Problem tangente (Leibniz)

$f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $x_0 \in I$
Prirast argumenta: $\triangle x = x - x_0$
Promjena ili prirast funkcije: $\triangle y = f(x) - f(x_0)$
Koeficijent smjera sekante: $k_s = \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$
Koeficijent smjera tangente: $k_s \to k_t$ kad $\triangle x \to 0$

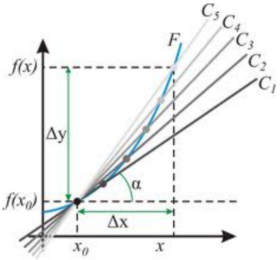

Figure: Tangenta na krivulju

Problem brzine (Newton)

Put (funkcija vremena t): $s(t)$

Prosječna (srednja) brzina u vremenu $t - t_0$: $\overline{v} = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

Brzina u trenutku t_0: $\overline{v} \to v(t_0)$ kad $t \to t_0$

Prosječna (srednja) akceleracija u vremenu $t - t_0$: $\overline{a} = \dfrac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$

Akceleracija u trenutku t_0: $\overline{a} \to a(t_0)$ kad $t \to t_0$

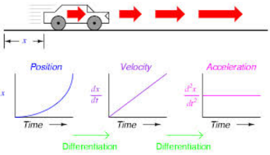

Figure: Brzina i akceleracija

Definicija derivacije

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $x_0 \in I$. Ako postoji limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

onda taj limes nazivamo **derivacijom funkcije** f **u točki** x_0 i označavamo s $f'(x_0)$. Još kažemo da je f **derivabilna** ili **diferencijabilna u točki** x_0

Funkcija f je **derivabilna** ili **diferencijabilna na otvorenom intervalu** ako je u svakoj točki tog intervala ima derivaciju.

Oznake: f', $\dfrac{df}{dx}$

Derivacije višeg reda: $f'', f''', f^{iv}, \ldots, f^{(k)}$ ili $\dfrac{d^2 f}{dx}, \dfrac{d^3 f}{dx}, \dfrac{d^4 f}{dx}, \ldots, \dfrac{d^k f}{dx}$

Tangenta i normala

Jednadžba tangente na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Jednadžba normale na graf funkcije $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$, $f'(x_0) \neq 0$, glasi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) = 0$ onda jednadžba normale glasi $x = x_0$.

Derivacija i neprekidnost

Teorem

Ako je fukcija f diferencijabilna u točki x onda je ona i neprekidna u u točki x.

Obrat ne vrijedi!

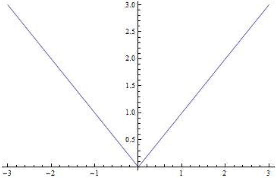

Figure: $f(x) = |x|$ nema derivaciju u $x = 0$

Pravila deriviranja.Derivacija kompozicije funkcija. Derivacija invezne funkcije

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$
$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$
$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Tablica derivacija elementarnih funkcije

$f(x)$	$f'(x)$
$c(\text{const.})$	0
$x^n,\ n \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}\ (n = \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti

Teorem

Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada postoji točka $c \in \langle a, b \rangle$ takva da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

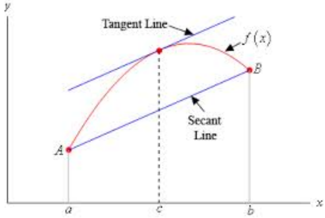

Figure: Geometrijska interpretacija teorema srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Primjer. Odredimo tangentu na kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ u točki $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Rješenje. Jednadžba kružnice glasi

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Ako shvatimo $y = y(x)$, onda iz formulu za deriviranje složene funkcije slijedi

$$2x + 2yy' = 0.$$

Otuda je

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Stoga je

$$y'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1,$$

pa jednadžba tangente u točki $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ glasi

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -(x - \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

odnosno

$$y = -x + \sqrt{2}.$$

Derivacija implicitno zadane funkcije II

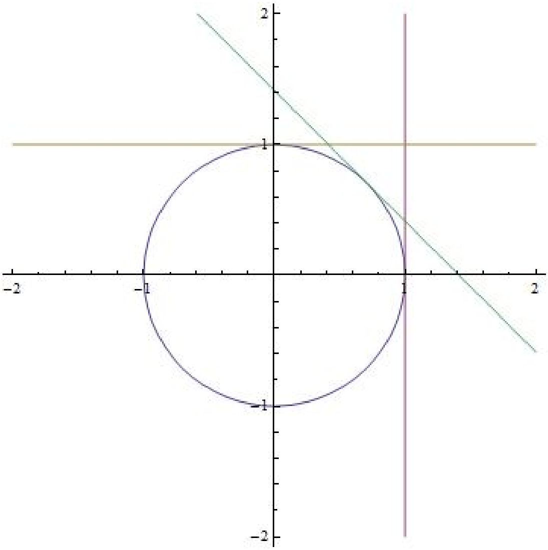

Figure: Tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 1$

Pad i rast funkcije. Stacionarne točke

Teorem o padu i rastu funkcije

Funkcija f **raste** na intervalu $\langle a, b\rangle$ akko $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.
Funkcija f **pada** na intervalu $\langle a, b\rangle$ akko $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$.

Stacionarne točke

su rješenja jednadžbe

$$f'(x) = 0.$$

Stacionarne točke dijele područje definicije na **intervale monotonosti**.

Ekstremi funkcije I

Minimum i maksimum funkcije

Funkcija f ima u x_0 **lokalni maksimum** ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži x_0 takav da vrijedi

$$f(x_0) \geq f(x), \ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Funkcija f ima u x_0 **lokalni minimum** ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži x_0 takav da vrijedi

$$f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Teorem o ekstremu funkcije

Ako je funkcija u točki ekstrema diferencijabilna onda je derivacija funkcije u toj točki jednaka nuli.

Ekstremi funkcije II

Određivanje ekstrema

Neka je x_0 stacionarna točka ($f'(x_0) = 0$).

$x \in \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$	$x \in \langle x_0, x_0 + \delta \rangle$	karakter točke x_0
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	x_0 je maks.
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	x_0 je min.
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	x_0 nije ekstrem
$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	x_0 nije ekstrem

Kriterij za određivanje ekstrema pomoću viših deriv.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \; f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ako je n **neparan**, onda x_0 **nije** točka ekstrema.
Ako je n **paran**, onda x_0 **je** točka ekstrema i to
minimum ako $f^{(n)}(x_0) > 0$, odnosno **maksimum** ako $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Ekstemi funkcije III

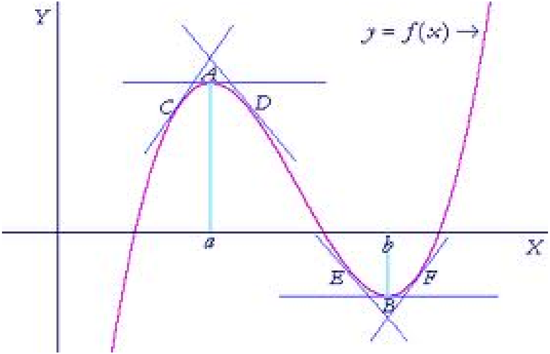

Figure: Ekstremi, pad, rast

Konveksnost i konkavnost

Funkcija je konveksna na $\langle a, b\rangle$

ako

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

(Graf funkcije na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ leži **ispod** sekante kroz točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.)

Funkcija je konkavna na $\langle a, b\rangle$

ako

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \ \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

(Graf funkcije na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ leži **iznad** sekante kroz točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.)

Određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti

Teorem

- Na intervalu na kojem je $f''(x) > 0$ funkcija f je konveksna.
- Na intervalu na kojem je $f''(x) < 0$ funkcija f je konkavna.
- U točki c takvoj da je $f''(c) = 0$ i f'' mijenja predznak kroz c, funkcija ima točku **infleksije** (**pregiba**).

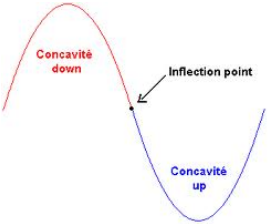

Figure: Točka infleksije, konveksnost, konkavnost

Ispitivanje toka funkcije

- Područje definicije (domena)
- Nultočke funkcije ($f(x) = 0$)
- Asimptote funkcije (limesi fukcije u $\pm\infty$ i točkama u kojima nije def.)
- Intervali monotonosti i točke ekstrema (- ispitivanje prve derivacije)
- Intervali zakrivljenosti i točke infleksije (- ispitivanje druge derivacije)

L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo koristi se kod računanja limesa neodređenih oblika

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Teorem (L'Hospitalovo pravilo)

Neka za funkcije $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

Neka su f i g neprekidne na skupu $[a, b]$ i neprekidno derivabilne na skupu $\langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle$, te $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle$. Ako postoji $\lim\limits_{x\to c} f'(x)/g'(x) = k$, pri čemu je $k \in \mathbb{R}$ ili $k = \infty$ ili $k = -\infty$, tada je

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k.$$

L'Hospitalovo pravilo II

Napomene:

- L'Hospitalovo pravilo vijedi i kada $x \to \infty$ ili $x \to -\infty$, za neodređeni oblik ∞/∞ te za limese i derivacije slijeva ili zdesna.
- L'Hospitalovo pravilo se može primijeniti više puta uzastopce.
- Ostali neodređeni oblici

$$0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

mogu se svesti na jedan od oblika $0/0$ ili ∞/∞.