Derivacije funkcija - zadatci

$f(x)$	$f'(x)$
c(const.)	0
$x^n,\ n \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}\ (n = \frac{1}{2})$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Pravila deriviranja

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$
$$(f \circ g)'(x) = (f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

   (1) $f(x) = 3x^2 + 5$ (2) $f(x) = x^m + \dfrac{1}{m}$ (3) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 3x^2$
   (4) $f(x) = x^{0.6} \cdot \sqrt[5]{x^3}$ (5) $f(x) = (3x^2 + 1)^2$ (6) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
   (7) $f(x) = 3\sin x + 4\operatorname{tg} x$ (8) $f(x) = x \cos x$ (9) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$
   (10) $f(x) = \sin x \cdot \arcsin x$ (11) $f(x) = 2^x \cos x + x^2 \arccos x$ (12) $f(x) = (0.17)^x + x^{0.17}$

2. Odredite derivacije sljedećih funkcija:

   (1) $f(x) = \cos(\ln x)$ (2) $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ (3) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + x)$,
   (4) $f(x) = \ln \sqrt{e^x}$ (5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (6) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,
   (7) $f(x) = 2^{\sin x}$ (8) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ (9) $f(x) = \ln(1 + \sin \sqrt{x})$

3. Odredite derivacije sljedećih implicitno zadanih funkcija:

   a) $x^2 + y^2 = r^2$, b) $y^2 = 4x$, c) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, d) $y = x + \sin y$.

4. Odredite sve derivacije polinoma $p(x) = x^4 + 6x^2 + 9x + 5$.

5. Odredite treću derivaciju funkcije $f(x) = x^2 \ln x$.

6. a) Pokažite da funkcija $y = 2\cos 3x - \sin 3x$ zadovoljava relaciju (tj. diferencijalnu jednadžbu) $y'' + 9y = 0$.

   b) Pokažite da funkcija $y = e^{-6x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y'' + 5y' - 6y = 0$.

7. Odredite jednadžbe tangente i normale krivulje u zadanoj točki:

   a) $y = 4x^2 + 4x - 3$, $T(-1, y_0)$, b) $y = \frac{1}{3}x^3$, $T(-1, y_0)$, c) $y = \sin x$, $T(-\pi, y_0)$.

8. U kojim točkama krivulja $y = x^3 - 3x^2 + 1$ ima tangente paralelene s x-osi.

9. Pokažite da se parabola $y^2 = 4x$ i elipsa $2x^2 + y^2 = 6$ sijeku pod pravim kutom.

10. Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje

    a) $x^2 = 4(y+1)$ i $x^2 = -16(y-4)$, b) $y^2 = 9x$ i $x^2 + y^2 + 8x - 84 = 0$,
    c) $x^2 - y^2 = 5$ i $4x^2 + 9y^2 = 72$.

11. Tijelo se giba prema zakonu $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t$, gdje je t vrijeme. U kojem trenutku ima brzinu jednaku 5.

12. Odredite tok sljedećih funkcija (tj. odredite domenu, nultočke, točke ekstrema, intervale pada/rasta, točke infleksije, intervala konveksnosti/konkavnosti, asimptote):

    (1) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (2) $f(x) = x^2 + 2/x$ (3) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$
    (4) $f(x) = \ln x/x$ (5) $f(x) = \ln(e + \frac{1}{x})$ (6) $f(x) = \sin x + \cos x$
    (7) $f(x) = x + \sin x$ (8) $f(x) = e^x/x$ (9) $f(x) = e^{\sin x}$

13. Primjenom L'Hospitalovog pravila izračunajte sljedeće limese:

    (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+7)}{2\sqrt{x}+\pi}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin(5x))}$,

    (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x \ln x$,

    (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$

    (7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$

Rješenja: **1.** (1) $6x$, (2) $mx^{m-1} - mx^{-m-1}$, (3) $\frac{1}{3}x^{-2/3} - 6x$, (4) $\frac{6}{5}x^{1/5}$, (5) $36x^3 + 12x$, (6) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, (7) $3\cos x + \frac{4}{\cos^2 x}$, (8) $\cos x - x\sin x$, (9) $-\frac{x\ln x + \sin x\cdot\cos x}{x\cdot\ln^2 x\cdot\sin^2 x}$, (10) $\cos x\cdot\arcsin x + \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$, (11) $\ln 2\cdot 2^x\cos x - 2^x\sin x + 2x\arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, (12) $f(x) = \ln 0.17\cdot(0.17)^x + 0.17x^{-0.83}$.

2. (1) $-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$, (2) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, (3) $\frac{1}{\cos^2(x^2+x)}(2x+1)$, (4) $\frac{1}{2}$, (5) $\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, (6) $\frac{1}{\cos x}$, (8) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, (9) $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}(1+\sin x)}$.

3. (a) $y' = -x/y$ (b) $y' = 2/y$, (c) $y' = (b^2x)/(a^2y)$, (d) $y' = 1/(1+\cos y)$.

4. $p'(x) = 4x^3 + 12x + 9$, $p''(x) = 12x^2 + 12$, $p'''(x) = 24x$, $p^{iv}(x) = 24$, $p^{(n)}(x) = 0$ za sve $n \geq 5$,

5. $f'(x) = 2x\ln x + x$, $f''(x) = 2\ln x + 3$, $f'''(x) = 2/x$,

6. (a) $y' = -6\sin 3x - 3\cos 3x$, $y'' = -18\cos 3x + 9\sin 3x$, (b) $y' = -6e^{-6x}$, $y'' = 36e^{-6x}$.

7. (a) U točki $T(-1,-3)$ jedn. tangente je $y = -4x + 1$, a jedn. normale je $4y = x - 13$, (b) U točki $T(-1,-1/3)$ jedn. tangente je $y = x + 2/3$, a jedn. normale je $y = -x - 4/3$, (c) U točki $T(-\pi, 0)$ jedn. tangente je $y = -x - \pi$, a jedn. normale je $y = x + \pi$, **8)** U $T_1(0,1)$ i $T_2(2,-3)$.

9) Krivulje se sijeku u točkama $T(1,2)$ i $T'(1,-2)$. Koeficijenti smjera tangenti na parabolu $y^2 = 4x$ su $k_1 = 1$ i $k_1' = -1$, a koeficijenti smjera tangenti na elipsu $2x^2 + y^2 = 6$ su $k_2 = -1$ i $k_2' = 1$. Kako je $k_1\cdot k_2 = -1$ i $k_1'\cdot k_2' = -1$, slijedi da se krivulje sijeku pod pravim kutom.

10. (a) Krivulje sijeku u točkama $T(4,3)$ i $T'(-4,3)$. Koeficijenti smjera tangenti na $x^2 = 4(y+1)$ su $k_1 = 2$ i $k_1' = -2$, a koeficijenti smjera tangenti na $x^2 = -16(y-4)$ su $k_2 = -1/2$ i $k_2' = 1/2$. Kako je $k_1\cdot k_2 = -1$ i $k_1'\cdot k_2' = -1$, slijedi da se krivulje sijeku pod pravim kutom. (b) Krivulje sijeku u točkama $T(4,6)$ i $T'(4,-6)$. Koeficijenti smjera tangenti na $y^2 = 9x$ su $k_1 = 3/4$ i $k_1' = -3/4$, a koeficijenti smjera tangenti na $x^2 + y^2 + 8x - 84 = 0$ su $k_2 = -4/3$ i $k_1' = 4/3$. Kako je $k_1 \cdot k_2 = -1$ i $k_2' \cdot k_2' = -1$, slijedi da se krivulje sijeku pod pravim kutom.

(c) Krivulje sijeku u točkama $T_1(2,3)$, $T_2(2,-3)$, $T_3(-2,3)$, $T_4(-2,-3)$. Koeficijenti smjera tangenti na $x^2 - y^2 = 5$ su $k_1 = 2/3$ i $k_1' = -2/3$, a koeficijenti smjera tangenti na $4x^2 + 9y^2 = 72$ su $k_2 = -8/27$ i $k_2' = 8/27$. U oba slučaja je kut približno jednak $50,2^\circ$.

11) $x'(t) = t^2 - 3t + 1 = 5$ povlači da je $t_1 = 4$ i $t_2 = -1$. Budući da t predstavlja vrijeme, odgovor je u trenutku $t_1 = 4$.

13) (1) 0 (2) 1 (3) 0 (4) 0 (5) n (6) ∞ (7) 0

Derivacije funkcija - pitanja

1. Definirajte derivaciju funkcije u točki. Što znači da funkcija dervabilna na nekom skupu?
2. U kojoj su vezi neprekidnost i derivabilnost funkcije (u točki)?
3. Geometrijski interpretirajte derivaciju funkcije.
4. Kako definiramo kut pod kojim se sijeku krivulje i kako ga računamo?
5. Iskažite L'Hospitalovo pravilo.
6. Definirajte (strogi) lokalni minimum/maksimum funkcije.
7. Fermatov teorem (iskaz, interpretacija, primjena).
8. Lagrangeov teorem (iskaz, interpretacija, primjena).
9. Što je točka infleksije?
10. Definirajte pojam konveksne/konkavne funkcije?