Materijali za matematiku 2

generated 01.02.2006.

Sadržaj

Matematika 2 **2**

Kolokviji . . . 3

1. kolokvij, 07.04.2005. – A . . . 4

1. kolokvij, 07.04.2005. – B . . . 5

2. kolokvij, 06.05.2005. – A . . . 6

2. kolokvij, 06.05.2005. – B . . . 7

3. kolokvij, 10.06.2005. – A . . . 8

3. kolokvij, 10.06.2005. – B . . . 9

ponovljeni 1. kolokvij, 14.06.2005. – . . . 10

ponovljeni 2. kolokvij, 14.06.2005. – . . . 11

ponovljeni 3. kolokvij, 14.06.2005. – . . . 12

Pismeni ispiti . . . 13

6. srpnja, 2004. . . . 14

7. rujna, 2004. . . . 15

1. veljače, 2005. . . . 16

15. veljače 2005. . . . 17

23. lipanj, 2005. . . . 18

07. srpnja, 2005. . . . 19

25. studenog, 2005. . . . 20

Zadaće . . . 21

prva zadaća - tehnike integriranja . . . 22

druga zadaća - primjena integrala . . . 24

treća zadaća - Taylorovi redovi . . . 26

četvrta zadaća - diferencijalne jednadžbe . . . 27

peta zadaća - funkcije više varijabli . . . 28

šesta zadaća - višestruki integrali . . . 30

MATEMATIKA 2

KOLOKVIJI IZ MATEMATIKE 2

A # MATEMATIKA 2

(1. kolokvij, 07.04.2005.)

1.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\; dx$$

(10 bodova)

2.

$$\int x^2 \ln x \; dx$$

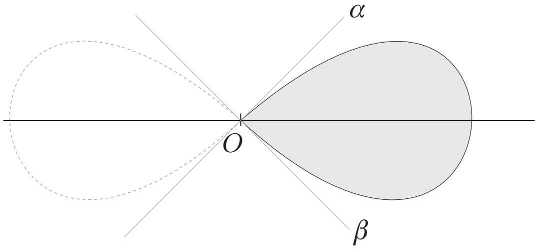
(10 bodova)

3.

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\; dx$$

(10 bodova)

4. Odredite granice integracije $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i izračunajte površinu lika unutar polarnog grafa $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ na slici:

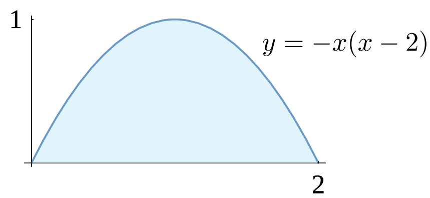


(20 bodova)

5. Dio ravnine koji je označen na slici rotira oko

a) oko osi x

b) oko osi y



Napišite integrale kojima računamo volumen nastala tijela. Primijenite metodu diska ili metodu ljuske. Integrale ne treba izračunati.

(20 bodova)

6. Izrazite pomoću integrala duljinu luka krivulje $y = f(x)$ za $a \le x \le b$.

(10 bodova)

7. Luk krivulje $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$ za $0 \le t \le 3$ rotira oko osi x. Izračunajte površinu nastale plohe.

(20 bodova)

B # MATEMATIKA 2

(1. kolokvij, 07.04.2005.)

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \; dx$$

(10 bodova)

2.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \; dx$$

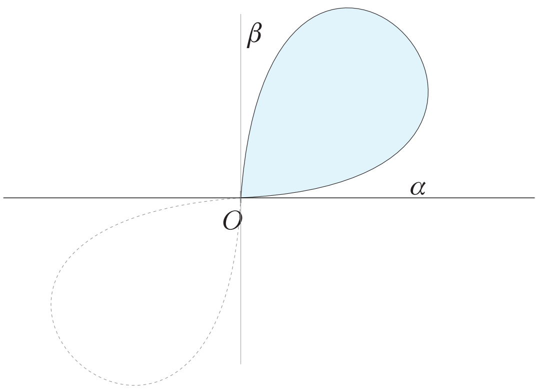
(10 bodova)

3.

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2} \; dx$$

(10 bodova)

4. Odredite granice integracije $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i izračunajte površinu lika unutar polarnog grafa $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$ na slici:

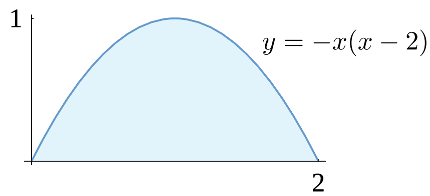


(20 bodova)

5. Dio ravnine koji je označen na slici rotira oko

a) oko osi x

b) oko osi y



Napišite integrale kojima računamo volumen nastala tijela. Primijenite metodu diska ili metodu ljuske. Integrale ne treba izračunati.

(20 bodova)

6. Izračunajte duljinu luka krivulje $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y(t) = t^2 + 2$ za $0 \leq t \leq 3$.

(20 bodova)

7. Luk krivulje $y = f(x)$ za $a \leq x \leq b$ rotira oko osi x. Izrazite pomoću integrala površinu nastale plohe.

(10 bodovi)

A

MATEMATIKA 2

(2. kolokvij, 06.05.2005.)

1. Koristeći Taylorov polinom drugog stupnja približno izračunajte $\cos 0.2$.

(15 bodova)

2. Nađite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n.$$

(10 bodova)

3. Nađite opće rješenja diferencijalne jednadžbe

$$ty' + 2y = 9t.$$

(15 bodova)

4. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja $y^2 = Cx$.

(15 bodova)

5. Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom:

$$y'' + 8y' + 12y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$$

(15 bodova)

6. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4y = \sin 2t.$$

(20 bodova)

7. Iskažite princip superpozicije za linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda.

(10 bodova)

B

MATEMATIKA 2

(2. kolokvij, 06.05.2005.)

1. Koristeći Taylorov polinom drugog stupnja približno izračunajte $e^{-0.1}$.

(15 bodova)

2. Nađite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2} \ .$$

(10 bodova)

3. Nađite opće rješenja diferencijalne jednadžbe

$$y' + \frac{2}{t} y = 9 \ .$$

(15 bodova)

4. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja $y = \frac{C}{x}$.

(15 bodova)

5. Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom:

$$y'' + 7y' + 12y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

(15 bodova)

6. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4y = \cos 2t.$$

(20 bodova)

7. Iskažite princip superpozicije za linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda.

(10 bodova)

A

MATEMATIKA 2

(3. kolokvij, 10.06.2005.)

1. Nađite prve parcijalne derivacije funkcije $z = x \sin y + \sin(x^2 + y)$.

(10 bodova)

2. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine plohe $z = x^2y - x^2$ u točki $T(1, 2)$.

(10 bodova)

3. Zadana je funkcija $z = x^2 + xy + y$. U točki $T(1, 2)$ nađite gradijent funkcije i derivaciju

a) u smjeru vektora $\vec{s} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$,

b) u smjeru od T prema ishodištu.

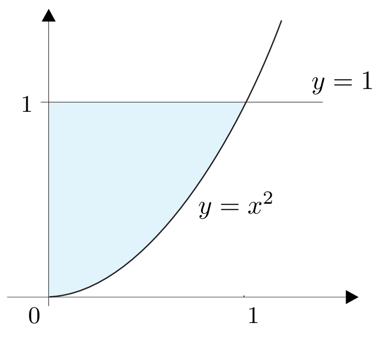
U kojem je smjeru derivacija najveća? Koliki je iznos najveće derivacije?

(25 bodova)

4. Nađite lokalne ekstreme funkcije $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.

(15 bodova)

5. Izračunajte dvostruki integral $\displaystyle\iint_{(S)} y\,dx\,dy$ po području na slici



(15 bodova)

6. Zamijenite redoslijed integracije u integralu

$$\int_0^4 \left(\int_{x^2/2}^{2x} f(x, y) dy \right) dx \ .$$

(15 bodova)

7. Izračunajte masu kvadra $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 1$ kojem je gustoća mase $\rho(x, y, z) = xz$.

(10 bodova)

B **MATEMATIKA 2**

(3. kolokvij, 10.06.2005.)

1. Nađite prve parcijalne derivacije funkcije $z = y \sin x + \sin(x + y^2)$.

(10 bodova)

2. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine plohe $z = xy^2 - y^2$ u točki $T(2, 1)$.

(10 bodova)

3. Zadana je funkcija $z = x + xy + y^2$. U točki $T(1, 2)$ nađite gradijent funkcije i derivaciju

a) u smjeru vektora $\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$,

b) u smjeru od T prema ishodištu.

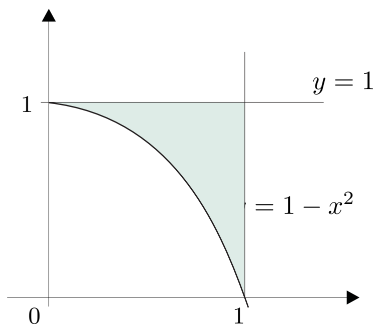
U kojem je smjeru derivacija najveća? Koliki je iznos najveće derivacije?

(25 bodova)

4. Nađite lokalni ekstrem funkcije $z = -3x^2 + 2xy - y^2 + 8y$.

(15 bodova)

5. Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} y\, dx\, dy$ po području na slici



(15 bodova)

6. Zamijenite redoslijed integracije u integralu

$$\int_0^8 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y}} f(x, y) dx \right) dy \ .$$

(15 bodova)

7. Izračunajte masu kvadra $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 1$ kojem je gustoća mase $\rho(x, y, z) = yz$.

(10 bodova)

MATEMATIKA 2

(ponovljeni 1. kolokvij, 14.06.2005.)

1. Izračunajte

a) $\int x \cos x df$

b) $\int_0^1 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

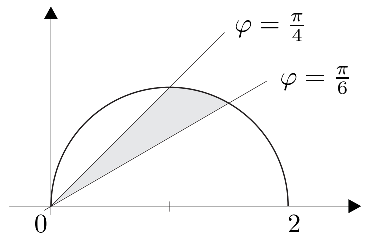
(20 bodova)

2. Izračunajte

$$\int \frac{x+2}{x^2+6x+13}\,dx$$

(20 bodova)

3. Izračunajte površinu lika omeđenog polarnim grafom $r = 2\cos\varphi$ za $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

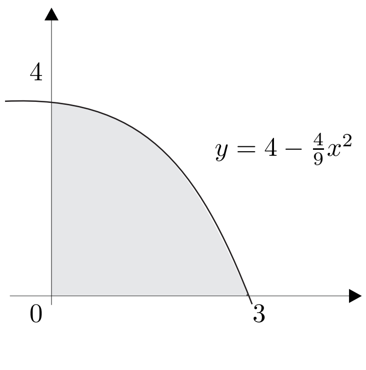


(20 bodova)

4. Izračunajte duljinu luka krivulje $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t + 1$, $y(t) = t^2 - 2$ za $0 \leq t \leq 2$.

(20 bodova)

5. Napišite integrale kojima računamo volumen tijela koje nastaje rotacijom označenog dijela ravnine oko
a) osi x, b) osi y.



Integrale ne treba izračunati.

(20 bodova)

MATEMATIKA 2

(ponovljeni 2. kolokvij, 14.06.2005.)

1. Koristeći Taylorov polinom drugog stupnja približno izračunajte $\ln 1.2$.

(15 bodova)

2. Nađite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n.$$

(15 bodova)

3. Nađite opće rješenja diferencijalne jednadžbe

$$ty' + 2y = 8.$$

(15 bodova)

4. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja $y^2 = Cx^2$.

(20 bodova)

5. Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$$

(15 bodova)

6. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = \cos 2t.$$

(20 bodova)

MATEMATIKA 2

(ponovljeni 3. kolokvij, 14.06.2005.)

1. Nađite prve parcijalne derivacije funkcije $z = xe^{x^2+y^2}$.

(15 bodova)

2. Nađite derivaciju funkcije $z = x^3 - 2x^2y + xy^2$ u točki $M(1,2)$

a) u smjeru vektora $\vec{s} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$,

b) u smjeru od $M(1,2)$ prema točki $N(4,5)$.

(20 bodova)

3. Nađite lokalni ekstrem funkcije $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 2y + 1$.

(15 bodova)

4. Zamijenite redoslijed integriranja u integralu

$$\int_0^2 \left(\int_{1-\frac{x}{2}}^{1+\frac{x^2}{2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(15 bodova)

5. Primjenom dvostrukog integrala izračunajte volumen ispod plohe $z = 2 + x + y$ nad područjem $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ u ravnini xy.

(20 bodova)

6. Izračunajte

$$\int_0^2 \left(\int_0^4 \left(\int_0^1 (x + yz)\,dz \right) dx \right) dy.$$

(15 bodova)

PISMENI ISPITI IZ MATEMATIKE 2

MATEMATIKA 2

(6. srpnja, 2004.)

1. Izračunajte

$$\int 2(x-x^2)e^{-2x}\,dx.$$

2. Izračunajte duljinu luka krivulje $x(t) = t + \sin t \cdot \cos t$, $y(t) = \cos^2 t$ za $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja $xy^2 = a$.

4. Diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

riješite uz uvjet $y(0) = y'(0) = 1$.

5. Nađite ekstrem funkcije $z = 4x - 5x^2 - 2xy - y^2$.

6. Zamijenite redoslijed integracije u integralu

$$\int_1^2 \left(\int_{x^2-2x}^{x-2} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 2

(7. rujna, 2004.)

Studenti koji su Matematiku 2 slušali u školskoj godini 2004/2004 riješavaju zadatke 1.–6.

Svi ostali riješavaju zadatke 3.–8.

1. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom dijela površine omeđene s pravcima $y = x$, $y = -x + 2$ i $y = 0$ oko osi x.

2. Odredite prva tri člana Taylorovog razvoja oko $x = 0$ za funkciju

$$y = (x + 1)\ln(x + 1).$$

3. Nađite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3.$$

4. Nađite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$xy' = y + 1$$

ako je $y(1) = 9$.

5. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 - 13.$$

6. Zamijenite redosljed integracije u integralu

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy.$$

7. Nađite inverznu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Odredite jednadžbu normale na krivulju $y^2 = x^2 + 1$ u točki $(1, 2)$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 2

(1. veljače, 2005.)

1. Izračunajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \frac{\pi}{2}) \sin 2x \, dx.$$

2. Diferencijalnu jednadžbu $2xy' - y + 1 = 0$ riješite uz uvjet $y(1) = 2$.

3. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4y = e^{-2x} \; .$$

4. Nađite ekstrem funkcije

$$z = 2x^2 + y^2 + 2x(y + 1) \; .$$

5. U integralu

$$\iint_P f(x, y) \, dx \, dy$$

odredite granice integracije ako je područje P manji dio kruga $(y - 1)^2 + x^2 \leq 1$ omeđen s pravcem $y = x$.

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 2

(15. veljače 2005.)

1. Izračunajte
$$\int (2-x)e^{-x}dx.$$

2. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog prvim lukom cikloide $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi)$ i osi x.

3. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja
$$x^2 + 3y^2 = a^2.$$

4. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y'' - 2y' + 2y = e^x.$$

5. Nađite ekstrem funkcije
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x.$$

6. U integralu
$$\iint_P f(x,y)dxdy$$
odredite granice integracije ako je područje P manji dio kruga $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$ omeđen pravcem $x + y = 1$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 2

(23. lipanj, 2005.)

1. Izračunajte

$$\int_{\sqrt{2-\ln 2}}^{\sqrt{2}} \left(2x + 2xe^{2-x^2}\right) dx.$$

(15 bodova)

2. Izračunajte duljinu luka krivulje $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y(t) = 2 - t^2$ za $0 \le t \le 3$.

(15 bodova)

3. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja

$$x(C + y) = 1.$$

(20 bodova)

4. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 4y' + 4y = e^x.$$

(20 bodova)

5. Nađite lokalne ekstreme funkcije $z = 22 - 4\,x + x^2 - 12\,y + 2\,y^2$.

(15 bodova)

6. Zamijenite redoslijed integracije u integralu

$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy\ .$$

(15 bodova)

Rezultati ispita: *sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 2

(07. srpnja, 2005.)

1. Izračunajte

a) $\int_{-2}^{-1} 3\left(1-\frac{x}{2}\right)^6\,dx$

(10 bodova)

b) $\frac{\partial f}{\partial z}(-1,-1,1)$ za $f(x,y,z)=\sin(x+z^2)\cdot e^{y+z}$

(10 bodova)

c) $\int_0^1\left(\int_{-1}^0 (x^2+2y)\,dy\right)dx$

(10 bodova)

2. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja

$$x(C+y)=1.$$

(20 bodova)

3. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y''+8y=0.$$

(15 bodova)

4. Korištenjem totalnog diferencijala funkcije $z=\sqrt{x^2+y^2}$ približno izračunajte

$$\sqrt{(6,95)^2+(7,01)^2}$$

(20 bodova)

5. Zamijenite redoslijed integracije u integralu

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy\ .$$

(20 bodova)

Rezultati ispita: *sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 2

(25. studenog, 2005.)

1. Izračunajte
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x + \frac{\pi}{2}) \cos 2x \, dx.$$

2. Diferencijalnu jednadžbu $2xy' - y + 1 = 0$ riješite uz uvjet $y(1) = 2$.

3. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y'' - 4y = e^{-2x} \ .$$

4. Odredite ekstrem funkcije
$$f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 2x(y + 1) \ .$$

5. U integralu
$$\iint_P f(x, y) \, dx \, dy$$
područje integracije P je je područje koje zatvaraju kružnica $y^2 + x^2 = 2$ i parabola $y = x^2$. Postavite integral.

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

ZADAĆE IZ MATEMATIKE 2

MATEMATIKA 2

(prva zadaća - tehnike integriranja)

Integrali

Izračunajte integrale:

1.

a) $\displaystyle\int \frac{10}{3x+2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{7}{2x-3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{2x-3}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-1}{3x+2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{2}{(2x+1)^3}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(5x-1)^4}{2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+1\right)^6 dx$ h) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} e\left(1-\frac{x}{2}\right)^6 dx$ i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x}}$ k) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ l) $\displaystyle\int_3^8 \frac{x}{x+1}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{5}{1+9x^2}\,dx$ n) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3}{1+4x^2}\,dx$ o) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+x^2}$

p) $\displaystyle\int_1^6 \frac{x^2}{10+x^2}\,dx$ q) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$ r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,dx$

2.

a) $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+2}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{2x^2+1}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-3x^5}{2x-x^6}dx$ e) $\displaystyle\int 2xe^{-x^2+2}dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2+3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ h) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ i) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

j) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ k) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$

3.

a) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ f) $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4-5x-x^2}}$

4.

a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ f) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

5.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$

6.

a) $\int_0^1 \sqrt{2+x^2}\,dx$ b) $\int_{-3}^{-2} \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$ c) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2+x}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ e) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Izračunajte površine koje omeđuju zadane krivulje sa x-osi:

a) $y = \operatorname{tg} x,\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = -\frac{\pi}{6}$ b) $y = \operatorname{ctg} x,\ x = -\frac{\pi}{3},\ x = -\frac{\pi}{6}$

c) $y = \frac{1}{3-x^2},\ x = -1,\ x = 1$ d) $y = \frac{1}{1-4x^2},\ x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{2}{4+x^2}$ f) $y = \frac{1}{1+3x^2},\ x = 0,\ x = 3$

Parcijalna integracija

8. Koristeći metode parcijalne integracije i supstitucije izračunajte:

a) $\int (2x)^2 e^x\,dx$ b) $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$ c) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

d) $\int_{-1}^{0} x^5 e^{x^3}\,dx$ e) $\int x \sin 2x\,dx$ f) $\int_0^{\pi} x \cos 2x\,dx$

g) $\int 2^x \cos 2x\,dx$ h) $\int_0^{\pi} 3^x \cos 3x\,dx$ i) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

j) $\int_1^e \frac{\ln \ln x}{x}\,dx$

MATEMATIKA 2

(druga zadaća - primjena integrala)

Računanje površina

1. Izračunajte površinu (ploštinu) lika omeđenog krivuljama

a) $y = \cos^4 x$, $y = 0$, pri čemu je $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

b) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 12(x-1)$, desno od druge krivulje.

2. Izračunajte površinu lika omeđenog elipsom $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (uputa: koristite parametarske jednadžbe elipse).

3. Izračunajte površinu lika omeđenog astroidom $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$.

4. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = 2x$ za $y \geq 0$ (uputa: primijenite polarne koordinate).

5. Primjenom polarnih koordinata izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2+y^2 = 4x$, $y = x$, $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Računanje volumena

6. Izračunajte volumen tijela (s poznatim poprečnim presjekom), što ga od kružnog valjka polumjera 2 i proizvoljne (dovoljno velike) visine odsijeca ravnina koja prolazi promjerom baze valjka, a nagnuta je prema bazi za kut $\frac{\pi}{6}$.

7. Izračunajte volumen tijela čija je baza u ravnini xy omeđena krivuljama $y = x^2$, $y = x + 2$, a čiji su presjeci s ravninama okomitim na os x (tj. ravninama koje su paralelne s ravninom yz) kvadrati.

8. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$ oko

a) osi x,

b) osi y.

Računajte volumene na dva načina: metodom diska i metodom ljuske.

9. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = 2x^2$, $y = 3-x$, $x = 0$ $(x \geq 0)$ oko osi y koristeći se

a) metodom diska,

b) metodom ljuske.

10. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama

a) $y = e^{\frac{-x^2}{2}}$, $y = 0$, oko osi y.

b) $y = e^{2x}$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \leq 0)$, oko osi x.

Računanje duljine luka krivulje pomoću integrala

11. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln \sin x$ od $x = \frac{\pi}{3}$ do $x = \frac{\pi}{2}$.

12. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ od $x = 1$ do $x = e$.

13. Izračunajte duljinu astroide $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

14. Izračunajte duljinu luka krivulje $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ od $t = 0$ do $t = 3$.

15. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = 1 + \cos\varphi$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$, ako su r i φ polarne koordinate.

16. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ako su r i φ polarne koordinate.

Računanje oplošja rotacione plohe

17. Izračunajte površinu plohe koja nastaje rotacijom luka krivulje $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ oko osi x u intervalu $0 \leq x \leq 1$.

18. Izračunajte oplošje tijela koje nastaje rotacijom svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ oko osi x, u intervalu $0 \leq t \leq 2\pi$.

MATEMATIKA 2

(treća zadaća - Taylorovi redovi)

Razvoj funkcije u Taylorov red

1. Primjenom Taylorove formule razvijte po potencijama binoma $x+1$ funkcije

a) $f(x) = x^3 - 1$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$

2. Napišite prva četiri člana (koja nisu identički jednaka nuli) razvoja u Taylorov red sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 2^x$ oko $x_0 = 0$

b) $f(x) = \ln x$ oko $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sin x$ oko $x_0 = \frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \cos 2x$ oko $x_0 = 0$

Aproksimacija funkcije Taylorovim redom

3. Napišite prva tri člana razvoja funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ po potencijama binoma $x - 4$. Pomoću dobivene aproksimacije približno izračunajte

a) $\sqrt{4.2}$

b) $\sqrt{3.9}$

Ocijenite grešku.

4. Aproksimirajte odgovarajuću funkciju (u okolini odgovarajuće točke) Taylorovim polinomom drugog stupnja i približno izračunajte

a) $\dfrac{1}{1.05}$

b) $\sqrt{17}$

c) $\sqrt[3]{7.9}$

d) $\cos 0.2$

e) $e^{0.1}$

f) $\ln 1.2$

5. Koristeći se poznatim razvojem funkcija $f(x) = e^x$ i $f(x) = \sin x$ po potencijama od x napišite razvoj po x za funkcije

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = x \cdot \sin 2x$

6. Primjenom formule za sumu geometrijskog reda razvijte funkcije

a) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ u red potencija od x,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ u red potencija od $x - 1$.

Odredite radijus konvergencije.

Radijus konvergencije reda

7. Odredite intervale konvergencije redova (bez ispitivanja ponašanja reda na rubovima)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^n \cdot x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot (x+1)^n$

MATEMATIKA 2

(četvrta zadaća - diferencijalne jednadžbe)

Diferencijalne jednadžbe

1. Nađite opća rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$

b) $y' = \dfrac{3y-1}{x}$

c) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{\cos^2 x}$

d) $y' - y\cos x = a\sin 2x$

e) $\dfrac{dx}{dt} = e^x \sin t$

2. Nađite partikularna rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi uz dane uvjete:

a) $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}, \ \ y(1) = 4$

b) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{a}{\cos x}, \ \ y(0) = 0$

c) $y' = \dfrac{y^2-1}{y}, \ \ y(1) = 2$

d) $y' + 2e^x y = e^x, \ \ y(1) = 1$

Linearna diferencijalna jednadžba drugog stupnja s konstantnim koeficijentima

3. Nađite opća rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $y'' + 3y = 0$

c) $y'' - 8y' + 7y = 14$

d) $y'' + 4y = 8x^2$

e) $y'' - y = e^x$

f) $y'' + y' - 2y = \sin 2x$

g) $y'' + 4y' = 8x$

h) $y'' + 2y' + 2y = 0$

4. Nađite partikularna rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi uz dane uvjete:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0, \ \ y(0) = 6, \ \ y'(0) = 10$

b) $y'' + y = 2\pi x, \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = \pi$

c) $y'' + 3y' + 2y = e^x, \ \ y(-1) = e^2, \ \ y(-2) = e^4$

5. Odredite oblik partikularnog rješenja u sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

a) $y'' - 3y' + 2y = e^x \cos 2x$

b) $y'' + 2y' + y = x^3 e^{2x}$

6. Napišite homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima kojima su opća rješenja:

a) $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$

b) $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

c) $y = C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)$

d) $y = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$

7. Nađite jednadžbu krivulje u xy-ravnini koja prolazi točkom $(2,3)$ i ima u svakoj svojoj točki (x,y) nagib tangente jednak $\frac{2x}{1+y^2}$.

8. Nađite jednadžbu krivulje u xy-ravnini koja prolazi točkom $(1,3)$ i ima u svakoj svojoj točki (x,y) nagib tangente jednak $\frac{2y}{x+1}$.

Ortogonalne trajektorije

9. Nađite ortogonalne trajektorije zadanih familija krivulja

a) $y = ax^2$

b) $y = x + C$

c) $y = e^{-x} + C$

MATEMATIKA 2

(peta zadaća - funkcije više varijabli)

1. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za sljedeće funkcije:
a)$z = 4x^2 - 2y + 7x^4y^5$,

b)$z = \frac{x+y}{x-y}$.

2. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ za sljedeće funkcije:
a) $z = e^x \cos y$,

b) $z = 4x^2 - 8xy^4 + 7x^5 - 3$.

3. Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine na zadanu plohu $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$
a) $z = 4x^3y^2 + 2y$ u $T(1, -2)$,

b) $z = xe^{-y}$ u $T(1, 0)$.

4. Izračunajte totalni diferencijal funkcije $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$ za zadani pomak Δx i Δy:
a) $z = x^2 + 2xy - 4x$ u $T(1, 2)$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.04$,

b) $z = \frac{x+y}{xy}$ u $T(-1, -2)$, $\Delta x = -0.02$, $\Delta y = -0.04$.

5. Izračunajte približno $\sqrt{(3,95)^2 + (3,01)^2}$, znajući da je $\Delta z \approx dz$.

6. Nađite gradijent funkcije $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$
a) $z = (x^2 + xy)^2$ u $T(-1, -1)$,

b) $z = y \ln(x + y)$ u $T(-3, 4)$.

7. Nađite usmjerenu derivaciju funkcije $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$ i zadanom smjeru $\vec{s}$:
a) $z = 4x^3y^2$ u $T(2, 1)$, $\vec{s} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$,

b) $z = y^2 \ln x$ u $T(1, 4)$, $\vec{s} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$.

8. Zadana je funkcija $z = x + xy + y^2$. U točki $T(1, 2)$ nađite gradijent funkcije i derivaciju

a) u smjeru vektora $\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$,

b) u smjeru od T prema ishodištu.

U kojem je smjeru derivacija najveća? Koliki je iznos najveće derivacije?

9. Nađite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:
a) $z = 3x^2 + 2xy + y^2$,

b) $z = x^3 - 3xy - y^3$.

10. Nađite globalne ekstreme sljedećih funkcija na navedenim područjima:

a) $z = xy - x - 3y$ na trokutu s vrhovima $A(0,0)$, $B(0,4)$, $C(5,0)$,

b) $z = x^2 + 2y^2 - x$ na krugu $x^2 + y^2 \leq 4$.

11. Među svim paralelogramima kojima je opseg $s = 4$ odredite onaj koji ima maksimalnu površinu. Uputa: površina paralelograma sa stranicama a i b koje tvore kut α iznosi $P = ab \sin \alpha$.

12. Ispitivanjem globalnog ekstrema nađite udaljenost točke $T(-1,3,2)$ od ravnine $x - 2y + z = 4$.

* * *

MATEMATIKA 2

(šesta zadaća - višestruki integrali)

1. Izračunajte:

a) $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_0^2 (2x-4y)\,dy\right)dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \left(\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\right)dx,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} (x^2-y)\,dy\right)dx.$

2. Zamijenite redosljed integriranja:

a) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right)dx,$ b) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_1^{e^y} f(x,y)\,dx\right)dy,$

c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy.$

3. Izračunajte zadani integral po zadanom području P:

a) $\displaystyle\iint_P x\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$, P kvadrat s vrhovima $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$,

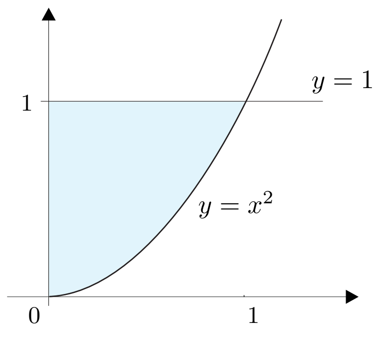
b) $\displaystyle\iint_P \cos(x+y)\,dx\,dy$, za $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{3}$,

c) $\displaystyle\iint_P 6xy\,dx\,dy$, P omeđeno s $y=x$, $y=0$, $x=\pi$,

d) $\displaystyle\iint_P (x-1)\,dx\,dy$, P omeđeno s $y=x$, $y=x^3$,

e) $\displaystyle\iint_P xy\,dx\,dy$, P omeđeno s $y=\sqrt{2x}$, $y=0$ i pravcem koji prolazi točkama $(0,4)$ i $(4,0)$.

4. Izračunajte dvostruki integral $\displaystyle\iint_{(S)} y\,dx\,dy$ po području na slici



Računanje volumena pomoću dvostrukog integrala

5. Izračunajte:

a) volumen ispod ravnine $z=2x+y$ nad područjem $3 \le x \le 5$, $1 \le y \le 2$,

b) volumen ispod ravnine $z=5-2x-y$ u 1. kvadrantu,

c) volumen omeđen s $x^2+y^2=9$, $z=0$ i $z=3-x$,

d) volumen omeđen s $z=x^2+3y^2$, $z=0$, $y=x^2$ i $y=x$.

Računanje površina pomoću dvostrukog integrala

6. Izračunajte upotrebom dvostrukog integrala površinu omeđenu s:

a) $x + y = 5$, $x = 0$, $y = 0$,

b) $y = \sin x$, $y = \cos x$ za $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

7. Izračunajte:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{2} \left(\int_{0}^{1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx \right) dy \right) dz,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(\int_{-1}^{y^2} \left(\int_{1}^{z} (yz)\, dx \right) dz \right) dy,$

c) $\displaystyle\int_{1}^{3} \left(\int_{x}^{x^2} \left(\int_{0}^{\ln z} (xe^y)\, dy \right) dz \right) dx.$

8. Zamijenite redoslijed integriranja, tj. izrazite integral ekvivalentnim integralom u kojem je izvršena integracija najprije po z-u, pa po y-u i na kraju po x-u:

a) $\displaystyle\int_{0}^{3} \left(\int_{0}^{\sqrt{9-z^2}} \left(\int_{0}^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x,y,z)\, dx \right) dy \right) dz,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(\int_{0}^{2} \left(\int_{0}^{x/2} f(x,y,z)\, dy \right) dz \right) dx.$