1. Nizovi

Svako preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ naziva se **niz realnih brojeva**.

Ispišemo vrijednosti niza a:

$$a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \dots$$

pa uz oznaku $a_n = a(n)$, $n \in \mathbb{N}$ dolazimo do uobičajenog prikaza niza:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Oznake: $(a_n) =$ niz, $a_n =$ opći ili n-ti član niza.

Primjer

1. $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$
2. $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
3. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \in \mathbb{N}$ (ovaj niz je zadan rekurzivno)

Ispišite prvih nekoliko članova ovih nizova.

Kažemo da je niz (a_n)

- **ograničen odozgo**, ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
- **ograničen odozdo**, ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $a_n \geq m$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
- **ograničen**, ako postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $m \leq a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Primjer

Koji od sljedećih nizova su ograničeni (odozgo/odozdo)?

1. $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$,
2. $a_n = (-2)^n, n \in \mathbb{N}$,
3. $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$.

Kažemo da je niz (a_n)

- **rastući**, ako $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
- **padajući**, ako $a_n \geq a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$;
- **monoton**, ako je rastući ili padajući.

Prema tome, kod rastućeg niza imamo

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots$$

a kod padajućeg

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$$

Primjer

Koji od sljedećih nizova su rastući/padajući/monotoni?

1. $a_n = n, n \in \mathbb{N}$,
2. $a_n = 10 - n, n \in \mathbb{N}$,
3. $a_n = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

Aritmetički niz

Niz realnih brojeva (a_n) je **aritmetički niz** ako vrijedi

$$a_{n+1} - a_n = \text{const}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Broj $d := a_{n+1} - a_n$ nazivamo **razlika** ili **diferencija aritmetičkog niza**.

Na primjer, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, tj. $a_n = n$ je aritmetički niz $(a_1 = 1, d = 1)$.

Opći član aritmetičkog niza

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_3 - a_2 &= d \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= d \\ a_n - a_{n-1} &= d \end{aligned}\right\} +$$

$$---------------------------$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Zašto se ovakvi nizovi nazivaju aritmetičkim?

Aritmetička sredina dva broja x i y računa se kao $\frac{x+y}{2}$.
Ako je (a_n) aritmetički niz tada vrijedi

$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}=\frac{a_1+(n-2)d+a_1+nd}{2}=a_1+(n-1)d=a_n,$$

dakle, svaki član niza (osim prvog) je aritmetička sredina svog neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika.

Napomena

Aritmetički niz je rastući $\Leftrightarrow$ $d \geq 0$.
Aritmetički niz je padajući $\Leftrightarrow$ $d \leq 0$.

Suma prvih n članova niza $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d \\ a_2 + a_{n-1} = 2a_1 + (n-1)d \\ a_3 + a_{n-2} = 2a_1 + (n-1)d \\ \vdots \\ a_{n-1} + a_2 = 2a_1 + (n-1)d \\ a_n + a_1 = 2a_1 + (n-1)d \end{array}\right\} +$$

$$------------------------$$

$$2(a_1 + \ldots + a_n) = n(a_1 + (n-1)d).$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Geometrijski niz

Niz realnih brojeva (a_n) je **geometrijski niz** ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const}, \forall n \in \mathbb{N}$. Broj $q := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nazivamo **kvocijent geometrijskog niza**. (Pritom je $a_1 \neq 0, q \neq 0$.)

Niz $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, tj. $a_n = 2^n$ je geometrijski niz $(a_1 = 1, q = 2)$.

Opći član geometrijskog niza

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = q \\ \vdots \\ \frac{a_3}{a_2} = q \\ \frac{a_2}{a_1} = q \end{array}\right\} \cdot$$

$$\overline{\hspace{8cm}}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Zašto se ovakvi nizovi nazivaju geometrijskim?

Geometrijska sredina dva broja x i y računa se kao $\sqrt{xy}$.
Ako je (a_n) geometrijski niz tada vrijedi

$$\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} = \sqrt{(a_1 q^{n-2})(a_1 q^n)} = a_1 q^{n-1} = a_n,$$

dakle, svaki član niza (osim prvog) je geometrijska sredina svog neposrednog prethodnika i neposrednog sljedbenika.

Napomena

Geometrijski niz je rastući $\Leftrightarrow q \geq 1$.
Geometrijski niz je padajući $\Leftrightarrow q \leq 1$.

Suma prvih n članova geometrijskog niza $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$\left.\begin{array}{rcll} S_n & = & a_1 & +a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} \\ -qS_n & = & & -a_1q - a_1q^2 - \ldots - a_1q^{n-1} - a_1q^n \end{array}\right\} +$$

$$----------------------------------$$

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n$$

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Gomilište niza

Kaže se da je $a \in \mathbb{R}$ **gomilište niza** (a_n) ako u svakoj okolini od a ima beskonačno mnogo članova tog niza.

Primjeri:

1. Niz $(-1)^n, n \in \mathbb{N}$ ima dva gomilišta,
   - 1 je gomilište, jer se u svakoj okolini od 1 nalaze svi članovi $a_{2k}, k \in \mathbb{N}$, dakle, njih beskonačno mnogo;
   - -1 je gomilište, jer su u svakoj okolini od -1 svi članovi $a_{2k-1}, k \in \mathbb{N}$.
2. Niz $a_n = n$ nema nijedno gomilište.
3. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ ima jedno gomilište i to je 0. (Uočimo da se u svakoj okolini od 0 nalaze "skoro svi" članovi niza!)
4. Odredite, ako postoje, gomilišta niza $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Limes niza

Kaže se da je $a \in \mathbb{R}$ **limes niza** (a_n), piše se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Niz je **konvergentan** ako postoji limes niza, u suprotnom je **divergentan**. Još se kaže da niz **konvergira**, odnosno **divergira**.

Primjeri:

1. $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$
2. $a_n = a = const \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$
3. $a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$
4. Niz $a_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ paran;} \\ 1, & n \text{ neparan.} \end{cases}$ nema limes, dakle divergentan je.

Neki važni limesi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \ (p \in \mathbb{R}, p > 0) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \ (a \in \langle -1, 1 \rangle) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Teorem

1. Konvergentan niz ima samo jedan limes.
2. Konvergentan niz je ograničen.
3. Ograničen i monoton niz je konvergentan.
4. Neka su $(a_n), (b_n)$ i (c_n) nizovi takvi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $a_n \leq b_n \leq c_n, n \geq n_0$.
   Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R}$ tada je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
5. Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi. Tada vrijedi
   1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
   2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
   3. $\lim\limits_{n\to\infty}(c a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ za svaki $c \in \mathbb{R}$.
   4. Ako je $b_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, tada $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.
   5. Ako je $a_n > 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, tada $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Primjer

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2+4n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n}} \overset{(4)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{4}{n})} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} \overset{(3)}{=} \frac{3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{3\cdot 0+0^2}{2+4\cdot 0}=0.
\end{aligned}$$

Nizovi s beskonačnim limesima

Limes niza, ako postoji, je realan broj. Neki nizovi neograničeno rastu, kažemo da teže u beskonačnost. Na primjer, niz $a_n = n^2 : 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$.

Niz realnih brojeva (a_n) **konvergira k** ∞ ako

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ t.d.\ a_n \geq M, \forall n \geq n_0.$$

Niz realnih brojeva (a_n) **konvergira k** $-\infty$ ako

$$(\forall m < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ t.d.\ a_n \leq m, \forall n \geq n_0.$$

Pišemo: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, odnosno, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Teorem

Neka su $(a_n), (b_n), (c_n)$ nizovi za koje je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Tada vrijedi

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty \quad (\infty + \infty = \infty)$;
2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm c_n) = \infty \quad (\infty \pm c = \infty)$;
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty \quad (\infty \cdot \infty = \infty)$;
4. $\lim_{n\to\infty} (c_n a_n) = \begin{cases} \infty, & \text{ako } c > 0; \\ -\infty, & \text{ako } c < 0. \end{cases}$
   $(c \cdot \infty = \infty \text{ ako je } c > 0, c \cdot \infty = -\infty \text{ ako je } c < 0)$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0 \quad (\frac{c}{\infty} = 0)$.

Neodređeni izrazi: $\infty - \infty, -\infty + \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, \infty^0, \frac{0}{0}$.

Eksponencijalni rast populacije

Promatramo populaciju bakterija koje se raspolavljaju (od jedne nastaju dvije) svakih 20 minuta. Pretpostavimo da na početku eksperimenta (u $t = 0$) imamo B_0 bakterija. Želimo proučiti kako broj bakterija raste s protokom vremena. Uzmimo da je 1 vremenska jedinica= 20 minuta. Neka je B_n broj bakterija u trenutku $t = n$. Tada je

$$\begin{array}{lcl} t = 0 & \Rightarrow & B_0 \\ t = 1 & \Rightarrow & B_1 = 2B_0 \\ t = 2 & \Rightarrow & B_2 = 2B_1 = 2^2 B_0 \\ t = 3 & \Rightarrow & B_3 = 2B_2 = 2^3 B_0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Općenito, $B_n = 2B_{n-1} = 2^2 B_{n-2} = \ldots = 2^n B_0$.

Ovaj model rasta naziva se **eksponencijalni rast**.

Napomena: Ovaj model nije realističan, jer nijedna populacija ne raste neograničeno. Kako broj jedinki raste, tako među njima raste i kompeticija u potrazi zaa hranom i ostalim potrebnim resursima.

Fibonnaccijev niz

Pretpostavimo da u trenutku $t = 0$ imamo jedan par novorođenih zečeva. Nadalje, neka svaki novorođeni par zečeva ima jedan par potomaka nakon jednog mjeseca, još jedan par nakon još jednog mjeseca, te da nakon toga više nemaju potomaka.

Koliko je novorođenih parova nakon n mjeseci?

Neka F_n označava broj novorođenih parova nakon n mjeseci. Tada je $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1 + 1 = 2$, te općenito

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

(potomke uvijek daju samo parovi koji su rođeni prije 1 mjesec i prije 2 mjeseca).