegov konačan podskup Δ nesuvisao (jer dokaz uvijek ima konačan skup pretpostavaka, poopćena def. 3.1 za logiku prvoga reda). No Δ je podskup nekoga podskupa Γ_n iz niza skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, jer je svaki član skupa Δ, ako je ujedno i član Θ, morao biti dodan u nekom koraku izgradnje skupa Θ. Tada je i Γ_n nesuvisao (poopćeni stavak 3.4), što protuslovi načinu gradnje podskupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$. Evo preglednije toga dokaza.

- Neka je Θ nesuvisao.
- Dakle, neki je konačan podskup Δ od Θ nesuvisao (poopćene def. 3.7 nesuvislosti i 3.1 dokaza; Δ ne mora biti neki skup Γ_i iz izgrađenoga niza),
- ali $\Delta \subseteq \Gamma_n$, gdje $p_m \in \Delta$ ima najveći redni broj u skupu Δ, a $m \leq n$,
- dakle, Γ_n je nesuvisao (poopćeni stavak 3.4)
- ali, svaki je skup Γ_i u nizu $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ suvisao (prema načinu gradnje skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$)
- dakle, Γ_n je suvisao, čime dobivamo protuslovlje.

Dakle, Θ je suvisao (red. ad absurdum).

Dokaz za *b*) (svaki je pravi nadskup skupa Θ nesuvisao).

U gradnji skupa Θ razmatraju se svi iskazi, pa je svako suvislo proširenje skupa Θ već izvršeno u gradnji:

Neka $\Theta \subset \Theta'$	
– neka je Θ' suvisao	
– dakle, ima p_i takav da $p_i \notin \Theta$ i $p_i \in \Theta'$	prema def. pravoga nadskupa
– dakle, $\Theta \cup \{p_i\}$ je suvisao	prema poopćenom stavku 3.4
– dakle je $\Gamma_i \cup \{p_i\}$ suvisao	Γ_i je skup u postupku izgradnje skupa Θ
– dakle, $p_i \in \Gamma_{i+1}$	prema postupku izgradnje skupa Θ
– dakle, $p_i \in \Theta$	prema definiciji skupa Θ
dakle, Θ' nije suvisao.	

Drugim riječima, Θ nije pravi podskup nijednoga suvisloga skupa. To, zajedno s dokazanim uvjetom *a*), da je Θ suvisao skup, dokazuje da je Θ maksimalan suvisao skup (prema dvama uvjetima u definiciji 11.1 maksimalnoga suvisloga skupa). ⊣

Članstvo u maksimalnome suvislome skupu

STAVAK 11.2 *Ako je Γ^{max} maksimalan suvisao skup, onda*

1. $\neg p \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \notin \Gamma^{max}$,
2. $p \wedge q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \in \Gamma^{max}$ *i* $q \in \Gamma^{max}$,
3. $p \vee q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \in \Gamma^{max}$ *ili* $q \in \Gamma^{max}$,
4. $p \rightarrow q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \notin \Gamma^{max}$ *ili* $q \in \Gamma^{max}$,
5. $p \leftrightarrow q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p, q \in \Gamma^{max}$, *ili* $p, q \notin \Gamma^{max}$.

Dokaz

1. *a*) Neka $\neg p \in \Gamma^{max}$,
−neka $p \in \Gamma^{max}$,
−dakle, $\{p, \neg p\} \subseteq \Gamma^{max}$,
−dakle, Γ^{max}je nesuvisao,
što protuslovi pretpostavci,
dakle $p \notin \Gamma^{max}$ (red. ad absurdum).

b) Neka $p \notin \Gamma^{max}$,
dakle, $\Gamma^{max} \cup \{p\}$ je nesuvislo
(definicija 11.1),
dakle, $\Gamma^{max} \vdash \neg p$ (poopćeni stavak 3.5),
dakle, $\neg p \in \Gamma^{max}$ (stavak 11.1).

Dakle, $\neg p \in \Gamma^{max}$ akko $p \notin \Gamma^{max}$.

2. *a*) Neka $p \wedge q \in \Gamma^{max}$,
dakle, $\{p \wedge q\} \subseteq \Gamma^{max}$,
$\{p \wedge q\} \vdash p, q$,
dakle, $\Gamma^{max} \vdash p, q$
dakle $p, q \in \Gamma^{max}$.

b) Vježba!

Dakle, $p \wedge q \in \Gamma^{max}$ akko $p, q \in \Gamma^{max}$.

3. *a*) Neka $p \vee q \in \Gamma^{max}$,
   $-$neka $p, q \notin \Gamma^{max}$,
   $-$dakle, $\{p \vee q, \neg p, \neg q\} \subseteq \Gamma^{max}$
   (slučaj 1 ind. koraka)
   $-\{p \vee q, \neg p, \neg q\}$ je nesuvislo
   (De Morganovi zakoni),
   $-$dakle, Γ^{max} je nesuvisao,
   što protuslovi pretpostavci,
   dakle $p \in \Gamma^{max}$ ili $q \in \Gamma^{max}$
   (red. ad absurdum).

   b) Neka $p \in \Gamma^{max}$ ili $q \in \Gamma^{max}$,
   dakle, $\{p\} \subseteq \Gamma^{max}$ ili $\{q\} \subseteq \Gamma^{max}$,
   $\{p\} \vdash p \vee q, \{q\} \vdash p \vee q$ (u$\vee$),
   dakle, $\Gamma^{max} \vdash p \vee q$ (poopćeni stavak 3.1),
   dakle, $p \vee q \in \Gamma^{max}$ stavak 11.1.

Dakle, $p \vee q \in \Gamma^{max}$ akko $p \in \Gamma^{max}$ ili $q \in \Gamma^{max}$.

Slučaji se 4. i 5. stavka 11.2 dokazuju slično (*dokažite* ih za vježbu). $\dashv$

11.1.2 ω-potpun skup iskaza

Prije definiranja pojma ω-potpunoga skupa uvodimo jednostavan postupak množenja pokazatelja na predmetnim konstanatama s 2 (u nekome zadanome skupu iskaza), kojim osiguravamo beskonačnu zalihu novih (neparnih) konstanata. Ta će nam zaliha biti potrebna pri izgradnji ω-potpunih skupova. Evo najprije stavka o skupovima samo s parnim pokazateljima na konstantama.

Stavak 11.3 *Neka je Γ suvisao skup iskaza, a Γ^P skup koji je nastao od Γ množenjem svih pokazatelja na predmetnim konstantama s 2. Γ^P je suvisao akko je Γ suvisao.*

Dokaz Ako je Γ^P nesuvisao, i Γ je nesuvisao, jer ako ima dokaz nesuvislosti Γ^P (dokaz protuslovlja iz Γ^P), onda gotovo jedanak dokaz vrijedi i kao dokaz nesuvislosti Γ. Razlika je samo u pokazateljima na konstantama zadanoga skupa i, prema slučaju i potrebi, u novouvedenim konstantama (jer pri primjeni pravila i$\exists$ i u$\forall$ konstante moraju biti nove). – Zbog istoga razloga vrijedi da, ako je Γ nesuvisao, i Γ^P je nesuvisao. $\dashv$

Što je ω-potpun skup iskaza?

DEFINICIJA 11.2 (ω-POTPUN SKUP) *Skup* Γ *jest* ω*-potpun akko za svaku formulu* p *s jedinom slobodnom varijablom* x *ima barem jedna konstanta* k *iz nekoga skupa predmetnih konstanata* K*, takva da* $\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x} p\} \vdash p(\mathrm{k}/\mathrm{x})$.

Predmetnu konstantu k iz gornje definicije nazivljemo **svjedokom** za skup Γ.

Lema o ω-potpunome skupu

LEMA 11.2 (O ω-POTPUNOME SKUPU) *Svaki je suvisao skup samo s parnim pokazateljima na predmetnim konstantama podskup barem jednoga suvisloga* ω*-potpunoga skupa.*

Dokaz: Dokaz se (slično dokazu Lindenbaumove leme) sastoji od dvaju dijelova:

1. izgradnja nadskupa skupa Λ za po volji izabran suvisao skup Γ, pri čem u Γ predmetne konstante imaju samo parne pokazatelje,

2. dokaz da je Λ suvisao i ω-potpun skup.

1. *Izgradnja nadskupa* Λ *za po volji izabran skup* Γ *samo s parnim konstantama*

Sve formule jezika $\mathscr{L}_p$ koje imaju samo jednu slobodnu varijablu (koja se može u formuli javljati više puta), poredamo u niz, tako da dobijemo prvu, drugu, treću itd. takvu formulu:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Također, sve predmetne konstante jezika $\mathscr{L}_p$ poredamo u niz prema abecednom redu i prema pokazateljima tako da dobijemo prvu, drugu, treću itd. konstantu:

$$c, d, e, c_1, \ldots$$

Neka $\Gamma = \Gamma_1$. Sada tvorimo Γ_2 tako da skupu Γ_1 dodamo formulu $\exists \mathrm{x} p_1 \rightarrow p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})$, gdje p_1 sadrži slobodnu varijablu x, a k_1 je prva konstanta u nizu konstanata koja nije sadržana u Γ_1 ni u p_1 (dakle, to ne mora biti abecedno prva konstanta uopće, c_1). Slično tvorimo Γ_3 dodajući skupu Γ_2 pogodbu $\exists \mathrm{x} p_2 \to p_2(\mathrm{k}_2/\mathrm{x})$, gdje p_2 sadrži slobodnu varijablu x, a k_2 je druga konstanta u nizu konstanata koja nije sadržana u Γ_2 ni u p_2. Dakle,

$\Gamma_1 = \Gamma$,
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})\}$,
$\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{\exists \mathrm{x} p_2 \to p_2(\mathrm{k}_2/\mathrm{x})\}$,
itd.

Općenito:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists \mathrm{x} p_n \to p_n(\mathrm{k}_n/\mathrm{x})\},$$

gdje je

p_n n-ta formula koji sadrži samo jednu slobodnu varijablu, x, a
k_n abecedno prva predmetna konstanta koja nije sadržana u skupu Γ_n ni u p_n.

Neka $\Lambda = \bigcup \Gamma_n$. Tada vrijedi da $\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \Lambda$.

2. *Dokaz da je* Λ *suvisao i* ω*-potpun skup.*
U tome je dokazu sadržano sljedeće: Λ je

a) suvisao,

b) ω-potpun.

Dokaz za *a*) (Λ je suvisao).
$\Gamma_1 = \Gamma$ jest suvisao prema pretpostavci.
Ostatak se dokaza provodi matematičkom indukcijom:
Osnovica:

$$\Gamma_1 \cup \{\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})\} (= \Gamma_2) \text{ je suvisao.}$$

Induktivni korak:

Ako je skup $\Gamma_n \cup \{\exists \mathrm{x} p_n \to p_n(\mathrm{k}_n/\mathrm{x})\}$ suvisao,

onda je i skup $\Gamma_{n+1} \cup \{\exists \mathrm{x} p_{n+1} \to p_{n+1}(\mathrm{k}_{n+1}/\mathrm{x})\}$ suvisao.

Zaglavak:

$\Lambda = \bigcup_n \Gamma_n$ je suvisao.

Dokaz osnovice:

$-$Neka je $\Gamma_1 \cup \{\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})\}$ nesuvisao	
$-$dakle, $\Gamma_1 \vdash \neg(\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x}))$	poopćeni stavak 3.5
$-$dakle, $\Gamma_1 \vdash \exists \mathrm{x} p_1$	prema ded. sustavu
$-$dakle, $\Gamma_1 \vdash \neg p_1(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$	prema ded. sustavu
$-$dakle, $\Gamma_1 \vdash \forall \mathrm{x} \neg p_1$	u$\forall$, jer je k_1 nova konstanta
$-$dakle, $\Gamma_1 \vdash \neg\exists \mathrm{x} p_1$	prema ded. sustavu, protuslovlje

Dakle, $\Gamma_1 \cup \{\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})\}$ je suvisao skup.

Dokaz induktivnoga koraka: dokazuje se slično kao i osnovica.

Primijetimo kako nam je u dokazu osnovice (a slično je i u dokazu induktivnog koraka) poziv na *novu* konstantu c_1 omogućio uvođenje općega količitelja i izvođenje protuslovlja. Zbog istoga se razloga i u proširenju svakoga skupa Γ_n kao oprimjerujuća konstanta rabi uvijek nova konstanta c_n. Upravo zboga toga nam je i bila potrebna beskonačna zaliha novih, neparnih, konstanata, koja je osigurana množenjem s 2 svakoga pokazatelja na konstantama u polaznome skupu.

Dokaz za *b*) (Λ je ω-potpun). Proširimo skup Λ bilo kojim opstojnim iskazom $\exists \mathrm{x} p$, gdje p ima x kao jedinu slobodnu varijablu.

$\exists \mathrm{x} p \to p(\mathrm{k}/\mathrm{x}) \in \Lambda$	prema načinu gradnje Λ
dakle, $\Lambda \cup \{\exists \mathrm{x} p\} \vdash p(\mathrm{k}/\mathrm{x})$	i $\to$

Prema tome Λ je ω-potpun skup.

STAVAK 11.4 *Ako je Γ_ω ω-potpun skup, onda je i svaki njegov nadskup Γ'_ω ω-potpun.*

Dokaz Općenito, proširenjem skupa Γ u skup Γ' dodavanjem novih iskaza, posljedice dokažljive iz Γ ostaju dokažljive i iz skupa Γ' (prema poopćenju stavka 3.1 za logiku prvoga reda).

Neka $\Gamma_\omega \vdash \exists x p \rightarrow p(c/x)$, te
neka $\Gamma_\omega \subseteq \Gamma'_\omega$,
dakle, $\Gamma'_\omega \vdash \exists x p \rightarrow p(c/x)$.

Prema tome, ako je Γ_ω ω-potpun, onda je i njegov nadskup Γ'_ω također ω-potpun. ⊣

11.1.3 Zasićen skup

Što je zasićen skup?

Definicija 11.3 (Zasićen skup) *Kažemo da je skup iskaza Γ zasićen akko je Γ maksimalan suvisao i ω-potpun skup.*

Članstvo u zasićenome skupu

O svakome zasićenome skupu vrijedi sljedeći stavak:

Stavak 11.5 (O zasićenome skupu) *Ako je Γ_ω^{max} zasićen skup iskaza, onda vrijedi:*

1.–5. kao i u stavku 11.2,

6. $\forall x p \in \Gamma_\omega^{max}$ *akko za svaki* c, $p(c/x) \in \Gamma_\omega^{max}$,

7. $\exists x p \in \Gamma_\omega^{max}$ *akko za neki* c, $p(c/x) \in \Gamma_\omega^{max}$.

Dokaz
Slučaj 6.

$\forall x p \notin \Gamma_\omega^{max}$	akko	$\neg\forall x p \in \Gamma_\omega^{max}$ (stavak 11.2)
	akko	$\exists x \neg p \in \Gamma_\omega^{max}$ (stavak 11.1)
	akko	barem za jedan c, $\neg p(c/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ (jer je Γ_ω^{max} ω-potpun, i $\rightarrow$)
	akko	nije za svaki c, $p(c/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ (stavak 11.2). ⊣

Slučaj 7. Dokaz slijeva nadesno temelji se na ω-potpunosti skupa Γ_ω^{max} i na pravilu i$\rightarrow$. Dokaz zdesna nalijevo temelji se na pravilu u$\exists$. ⊣

11.1.4 Kanonski model i zadovoljivost zasićenih skupova

Što je kanonski model

Neka je $\Gamma_{\omega}^{\max}$ zasićen skup. Tvrdimo da je i zadovoljiv, i to sljedećim, kanonskim, modelom $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}}$:

DEFINICIJA 11.4 (KANONSKI MODEL $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} = \langle \mathrm{D}^{\mathrm{kan}}, \mathcal{T}^{\mathrm{kan}} \rangle$ ZA ZASIĆEN SKUP $\Gamma_{\omega}^{\max}$)

1. $\mathrm{D}^{\mathrm{kan}}$ = *skup svih predmetnih konstanata jezika* $\mathscr{L}_p$,
2. *za svaku predmetnu konstantu* c, $\mathcal{T}^{\mathrm{kan}}(\mathrm{c}) = \mathrm{c}$,
3. *za svaki prirok* P^n, $\langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\mathrm{kan}}(\mathrm{P}^n)$ *akko* $\mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_\mathrm{n} \in \Gamma_{\omega}^{\max}$.

Zadovoljivost zasićenih skupova

Sljedeći stavak tvrdi da kanonski model $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}}$ izgrađen prema maksimalnome i ω-potpunome suvislome skupu $\Gamma_{\omega}^{\max}$ zadovoljava skup $\Gamma_{\omega}^{\max}$.

STAVAK 11.6 (KANONSKA ZADOVOLJIVOST) *Za svaki iskaz p,* $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} \models p$ *akko* $p \in \Gamma_{\omega}^{\max}$.

Dokaz Provodi se matematičkom indukcijom.
Osnovica:

> Za svaki iskaz p s 0 pojavaka djelatelja, $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} \models p$ akko $p \in \Gamma_{\omega}^{\max}$.

Induktivni korak:

> Ako za svaki iskaz p s n ili manje pojavaka djelatelja, $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} \models p$ akko $p \in \Gamma_{\omega}^{\max}$,
>
> onda za svaki iskaz p s $n+1$ pojavkom djelatelja, $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} \models p$ akko $p \in \Gamma_{\omega}^{\max}$.

Zaglavak:

> Za svaki iskaz p, $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} \models p$ akko $p \in \Gamma_{\omega}^{\max}$.

Dokaz osnovice:
Kako svaka predmetna konstanta u $\mathfrak{M}^{\text{kan}}$ znači samu sebe, jasno je da

$$\mathfrak{M}^{\text{kan}} \models \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \text{ akko } \langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\text{kan}}(\mathrm{P}^n).$$

A iz definicije kanonskoga modela dalje proizlazi da

$$\langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\text{kan}}(\mathrm{P}^n) \text{ akko } \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \in \Gamma_\omega^{\max}.$$

Dokaz induktivnoga koraka:
Zadržimo se na nekim slučajima iskaza p duljine $n + 1$.
Slučaj $p = \neg q$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models \neg q \quad & \text{akko} \quad \mathfrak{M}^{\text{kan}} \not\models q \\ & \text{akko} \quad q \notin \Gamma_\omega^{\max} \text{ (ind. hipoteza)} \\ & \text{akko} \quad \neg q \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (stavak 11.5).} \end{aligned}$$

Slučaj $p = q \wedge r$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models q \wedge r \quad & \text{akko} \quad \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models q, r \\ & \text{akko} \quad q, r \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (ind. hipoteza)} \\ & \text{akko} \quad (q \wedge r) \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (stavak 11.5).} \end{aligned}$$

Slučaj $p = \exists \mathrm{x} q$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models \exists \mathrm{x} q \quad & \text{akko} \quad \text{neki predmet c zadovoljava } q \text{ za } \mathfrak{M}^{\text{kan}} \\ & \text{akko} \quad \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models q(c/x) \text{ (jer c označuje sebe)} \\ & \text{akko} \quad q(c/x) \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (ind. hipoteza)} \\ & \text{akko} \quad \exists \mathrm{x} q \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (stavak 11.5).} \end{aligned}$$

Ostali se slučaji dokazuju slično. Time smo dokazali *zaglavak* da je svaki iskaz istinit u kanonskome modelu akko je član maksimalnoga suvisloga i omega potpunoga skupa. ⊣

KOROLARIJ 11.1 *[Zadovoljivost zasićenoga skupa] Svaki je zasićen skup iskaza zadovoljiv.*

Dokaz Na temelju stavka 11.6 vrijedi da se za svaki zasićen skup može izgraditi kanonski model koji zadovoljava skup. $\dashv$

Vrijedi i sljedeći

STAVAK 11.7 Γ^p *je zadovoljiv akko je* Γ *zadovoljiv.*

Dokaz Ključ je dokaza sljedeća činjenica. Ako je iskaz p zadovoljiv nekim tumačenjem $\mathcal{T}$ (u modelu $\mathfrak{M}$), onda je zadovoljiv i iskaz p' koji je kao i p samo što su svi pokazatelji na konstantama pomnoženi s 2, i to tumačenjem $\mathcal{T}'$ (u modelu $\mathfrak{M}'$) koje je kao i $\mathcal{T}$, s time da $\mathcal{T}(\mathrm{c}_n) = \mathcal{T}'(\mathrm{c}_{2n})$. Vrijedi i obratno. $\dashv$

Iskazna logika i logika s istovjetnošću

NAPOMENA 11.1 (ISKAZNA LOGIKA) *Za **iskaznu** je **logiku** dostatno za dani maksimalan suvisao skup* $\Gamma^{\max}$ *definirati kanonsko tumačenje* $\mathcal{T}^{\mathrm{kan}}$ *gdje*

$$\textit{za svako iskazno slovo } \mathrm{P}, \mathcal{T}^{\mathrm{kan}}(\mathrm{P}) = \mathbf{i} \textit{ akko } \mathrm{P} \in \Gamma^{\max}_{\omega}.$$

Tada iz definicije kanonskoga tumačenja slijedi da za svaki jednostavan iskaz P, $\mathcal{T}^{\mathrm{kan}} \models p$ *akko P*$\in \Gamma^{\max}_{\omega}$*. Na temelju toga i onih dijelova prethodnoga dokaza (za logiku prvoga reda) koji se tiču sastavljenih iskaza, lako je uvidjeti da tumačenje* $\mathcal{T}^{\mathrm{kan}}$ *zadovoljava skup* $\Gamma^{\max}$*. Prema tome je u iskaznoj logici svaki maksimalan suvisao skup zadovoljiv.*

NAPOMENA 11.2 (PRIROČNA LOGIKA S FUNKCIJSKIM SIMBOLIMA) *Za priročnu logiku s **funkcijama** dokaz treba proširiti:*

Funkcijski simbol (f) *se u kanonskome modelu za maksimalan suvisao i* ω*-potpun skup* Γ^{max}_{ω} *tumači kao i obično, tj.* $\mathcal{T}^{\mathrm{kan}}(\mathrm{f})$ *je funkcija* $\mathbf{f}\colon (\mathrm{D}^{\mathrm{kan}})^n \longrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{kan}}$*. Sada poopćavamao dokaz stavka* $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}} \models p$ *akko P*$\in \Gamma^{\max}_{\omega}$ *tako da, umjesto oprimjerujućih konstanata, govorimo o oprimjerujućim zatvorenim predmetnim oznakama (slučaji jednostavnih i pokoličnih iskaza). Tako, primjerice, u slučaju jednostavnih iskaza* (t *je zatvorena predmetna oznaka),* *dokaz glasi ovako:*

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models \mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_n \quad & \textit{akko} \quad \langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\mathrm{kan}}(\mathrm{P}^n),\ \textit{gdje}\ \mathrm{c}_i = [\![\mathrm{t}_i]\!]^{\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}}} \\
& \textit{akko} \quad \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \in \Gamma_\omega^{max} \\
& \textit{akko} \quad \mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_n \in \Gamma_\omega^{max} (\textit{jer}\ \{\mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n\} \vdash \mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_n
\end{aligned}
$$

11.2 POUČAK O POTPUNOSTI

11.2.1 Logika prvoga reda

Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju:

STAVAK 11.8 *Ako je skup iskaza Δ suvisao, Δ je zadovoljiv.*

Dokaz

- Neka je Δ suvisao,
- dakle, suvisao je i Δ^P (stavak 11.3),
- Δ^P je podskup barem jednoga suvisloga skupa Δ_ω koji je ω-potpun (lema 11.2),
- Δ_ω je podskup barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa Δ^{max} (Lindenbaumova lema 11.1),
- $\Delta^{max} = \Delta_\omega^{\mathrm{max}}$, tj. jest ω-potpun (stavak 11.4),
- dakle $\Delta^P \subseteq \Delta_\omega^{\mathrm{max}}$ (def. nadskupa),
- $\Delta_\omega^{\mathrm{max}}$ je zadovoljiv (modelom $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}}$, stavak 11.6),
- dakle, i Δ^P je zadovoljiv,
- dakle, i Δ je zadovoljiv (stavak 11.7),

dakle, ako je Δ suvisao, Δ je zadovoljiv.

Dokažimo sada i sam poučak o potpunosti:

POUČAK 11.1 (POUČAK O POTPUNOSTI) *Ako $\Gamma \models p$, onda $\Gamma \vdash p$.*

Dokaz

Ako je Δ nezadovoljiv, Δ je nesuvisao (prema gornjem stavku 11.8),
dakle, ako je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljivo, onda je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvislo (ako $\Delta = \Gamma \cup \{\neg p\}$),
dakle, ako $\Gamma \models p$, onda $\Gamma \vdash p$.

11.2.2 Istovjetnost

Najprije je potrebno nadopuniti stavak 11.2 o članstvu u maksimalnim suvislim skupovima (Γ^{max}), i to dvama slučajima.

a) $\mathrm{c} = \mathrm{c} \in \Gamma^{max}$, za svaku predmetnu konstantu c.

Dokaz se osniva na deduktivnome pravilu u=.

b) Ako $\mathrm{c} = \mathrm{d} \in \Gamma^{max}$, onda za svaki iskaz $p(\mathrm{d}) \in \Gamma^{max}$, $p(\mathrm{c}/\mathrm{d}) \in \Gamma^{max}$, i za svaki iskaz $p(\mathrm{c}) \in \Gamma^{max}$, $p(\mathrm{d}/\mathrm{c}) \in \Gamma^{max}$.

Dokaz se osniva na deduktivnome pravilu i=.

Potrebne su odgovarajuće promjene i u dokazu poučka o zadovoljivosti maksimalnoga suvisloga skupa sa svjedočnim skupom konstanata. Kako se sada javljaju i istovjetnosni iskazi, moramo napustiti ideju da svaka predmetna konstanta označuje sebe i dopustiti da više predmetnih konstanata može označivati istu konstantu. Uvodimo pojam **istovrijednosnoga razreda** [c]:

DEFINICIJA 11.5 (ISTOVRIJEDNOSNI RAZRED KONSTANATA, [c], U MODELU $\mathfrak{M}$)

$$[\mathrm{c}] = \{\mathrm{c}' \mid \mathfrak{M} \models \mathrm{c} = \mathrm{c}'\}.$$

Sada definiramo kanonski model $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}=}$:

DEFINICIJA 11.6 (KANONSKI MODEL $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}=} = \langle \mathrm{D}^{\mathrm{kan}=}, \mathcal{T}^{\mathrm{kan}=} \rangle$ ZASIĆENOGA SKUPA $\Gamma^{\mathrm{max}}_{\omega}$)

1. $\mathrm{D}^{\mathrm{kan}=}$ *= skup svih istovrijednosnih razreda za svaku predmetnu konstantu jezika* $\mathscr{L}_{p=}$,
2. *za svaku predmetnu konstantu* c, $\mathcal{T}^{\mathrm{kan}=}(\mathrm{c}) = [\mathrm{c}]$,
3. *za svaki prirok* P^n *(uključujući i =),* $\langle [\mathrm{c}_1], \ldots, [\mathrm{c}_n] \rangle \in \mathcal{T}^{\mathrm{kan}=}(\mathrm{P}^n)$ *akko* $\mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c_n} \in \Gamma^{\mathrm{max}}_{\omega}$,
4.

Dokazujemo da je svaki iskaz p istinit za model $\mathfrak{M}^{\mathrm{kan}=}$, izgrađen za maksimalan suvisao i ω-potpun skup $\Gamma^{\mathrm{max}}_{\omega}$, akko je p član skupa $\Gamma^{\mathrm{max}}_{\omega}$. Dokaz je sličan dokazu za logiku bez istovjetnosti s time da u osnovici matematičke indukcije dodajemo slučaj za istovjetnosne iskaze:

$$\mathfrak{M}^{\text{kan=}} \models c_1 = c_2 \text{ akko } c_1 = c_2 \in \Gamma_\omega^{\text{max}}.$$

Dokaz

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M}^{\text{kan=}} \models c_1 = c_2 & \text{akko} & \mathcal{T}^{\text{kan=}}(c_1) = \mathcal{T}^{\text{kan=}}(c_2) \\ & \text{akko} & [c_1] = [c_2] \text{ (def. 11.6)} \\ & \text{akko} & \text{za svaki } c_1', c_2' \text{ za koje } c_1 = c_1', c_2 = c_2' \in \Gamma_\omega^{max}, \text{ vrijedi da} \\ & & c_1' = c_2' \in \Gamma_\omega^{max} \text{ (def. 11.5, 11.6)} \\ & \text{akko} & c_1 = c_2 \in \Gamma_\omega^{max} \text{ (jer } c_1 = c_2, c_2 = c_2 \in \Gamma_\omega^{max}, \text{ slijeva na desno,} \\ & & \text{i jer } \{c_1' = c_1, c_1 = c_2, c_2 = c_2'\} \models c' = c_2', \text{ zdesna na lijevo).} \end{array}$$

Ostali se slučaji dokazuju slično kao i za piročnu logiku bez istovjetosti.

11.3 ZADOVOLJIVOST, PREBROJIVOST, KONAČNOST

Najprije dokažimo tvrdnju:

STAVAK 11.9 *Ako je* Γ *zadovoljiv, onda je* Γ *suvisao.*

Dokaz
- Neka je Γ nesuvisao
- dakle, $\Gamma \vdash p, \neg p$
- dakle, $\Gamma \models p, \neg p$ (poučak o pouzdanosti)
- dakle, Γ je nezadovoljiv (stavak 4 iz 12.1)

dakle, ako je Γ zadovoljiv, onda je Γ suvisao (protupostav).

11.3.1 Löwenheimov i Löwenheim-Skolemov poučak (silazni)

Razlikujmo izbrojive i prebrojive skupove. Prebrojiv je svaki skup koji je jednakobrojan skupu pozitivnih cijelih brojeva. Takav je primjerice skup svih predmetnih konstanata jezika $\mathscr{L}_p$ ili $\mathscr{L}_p$= (kao i sam skup pozitivnih cijelih brojeva, ili skup prirodnih brojeva, ili skup racionalnih brojeva). Neprebrojiv je, primjerice, skup svih realnih brojeva.

POUČAK 11.2 (LÖWENHEIMOV POUČAK) *Ako je iskaz p zadovoljiv, zadovoljiv je nekim modelm s prebrojivim predmetnim područjem.*

POUČAK 11.3 (LÖWENHEIM-SKOLEMOV POUČAK) *Ako je skup iskaza* Γ *zadovoljiv, zadovoljiv je nekim modelm s prebrojivim predmetnim područjem.*

Dokaz

Neka je Γ zadovoljiv,
dakle, Γ je suvisao (stavak 11.9),
dakle, Γ je zadovoljiv kanonskim modelom $\mathfrak{M}^{\text{kan}}$ ili njegovom inačicom $\mathfrak{M}^{\text{kan}\prime}$, pri čem za svaku konstantu c_i koja se javlja u Γ, $\mathscr{T}^{\text{kan}\prime}(c_i) = \mathscr{T}^{\text{kan}}(c_{2i})$,
dakle, Γ je zadovoljiv u modelu s prebrojivim skupom predmetnih konstanata kao predmetnim područjem (poučak o potpunosti).

Dakle, ako je Γ zadovoljiv, Γ je zadovoljiv modelom s prebrojivim predmetnim područjem

Löwenheimov i Löwenheim-Skolemov poučak, kako smo ih formulirali, **ne** stoje za priročnu logiku s **istovjetnošću**. Jer predmetno područje u kanonskome modelu može biti samo jedan predmet. Tako je npr. iskaz

$$\forall x x = c$$

istinit samo u modelu s jednočlanim predmetnim područjem. No, za logiku prvoga reda s istovjetnošću vrijede preformulacije Löwenheimova i Löwenheim-Skolemova poučka, tako da umjesto riječi "prebrojiv" stavimo "izbrojiv" (zašto?).

11.3.2 Kompaktnost

POUČAK 11.4 (POUČAK O KOMPAKTNOSTI) *Ako je svaki konačan podskup* Γ *skupa* Δ *zadovoljiv,* Δ *je zadovoljiv.*

Dokaz

- Neka je Δ nezadovoljiv,

- dakle, Δ je nesuvisao (stavak 11.8),
- dakle, ima neki konačan nesuvisao podskup Γ od Δ (poopćena def. 3.1 dokaza),
- dakle, ima neki konačan nezadovoljiv podskup Γ od Δ (stavak 11.9),

dakle, ako je Δ nezadovoljiv, ima neki njegov nezadovoljiv podskup Γ,
dakle, ako je svaki podskup Γ zadovoljiv, Δ je zadovoljiv.

Literatura

[1] Barwise, J., Etchemendy, J. *Language, Proof and Logic*. Stanford, Ca.: CSLI, 1999.

[2] Bergmann, M., Moor, J., Nelson, J. *The Logic Book*, 3. izd. New York etc.: McGraw-Hill, 2003.

[3] Boolos, G., Burgess, J. P., Jeffrey, R. *Computability and Logic*, 4. izd. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

[4] Bostock, D. *Intermediate Logic*. Oxford: Clarendon, 1997.

[5] Ćirović, B. *Uvod u matematičku logiku i teoriju rekurzivnih funkcija*. Zagreb: Filozofsko-teološki institut Družbe Isusove, 1996.

[6] Fitch, F. B. *Symbolic Logic : an Introduction*. New York: Ronald Press, 1952.

[7] Jeffrey, R. *Formal Logic : its Scope and Limits*, 2. izd. New York etc.: McGraw-Hill, 1989.

[8] Kovač, S. *Logika*, 10. izd. Zagreb: Hrvatska sveučilišna naklada, 2006.

[9] Kutschera, F. v., Breitkopf, A. *Einführung in die moderne Logik*, 8. izd. Freiburg etc.: Alber, 1997.

[10] Macan, I. *Uvod u tradicionalnu logiku*. Zagreb: Filozofski fakultet Družbe Isusove, 2005.

[11] Mates, B. *Elementary Logic*, 2. izd. New York: Oxford University Press, 1972.

[12] Papić, P. *Uvod u teoriju skupova*. Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo, 2000.

[13] Rivenc, F. *Introduction à la logique*. Paris: Payot, 1989.

[14] Smullyan, R. *First-Order Logic*. New York: Dover, 1995.

[15] Vuković, M. *Matematička logika I : skripta,* 3. izd. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu PMF-Matematički odjel, 2004.