Fakultet prometnih znanosti Zagreb

Matematika 1

Pismeni ispiti i rješenja

Sadržaj

Ovi materijali su preuzeti sa stranice **www.matematicko-podzemlje.com**.

Unatoč uloženom naporu, moguće je da se ponegdje potkrala kakova greška. Ukoliko uočite koju, molim javite mi na e-mail **matematicko.podzemlje(a)gmail.com** da je ispravim. Hvala.

Isto tako, ukoliko imate (novijih) pismenih koji nisu sadržani u ovom dokumentu, molim pošaljite mi ih da ih riješim i uključim. Hvala.

2009-02-02 (A)

1. Trokut ABC je određen vrhovima $A(3,-2,3)$, $B(-2,1,2)$ i $C(3,0,-1)$. Nađite opseg trokuta, te odredite u stupnjevima kut $\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Odredite prirodno područje definicije funkcije, te njenu derivaciju u $x = 1$:
$$f(x) = \arcsin(x-1) + \ln(-x^2 + x + 2)$$

3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti, te moguće točke infleksije funkcije
$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-x}$$

4. Izračunajte integral $\displaystyle\int_1^2 (2x-1)\sqrt{x^2 - x}\,\mathrm{d}x$.

5. Izračunajte veličinu onog dijela površine omeđene parabolom $y = -x^2 + 3x + 3$ koji se nalazi iznad pravca $y = -1$.

Rješenja

1. $O = 2\sqrt{35} + \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\sqrt{7} + 1)$
$\alpha = 67°47'32''$

2. $D(f) = [0, 2\rangle$
$f'(1) = \frac{1}{2}$

3. $D(f) = \mathbb{R}$
na $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$ konveksna; na $\langle 1, 3\rangle$ konkavna
točke infleksije: $T(1, \frac{2}{e})$, $T(3, \frac{10}{e})$

4. $I = \frac{4}{3}\sqrt{2}$

5. $P = \frac{125}{6}$

2009-02-02 (B)

1. Paralelogram $ABCD$ ima zadane vrhove $A(3,-2,3)$, $B(-2,1,2)$ i $C(3,0,-1)$. Nađite koordinate četvrtog vrha D te površinu paralelograma.

2. Odredite prirodno područje definicije zadane funkcije i njenu derivaciju:
$$f(x) = \ln(8-2x)\cdot\sqrt{x^2+3x+4}$$

3. Odredite domenu, intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = (x-1)\cdot\sqrt{x+5}.$$

4. Izračunajte integral $\displaystyle\int_2^3 x^2\sqrt{x^3-4}\,\mathrm{d}x$.

5. Izračunajte veličinu onog dijela površine omeđene parabolom $y = x^2-3x-2$ koji se nalazi ispod pravca $y=2$.

Rješenja

1. $D(8,-3,0)$
$P = 10\sqrt{6}$

2. $D(f) = \langle -\infty, 4\rangle$
$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x+4}}{x-4} + \frac{(2x+3)\ln(8-2x)}{2\sqrt{x^2+3x+4}}$

3. $D(f) = [-5,+\infty\rangle$
na $[-5,-3\rangle$ raste, na $\langle -3,+\infty\rangle$ pada
ekstrem $T_{\min}(-3,-4\sqrt{2})$

4. $I = \frac{2}{9}(23\sqrt{23}-8)$

5. $P = \frac{185}{6}$

2009-02-09 (A)

1. Nađite površinu i opseg trokuta ABC određenog vektorima
$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 4\vec{j}, \qquad \overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

2. Odredite prirodno područje definicije zadane funkcije i njenu derivaciju:
$$f(x) = \arcsin(1-3x) + \ln(4x^2 - 4x + 1).$$

3. Odredite domenu, intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = x^3 e^{1/x}.$$

4. Izračunajte integral parcijalnom integracijom $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln(2x)\,\mathrm{d}x$.

5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = \sin x$, te pravcima $y = -x$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

Rješenja

1. $P = 6$
   $O = 2\sqrt{5} + \sqrt{17} + 3$

2. $D(f) = [0, \frac{2}{3}]\backslash\{\frac{1}{2}\}$
   $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{6x-9x^2}} + \frac{8x-4}{4x^2-4x+1}$

3. $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle \frac{1}{3}, +\infty\rangle$ raste; na $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ pada
   ekstrem $T_{\min}(\frac{1}{3}, \frac{e^3}{27})$

4. $I = \frac{4-8\sqrt{2}}{9} + \frac{8\sqrt{2}-2}{3}\ln 2 \approx 1.34$

5. $P = 1 + \frac{\pi^2}{8}$

2009-02-09 (B)

1. Nađite opseg trokuta ABC i kut $\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ako su zadani vektori
$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0), \qquad \overrightarrow{AC} = (-3, 2, 2)$$

2. Odredite prirodno područje definicije, inverznu funkciju i derivaciju funkcije u $x = 1$, ako je
$$f(x) = \arcsin[2(x-1)] + \pi$$

3. Odredite domenu, intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$$

4. Metodom supstitucije izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1}$.

5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = \cos x$, te pravcima $y = -2$, $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

Rješenja

1. $O = 2\sqrt{5} + \sqrt{17} + 3$
   $\alpha = 40°36'4.6''$

2. $D(f) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
   $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sin(x-\pi) + 1$
   $f'(1) = 2$

3. $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$
   na $\langle 1, 3\rangle$ i $\langle 3, 9\rangle$ raste; na $\langle -\infty, -3\rangle$, $\langle -3, 1\rangle$ i $\langle 9, +\infty\rangle$ pada
   ekstremi: $T_{\min}(1, \frac{1}{2})$, $T_{\max}(9, \frac{1}{18})$

4. $I = \frac{1}{2}$

5. $P = 2 + 2\pi$

2009-02-16 (A)

1. Dani su podatci za dva vektora: $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$. Odredite duljinu vektora $\vec{m} - \vec{n}$.
2. Odredite prirodno područje definicije zadane funkcije i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x = 0$:
$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{(2x-1)^2}$$
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = (2x-1) \cdot \sqrt{x+1}$$
4. Metodom supstitucije izračunajte integral: $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = \sin x$, te parabolom $y = x^2 - \pi x$.

Rješenja

1. $|\vec{m} - \vec{n}| = \sqrt{10 - 3\sqrt{3}} \approx 2.19$
2. $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\}$
$y = 2x + 1$
3. $D(f) = [-1, +\infty\rangle$
pada na $[-1, -\frac{1}{2}\rangle$, raste na $\langle -\frac{1}{2}, +\infty\rangle$
ekstrem $T_{\min}(-\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$
4. $I = \operatorname{arctg} x^3 + C$
5. $P = 2 + \frac{1}{6}\pi^3 \approx 7.17$

2009-02-16 (B)

1. Dani su podatci za dva vektora: $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$. Odredite duljinu vektora $\vec{m}+\vec{n}$.
2. Odredite prirodno područje definicije i drugu derivaciju zadane funkcije u točki $x = 0$:
$$f(x) = (2x-1) \cdot \sqrt{x+1}$$
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te moguće lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = \frac{4-2x}{4-x^2}$$
4. Metodom supstitucije izračunajte integral $\displaystyle\int \frac{1-3x^2}{\sqrt{1+x-x^3}}\,\mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = \cos x$, te parabolom $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$.

Rješenja

1. $|\vec{m}+\vec{n}| = \sqrt{19}$
2. $D(f) = [-1, +\infty\rangle$
   $f''(0) = \frac{9}{4}$
3. $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$
   funkcija pada na $\langle -\infty, -2\rangle$ i $\langle -2, \infty\rangle$
   funkcija nema ekstrema
4. $I = 2\sqrt{1+x-x^3} + C$
5. $P = 2 + \frac{\pi^3}{6} \approx 7.17$

2009-04-20

1. Zadana su dva vektora u prostoru $\vec{F} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{s} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Odredite kut među njima u stupnjevima, minutama i sekundama i veličinu koja se zove rad $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \ln \dfrac{1-x^2}{x^2}$ i izračunajte $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ s točnošću na dvije decimale.

3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te moguće lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = \frac{4-2x}{4-x^2}.$$

4. Izračunajte integral
$$\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1}.$$

5. Skicirajte međusobni položaj krivulja $y = x^2 - 3x + 1$ i $y = -x^2 - x + 5$, te izračunajte omeđenu površinu s točnošću na dvije decimale.

Rješenja

1. $\varphi = 9^\circ 16' 28''$
   $W = 15$

2. $D(f) = \langle -1, 1\rangle \backslash \{0\}$
   $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -5.33$

3. $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$
   funkcija pada na $\langle -\infty, -2\rangle$ i $\langle -2, \infty\rangle$
   funkcija nema ekstrema

4. $I = 0.5$

5. $P = 9$

2009-06-15 (A)

1. Trokut ABC zadan je pomoću vektora $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{k}$. Odredite njegov opseg i sve kuteve u trokutu.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 11)$ i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x = 4$.
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme funkcije $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x+5}$.
4. Izračunajte $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^2 x}{\operatorname{ctg} x}\,\mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte s točnošću na dvije decimale površinu omeđenenu krivuljama $y = \sin \pi x$ i $y = x^2 - 3x$.

Rješenja

1. $O = \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$
   $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$
2. $D(f) = \langle -\infty, -\sqrt{11} \rangle \cup \langle \sqrt{11}, +\infty \rangle$
   $y = \frac{8}{5}x - \frac{32}{5} + \ln 5$
3. $D(f) = [-5, +\infty\rangle$
   na $[-5, -3\rangle$ pada, na $\langle -3, +\infty \rangle$ raste
   lok. ekstrem: $T_{\min}(-3, -4\sqrt{2})$
4. $I = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$
5. $P = \frac{2}{\pi} + \frac{9}{2} \approx 5.14$

2009-06-15 (B)

1. Trokut ABC zadan je pomoću vektora $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{k}$. Odredite njegov opseg i sve kuteve u trokutu.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$ i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x = -1$.
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 e^{2/x}$.
4. Izračunajte $\displaystyle\int \sin 2x \cos x \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte s točnošću na dvije decimale površinu omeđenu krivuljama $y = \cos x$ i $y = 4x^2 - \pi^2$.

Rješenja

1. $O = \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$
   $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$
2. $D(f) = \langle -\infty, 0] \cup [6, \infty\rangle$
   $y = -\frac{4}{\sqrt{7}} x + \frac{3}{\sqrt{7}}$
3. $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$
   raste na $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle \frac{2}{3}, +\infty\rangle$; pada na $\langle 0, \frac{2}{3}\rangle$
   lok. ekstrem: $T_{\min}(\frac{2}{3}, \frac{8}{27} e^3)$
4. $I = \frac{2}{3} \sin^3 x + C$
5. $P = 2 + \frac{2}{3}\pi^3 \approx 22.67$
   Napomena: gornje je izračunato za $\pi \approx 3.14159$

2009-06-29

1. Izračunajte površinu paralelograma i duljine njegovih dijagonala ako je paralelogram razapet vektorima $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \ln(\cos x)$ i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x = 2\pi$.
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}.$$
4. Izračunajte
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$
5. Skicirajte i izračunajte s točnošću na dvije decimale površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ i pravcem $y = -2x + 2$.

Rješenja

1. $P = \sqrt{14}$
   $d_1 = \sqrt{5}$, $d_2 = \sqrt{13}$
2. $D(f) = \{\langle -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \rangle, k \in \mathbb{Z}\}$
   $y = 0$
3. $D(f) = \langle 0, +\infty \rangle \backslash \{1\}$
   raste na $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle e^2, +\infty \rangle$; pada na $\langle 1, e^2 \rangle$
   $T_{\min}(e^2, \frac{e^2}{4})$
4. $I = \dfrac{(4+\pi)^{3/2} - 8}{12}$
5. $P = 4.5$

2009-07-06

1. Točke $A(1,1,1)$, $B(2,3,1)$ i $C(0,2,1)$ su vrhovi trokuta ABC. Izračunajte površinu trokuta i sve kuteve u njemu.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x-3}$ i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x = 2$.
3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije
$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}.$$
4. Izračunajte $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte s točnošću na dvije decimale površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = \cos 2x$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ i pravcem $y = -\frac{1}{2}$.

Rješenja

1. $P = 2$
$\alpha = 53°7'48''$, $\beta = 36°52'12''$, $\gamma = 90°$
2. $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{-3, 1\}$
$y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$
3. $D(f) = \mathbb{R}$
konkavna na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$; konveksna na $\langle -1, 1\rangle$
točke infleksije: $T(-1, \frac{1}{4})$, $T(1, \frac{1}{4})$
4. $I = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^3}{9} + C$
5. $P = \dfrac{\pi}{4} + 1$

2010-02-01 (A)

1. Trokut ABC je određen s vrhovima $A(1,1,1)$, $B(2,3,1)$, $C(0,2,1)$. Odredite površinu trokuta i duljinu visine spuštene iz vrha C.

2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ i izračunajte $f'(3)$ s točnošću na dvije decimale.

3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije
$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

4. Metodom supstitucije riješite
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2-5}}\,\mathrm{d}x$$

5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = \cos x$, te pravcima $y = \frac{1}{2}$ i $x = \frac{\pi}{4}$.

Rješenja.

1. $P = \frac{3}{2}$
   $v_c = \frac{3}{\sqrt{5}}$

2. $D_f = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty\rangle$
   $f'(3) \approx 0.03$ ($f'(3) = 0.038675\ldots$)

3. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   $I(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$
   na $\langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle$ konkavna; na $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$ konveksna

4. $I = -\frac{3}{20}(\sqrt[3]{-5})^2 \approx 0.4386$

5. $P = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{24}$

2010-02-01 (B)

1. Trokut ABC zadan je pomoću vektora $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{k}$. Odredite opseg trokuta i sve kuteve u njemu.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ i izračunajte $f'(3)$ s točnošću na dvije decimale.
3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije $f(x) = x \ln^2 x$.
4. Metodom supstitucije riješite
$$\int_0^4 \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+18}}\,\mathrm{d}x.$$
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = \sin x$, te pravcima $y = -x$ i $x = \frac{\pi}{4}$.

Rješenja.

1. $O = \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$
$\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$
2. $D_f = \mathbb{R}^+ = \langle 0, +\infty\rangle$
$f'(3) \approx 0.08$ $(f'(3) = 0.086736\ldots)$
3. $D_f = \mathbb{R}^+$
$I(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$
na $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ konkavna; na $\langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$ konveksna
4. $I = \frac{4}{3}(\sqrt{82} - 3\sqrt{2})$
5. $P = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{32}$

2010-02-15 (A)

1. Paralelogram $ABCD$ je određen vrhovima $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $D(0, 2, 1)$. Odredite koordinate vrha C i površinu paralelograma.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = (x + 3)\sqrt{5x^2 - 20}$ i izračunajte $f'(3)$ s točnošću na dvije decimale.
3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije
$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$
4. Riješite parcijalnom integracijom $\int x^3 \ln(2x)\, \mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = x^2 - 7x + 6$ i pravcem $y = -x + 1$.

Rješenja.

1. $C(1, 4, 1)$
   $P = 4$
2. $D_f = \langle -\infty, -2] \cup [2 + \infty\rangle$
   $f'(3) = 23$
3. $D_f = \mathbb{R}$
   $I_1(-1, \ln 2)$, $I_2(1, \ln 2)$
   na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$ konkavna; na $\langle -1, 1\rangle$ konveksna
4. $I = \frac{x^4}{4} \ln 2x - \frac{x^4}{16} + C$
5. $P = \frac{32}{3}$

2010-02-15 (B)

1. Trokut ABC zadan je pomoću vektora $\overrightarrow{AB} = -6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$. Odredite opseg i površinu trokuta.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2+4x}$ i izračunajte $f'(1)$ s točnošću na dvije decimale.
3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije
$$f(x) = e^{1-x^2}$$
4. Riješite parcijalnom integracijom $\int \sqrt{x}\ln(4x)\,\mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = 2x^2 - 1$ i pravcem $y = 1$.

Rješenja.

1. $O = \sqrt{38} + 4\sqrt{2} + \sqrt{14}$
   $P = 6\sqrt{3}$
2. $D_f = \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$
   $f'(1) = 6.26$
3. $D_f = \mathbb{R}$
   konveksna na $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$, $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\rangle$; konkavna na $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$
   točke infleksije: $T(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})$, $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})$
4. $I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln(4x) - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$
5. $P = \frac{8}{3}$

2010-04-12 (A)

1. Paralelogram $ABCD$ je određen vrhovima $A(1,1,1)$, $B(2,3,1)$, $D(0,2,1)$. Odredite koordinate vrha C i površinu paralelograma.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x-3}$ i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x=2$.
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = (x-1)\sqrt{x+5}$$
4. Izračunajte $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^2 x}{\operatorname{ctg} x}\,\mathrm{d}x$.
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = x^2 - 7x + 6$ i pravcem $y = -x + 1$.

Rješenja.

1. $C(1,4,1)$
   $P = 4$
2. $D = \mathbb{R}\backslash\{-3,1\}$
   $y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$
3. $D_f = [-5, +\infty\rangle$
   na $[-5,-3\rangle$ pada; na $\langle -3, +\infty\rangle$ raste
   $T_{\min}(-3, -4\sqrt{2})$
4. $I = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$
5. $P = \frac{32}{3}$

2010-04-12 (B)

1. Trokut ABC zadan je pomoću vektora $\overrightarrow{AB} = -6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$. Odredite opseg i površinu trokuta.
2. Odredite domenu funkcije $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-x-2}$ i tangentu na njen graf u točki s apscisom $x = 1$.
3. Odredite domenu, intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme funkcije
$$f(x) = x^3 e^{\frac{2}{x}}$$
4. Izračunajte $\int \sin 2x \cos x \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$
5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $y = 2x^2 - 1$ i pravcem $y = 1$.

Rješenja.

1. $O = \sqrt{38} + 4\sqrt{2} + \sqrt{14}$
   $P = 6\sqrt{3}$
2. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2\}$
   $y = -2x + 1$
3. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   raste na $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle \frac{2}{3}, +\infty\rangle$; pada na $\langle 0, \frac{2}{3}\rangle$
   ekstrem: $T_{\min}(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}e^3)$
4. $I = \frac{2}{3}\sin^3 x + C$
5. $P = \frac{8}{3}$

2010-06-14 (A)

1. Izračunajte površinu i duljinu visine nad duljom stranicom paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, a kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$ je $\frac{\pi}{3}$.

2. Odredite domenu i prvu derivaciju funkcije $f(x) = \ln(\cos x) - \cos^2(e^x)$.

3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije

$$f(x) = (1 + x^2)e^x$$

4. Riješite parcijalnom integracijom $\int x^2 \ln(2x)\, \mathrm{d}x$.

5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafovima f-ja $f(x) = -x^2 - 3x - 2$ i $g(x) = x^2 + 4x + 3$

Rješenja.

1. $P = 11\sqrt{3}$

2. $D_f = \{\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle \ : k \in \mathbb{Z}\}$
   $f'(x) = e^x \sin(2e^x) - \operatorname{tg} x$

3. $D_f = \mathbb{R}$
   $I_1(-3, \frac{10}{e^3})$, $I_2(-1, \frac{2}{e})$
   konveksna na $\langle -\infty, -3\rangle$ i $\langle -1, +\infty\rangle$, konkavna na $\langle -3, -1\rangle$

4. $I = \frac{x^3}{3} \ln 2x - \frac{x^3}{9} + C$

5. $P = \frac{9}{8}$

2010-06-14 (B)

1. Izračunajte površinu i duljinu visine nad duljom stranicom paralelograma razapetog vektorima $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$ ako je $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, a kut između vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$ je $\frac{\pi}{4}$.

2. Odredite domenu i derivaciju funkcije $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos x}$ u točki s apscisom $x = \frac{\pi}{6}$.

3. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije
$$f(x) = 16x(x-1)^3$$

4. Riješite parcijalnom integracijom $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$.

5. Skicirajte i izračunajte površinu omeđenu grafovima f-ja $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = -x^2 + 3x + 4$.

Rješenja.

1. $P = 5\sqrt{2}$

2. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
   $f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{4+3\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}$

3. $D_f = \mathbb{R}$
   konveksna na $\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle$, $\langle 1, +\infty\rangle$; konkavna na $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$
   točke infleksije: $T(\frac{1}{2}, -1)$, $T(1, 0)$

4. $I = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

5. $P = \frac{343}{24}$