STATISTIKA: PITANJA I ODGOVORI

A1. Statistički skup. Obilježja elemenata statističkoga skupa.

Statistički skup predstavlja skup elemenata kojima proučavamo jedno ili više obilježja čije se vrijednosti mijenjaju od elementa do elementa.

S obzirom na broj elemenata statistički skupovi mogu biti konačni ili beskonačni.

Osnovni skup ili populacija predstavlja skup iz kojega se može izvući podskup ili uzorak.

Postupak dijeljenja osnovnog skupa na disjunktne podskupove naziva se stratifikacija.

Statistički skup se definira:

a.) POJMOVNO

Pojmovno definirati statistički skup znači odrediti točno koja obilježja moraju imati elementi da bi bili uvršteni u statistički skup.

b.) PROSTORNO

Prostorna definicija određuje prostor na koji se odnose, odnosno pripadaju elementi statističkoga skupa.

c.) VREMENSKI

Vremenska definicija se odnosi na razdoblje ili trenutaka kojim će se vremenski obuhvatiti jedinice koje ulaze u statistički skup.

S obzirom na vremensku definiciju razlikujemo statističke skupove koji se definiraju u odnosu na određeni trenutak, te statističke skupove koji se definiraju u odnosu na interval vremena.

*Obilježja jedinica statističkoga skupa*:

Statistička obilježja su opće karakteristike elemenata statističkoga skupa, po kojima su elementi jedni drugima slični ili po kojima se međusobno razlikuju.

Svako obilježje javlja se u više pojavnih oblika (modaliteta), uz koje se vežu frekvencije (apsolutne ili relativne) kao numerički izraz intenziteta pojavnosti pojedinog modaliteta u promatranome statističkome skupu. Zbroj tih frekvencija jednak je opsegu statističkoga skupa.

Glavna podjela obilježja je na kvalitativna i kvantitativna.

Kvalitativna obilježja su : nominalna i redoslijedna (obilježja ranga ili ordinalna obilježja). Nominalna obilježja dodatno se dijele na atributivna i geografska (prostorna) obilježja. Redoslijedno obilježje predstavlja takvu vrstu obilježja koje fluktuira prema intenzitetu ili rangu.

*Primjeri za nominalna obilježja su*: spol, bračno stanje, sreća, vrsta poduzeća, religioznost, vrsta glazbe, pušenje, uživanje droge

*Primjeri za redoslijedna obilježja su*: ocjena na ispitu, bodovi na testu, kvocijent inteligencije, stručna sprema, intenzitet boli

Kvantitativno (numeričko) obilježje izraženo je brojem koji kao svoj početak ima nulu te ako odnos bilo koja dva broja ne ovisi o jedinici mjere, te ako je taj odnos sačuvan kad se brojevi pomnože bilo kojim pozitivnim brojem.

Kvantitativno obilježje može se još izraziti i kao intervalno koje je različito od omjernoga u tome što omjeri veličina nemaju isto značenje. Primjeri su: temperatura zraka, krvni tlak i sl. To znači da ako je temperatura zraka u gradu A 20 stupnjeva, a u gradu B 10 stupnjeva, to ne znači da je u gradu A dvostruko toplije.

Numeričko obilježje može biti diskontinuirano (diskretno) koje može poprimiti prebrojivo beskonačno mnogo modaliteta ili kontinuirano koje može poprimiti neprebrojivo beskonačno mnogo modaliteta.

*Primjeri diskontinuiranog obilježja su*: broj djece, broj kvarova na stroju, broj studenata u grupi, broj radnika i sl.

*Primjeri kontinuiranog obilježja su*: visina, težina, starost, tlak, količina padalina, plaća i sl.

A2. Grafičko prikazivanje nominalnih i numeričkih nizova.

Grafičkim prikazivanjem postiže se zorniji pregled opsega i strukture statističkih nizova, te vizualna usporedba frekvencija unutar jednoga ili više statističkih nizova.

Grafikon mora biti jednostavan, jasan i pregledan.

Grafički prikazi dijele se u 3 grupe:

a.) POVRŠINSKI GRAFIKONI

b.) KARTOGRAMI

c.) LINIJSKI GRAFIKONI

Površinski grafikon je grafički prikaz kojim statističke podatke prikazujemo površinama geometrijskih likova. Površine tih likova moraju biti upravno razmjerne frekvencijama koje se tim površinama prikazuju.

Površinski grafikoni su: jednostavni stupci, dvostruki stupci, razdijeljeni stupci, proporcionalni strukturni krugovi ili polukrugovi, kvadrati i histogrami

Kartogrami se dijele na: dijagramske karte, piktograme i statističke karte

Linijski grafikon se naziva još i poligon frekvencija, a statistički niz se tada prikazuje linijama.

A3. Relativni brojevi

Statistička analiza može se vršiti na osnovu apsolutnih i na osnovu relativnih brojeva.

Apsolutnim brojevima ne može se uvijek zadovoljiti svrha statističke analize jer veći apsolutni broj ne mora uvijek značiti i veću relativnu važnost nekog pokazatelja ili frekvencije statističkog niza.

Upotrebom relativnih brojeva mogu se analizirati i uspoređivati pojave koje imaju različite jedinice mjere ili različiti broj elemenata budući da je relativni broj neimenovan broj, te se može dobiti relativna važnost nekoga pokazatelja ili frekvencije statističkog niza.

Relativni brojevi su:

a.) RELATIVNI BROJEVI STRUKTURE (PROPORCIJE)

b.) RELATIVNI BROJEVI KOORDINACIJE

c.) INDEKSI

Relativni brojevi strukture pokazuju odnos dijela prema cjelini. Mogu se još izražavati u postocima i promilima.

P = ᵒ 100 ili P = ᵒ 1000

Relativne frekvencije prikazuju odnos apsolutnih frekvencija prema ukupnome broju elemenata u statističkome skupu. Zbroj svih relativnih brojeva u statističkom nizu jednak je 1, odnosno 100, odnosno 100, ovisi o tome kako je relativni broj izražen.

Relativni brojevi strukture mogu se grafički prikazati pomoću strukturnih stupova, strukturnih krugova, polukrugova u sl.

Kod grafičkog prikazivanja baza stupca je uvijek ista jer je zbroj svih relativnih frekvencija uvijek isti. Ukoliko se relativni brojevi strukture prikazuju strukturnim krugovima ili polukrugovima, tada je površina kruga ili polukruga također ista.

Relativni brojevi koordinacije pokazuju odnos dviju pojava ili odgovarajućih frekvencija u različitim statističkim nizovima koji mogu biti potpuno nezavisni jedan od drugoga. Te pojave ili frekvencije mogu imati istu ili različitu jedinicu mjere.

 =

 – veličina koja se uspoređuje;

 – veličina s kojom se uspoređuje

Relativni brojevi koordinacije se grafički prikazuju tzv. Varzarovim znakom. Kod te vrste površinskih grafikona stupci imaju različitu širinu i visinu. Za bazu stupca se uzima nazivnik relativnog broja koordinacije () , dok visinu stupca predstavlja sam relativni broj koordinacije (). Površina stupca je jednaka umnošku baze i visine, pa prema tomu predstavlja brojnik relativnog broja koordinacije ().

Indeksnim brojevima uspoređujemo smjer i intenzitet varijacija frekvencija nekog statističkog niza s takvim varijacijama drugog statističkog niza.

Za bazu indeksa može se odabrati jedan od članova statističkoga niza, te se računaju relativni brojevi stavljajući u odnos svaki član niza prema odabranoj bazi.

Indeksi se prikazuju grafički preko stupaca koji imaju istu bazu, budući da se svi članovi niza uspoređuju uvijek s obzirom na istu veličinu.

A4. Srednje vrijednosti numeričkih i redoslijednih nizova.

Srednja vrijednost je konstanta koja ima za cilj na reprezentativan način predstaviti niz varijabilnih podataka numeričkog niza.

To je centralna vrijednost oko koje se gomilaju podaci numeričkog niza zbog čega se još zove i *mjerom centralne tendencije*.

Vrste srednjih vrijednosti su:

1. ARITMETIČKA SREDINA

2. GEOMETRIJSKA SREDINA

3. HARMONIJSKA SREDINA

4. MEDIJAN

5. MOD

Aritmetička , harmonijska i geometrijska sredina spadaju u tzv. izračunate vrijednosti, dok medijan i mod spadaju u tzv. položajne srednje vrijednosti.

Aritmetička sredina predstavlja jednaki dio vrijednosti numeričkog obilježja koji otpada na jedan element skupa. Također može se definirati kao omjer zbroja brojeva i broja brojeve. Aritmetička sredina računa se iz vrijednosti obilježja svih elemenata statističkoga skupa.

Aritmetička sredina računa se kao omjer zbroja pojedinačnih vrijednosti obilježja svih elemenata statističkoga skupa i broja elemenata statističkoga skupa.



Ako su elementi statističkog niza grupirani u frekvencije onda se upotrebljava izraz za tzv. vaganu (ponderiranu) aritmetičku sredinu.



Svojstva aritmetičke sredine:

1.) vrijednost aritmetičke sredine nalazi se između najveće i najmanje vrijednosti obilježja:

2.) zbroj odstupanja vrijednosti obilježja pojedinih elemenata statističkoga skupa od njihove aritmetičke sredine jednak je nuli:



3.) zbroj kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja pojedinih elemenata statističkog skupa ima minimalnu vrijednost. To znači da je zbroj kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja elemenata statističkog skupa od bilo koje druge vrijednosti veći od zbroja kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine.



Aritmetička sredina je najviše upotrebljavana srednja vrijednost.

Harmonijska sredina predstavlja recipročnu vrijednost aritmetičke sredine recipročnih vrijednosti iz kojih se ona izračunava.

Formula za vaganu harmonijsku sredinu glasi:



Ponderi mogu biti i relativni kao i kod računanja aritmetičke sredine.

Geometrijska sredina definira se ovako za negrupirane nizove:



Geometrijska sredina u ekonomskim primjenama ima najbolju primjenu kao srednja stopa promjene vremenskih nizova, ukoliko je ta stopa približno konstantna. Kod numeričkih nizova ona nema logičnu interpretaciju.

Geometrijska sredina lakše se izračunava ovako:



Formula za vaganu geometrijsku sredinu :

Napomena: kod izračunavanja geometrijske sredine nijedna vrijednost varijable (obilježja) X ne smije biti jednaka nuli.

Medijan je ona srednja vrijednost koja statistički niz dijeli na dva jednaka dijela. Kod negrupiranog niza medijan je vrijednost obilježja koja pripada članu statističkog niza koji se nalazi u sredini niza. Ukoliko je broj članova niza paran, onda se uzima aritmetička sredina vrijednosti obilježja dvaju članova koji se nalaze u sredini statističkog niza.

Kod grupiranog statističkog niza najprije treba izračunati frekvencije kumulativnog niza „manje od“ ili „više od“ , te u tako formiranome nizu pronaći srednji član.

Medijan se računa za numeričke i redoslijedne nizove.

Medijalni razred je onaj razred u nizu u kojem je sadržana polovina zbroja svih članova u nizu tj. pripada mu prva frekvencija u kumulativnome nizu koja je veća od polovine suma svih frekvencija.

Medijan ima važno svojstvo da je zbroj apsolutnih vrijednosti odstupanja pojedinih vrijednosti obilježja jedinica statističkog skupa od medijana jednak minimumu.

Medijan je kao srednja vrijednost bolji reprezentant centralne tendencije od aritmetičke sredine jer ne reagira na ekstremne vrijednosti, što je poglavito važno ako imamo mali broj podataka.

Mod je ona vrijednost obilježja koja se najčešće pojavljuje. Mod ima smisla računati samo kod tzv. „unimodalnih“ distribucija. Kod bimodalne distribucije (koja ima 2 vrha) postoji glavni mod i lokalni mod. U takvoj situaciji mod je manje reprezentativan kao srednja vrijednost, naročito ako je uz vrijednost moda vezan mali broj opservacija.

Mod ima logičnu interpretaciju kod diskontinuiranih numeričkih nizova, kod redoslijednih nizova te nominalnih nizova.

Kod kontinuiranog numeričkog niza mod se također može odrediti, ali zbog prirode samog niza njegova interpretacija nije jasna i logična.

Kod kontinuiranih numeričkih nizova mod predstavlja vrijednost u kojoj funkcija doseže svoj maksimum.

Vrijednost moda nalazi se u razredu kojem pripada najveća korigirana frekvencija.

A5. Apsolutne mjere disperzije.

Pod pojmom disperzije podrazumijevamo raspršenost vrijednosti numeričkog obilježja. Mjere disperzije služe za ocjenjivanje reprezentativnosti srednje vrijednosti obilježja.

Apsolutne mjere disperzije:

1.) RASPON VARIJACIJE OBILJEŽJA

2.) PROSJEČNO APSOLUTNO ODSTUPANJE

3.)VARIJANCA U STANDARSNA DEVIJACIJA

4.) INTERKVARTIL

Raspon varijacije obilježja je razlika između najveće i najmanje vrijednosti numeričkog obilježja. Ta mjera predstavlja grubu mjeru disperzije obilježja.

R = -

Npr. ako je maksimalna težina 110 kg, a minimalna težina 50 kg, onda je raspon varijacije obilježja 60 kg.

Prosječno apsolutno odstupanje dobiva se kao aritmetička sredina apsolutnih vrijednosti odstupanja od aritmetičke sredine vrijednosti obilježja.



Varijanca je srednje kvadratno odstupanje numeričkih vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine.

Standardna devijacija je pozitivan korijen iz varijance i predstavlja apsolutnu mjeru disperzije u prvome stupnju.

Varijanca za negrupirane podatke računa se:



Varijanca za grupirane nizove računa se:



Interkvartil predstavlja raspon vrijednosti obilježja srednjih 50% jedinica u distribuciji, odnosno razliku između gornjeg i donjeg kvartila:

Izbjegava ekstremne vrijednosti obilježja i isključuje 25% najmanjih i 25% najvećih vrijednosti.

U gornjoj formuli Q3 predstavlja gornji kvartil koji distribuciju dijeli u omjeru 3:1, tj. 75% jedinica u statističkome skupu ima vrijednost jednaku ili manju od gornjega kvartila, dok 25% jedinica u statističkome skupu ima vrijednost obilježja jednaku ili veću od gornjega kvartila.

Donji kvartil Q1 dijeli distribuciju u omjeru 1:3. To znači da 25% jedinica u statističkom skupu ima vrijednost obilježja veću ili jednaku donjem kvartilu, dok 75% ima vrijednost obilježja veću ili jednaku donjem kvartilu.

Npr. ako je donji kvartil vijeka trajanja proizvoda 1100 sati, a gornji kvartil 1300 sati, to znači da je raspon varijacije trajanja srednjih 50% jedinica u skupu (po položaju u nizu) jednaka 200 sati.

Kvartili zajedno s medijanom dijele distribuciju na četiri jednaka dijela.

Osim kvartila rabe se i decili i percentili s tumačenjem koje je slično kvartilima. U tome slučaju imamo i odgovarajuće mjere disperzije.

Ako je npr. deveti decil jednak 1150 sati onda to znači da 90% jedinica u statističkome skupu (proizvoda) traje 1150 sati ili manje, a 10% 1150 sati ili više.

A6. Relativne mjere disperzije.

Relativne mjere disperzije su:

1.) KOEFICIJENT VARIJACIJE

2.) KOEFICIJENT KVARTILNE DEVIJACIJE

Koeficijent varijacije je relativna mjera disperzije ,a služi za mjerenje i uspoređivanje disperzije u različitim distribucijama. Pomoću standardne devijacije ne može se uspoređivati intenzitet disperzije u različitim distribucijama, naročito ako su jedinice mjere različite.

Koeficijent varijacije je omjer između standardne devijacije i aritmetičke sredine. Taj omjer se može pomnožiti sa 100, i onda predstavlja postotak standardne devijacije u odnosu na aritmetičku sredinu. U određenim slučajevima može biti i veći od 100% (jer to nije relativni broj strukture).



Koeficijent kvartilne devijacije je relativna mjera disperzije srednjih 50% jedinica u statističkom nizu čija je vrijednost između 0 i 1.



A7. Mjere asimetrije. Mjere zaobljenosti.

Pod pojmom asimetrije distribucije razumijevamo nagnutost distribucije na lijevu ili desnu stranu s obzirom na vrh distribucije.

Mjerenje asimetrije podrazumijeva mjerenje načina raspoređivanja pojedinačnih podataka numeričkog niza u odnosu na neku izabranu vrijednost, a najčešće u odnosu na neku od srednjih vrijednosti.

 Simetrična Pozitivno asimetrična Negativno asimetrična

Mjere asimetrije su:

1.) KOEFICIJENT ASIMTRIJE

2.) PEARSONOVA MJERA ASIMETRIJE

3.) BOWLEYEVA MJERA ASIMETRIJE

Koeficijent asimetrije

Postoji više različitih mjera asimetrije. Ukoliko želimo asimetričnost izraziti preko varijanca oko aritmetičke sredine upotrijebit ćemo moment oko aritmetičke sredine. Budući da je vrijednost prvoga momenta oko aritmetičke sredine uvijek jednaka 0, to onda moramo upotrijebiti moment višeg reda.

Drugi moment oko aritmetičke sredine uvijek je pozitivan kao i svi ostali parni momenti. Prvi neparni moment koji se može upotrijebiti je treći. Vrijednost trećega momenta oko aritmetičke sredine dijelimo s vrijednošću standardne devijacije koja je prethodno dignuta na treću potenciju da bi se mogao dobiti koeficijent, odnosno neimenovani broj.

Za simetrične distribucije koeficijent asimetrije 3 jednak je nuli, međutim 3 može biti jednak i nuli za neke asimetrične distribucije, pa u njegovoj interpretaciji kao mjeri disperzije treba biti oprezan.

Pearsonov koeficijent asimetrije izračunava se:



Kod negrupiranih nizova treći centralni moment izračunava se ovako:



Kod simetričnih distribucija vrijednost Pearsonovoga koeficijenta asimetrije jednaka je nuli. Kod desnostrane (pozitivne) asimetrije veći je od nule, dok je kod ljevostrane (negativne) asimetrije manji od nule.

U većini slučajeva:

Pearsonova mjera asimetrije

Pearson je uveo još jednu mjeru asimetrije koja se zasniva na razlici srednjih vrijednosti u distribuciji. Kod desnostrane asimetrije vrijednost moda je manja od vrijednosti aritmetičke sredine, dok je kod ljevostrane asimetrije vrijednost moda veća od aritmetičke sredine.

Za simetrične distribucije Pearsonova mjera asimetrije je jednaka nuli.



Kod umjereno asimetričnih distribucija ( ) je približno jednaka , pa se onda za Pearsonove mjere asimetrije može upotrijebiti i sljedeći izraz:



Ova mjera asimetrije kreće se uglavnom između -3 i +3.

Bowleyeva mjera asimetrije je zasnovana na razlici između kvartila i medijana:



Kod desnostrane asimetrije:



Kod ljevostrane asimetrije:

 

Ova mjera asimetrije kreće se između -1 i +1. Za simetrične distribucije vrijednost Bowleyeve mjere asimetrije je jednaka 0.

Mjera zaobljenosti

Kao jedna od karakteristika numeričkih vrijednosti obilježja distribucije može se uvesti još i zaobljenost vrha (kurtoza) . u tu svrhu se upotrebljava koeficijent zaobljenosti vrha distribucije sa sljedećim izrazom:





Koeficijent zaobljenosti poprima vrijednost 3 za normalnu distribuciju. Ukoliko je vrh šiljastiji nego kod normalne distribucije, koeficijent zaobljenosti ima vrijednost veću od 3. Kod tupog oblika distribucije koeficijent zaobljenosti je između 1.8 i 3.

Pravokutna (jednolika, uniformirana) distribucija ima vrijednost koeficijenta zaobljenosti vrha 1.8, dok je kod U distribucije ta vrijednost manja od 1.8.

Normalna distribucija ima koeficijent zaobljenosti vrha jednak 3, a koeficijent asimetrije jednak nuli.

Ako poznajemo vrijednosti koeficijenta asimetrije i koeficijenta zaobljenosti, možemo skicirati i oblik distribucije, te ocijeniti njezin otklon od normalne distribucije.

Distribucija A ima šiljati oblik i desnostrano je asimetrična.

Distribucija B ima šiljati oblik i ljevostrano je asimetrična.

Distribucija C ima tupi oblik i ljevostrano je asimetrična.



B1. Vjerojatnost. Pojam. Adicijski i multiplikacijski teorem.

Teorija vjerojatnosti nastala je iz igara na sreću u 17. st. Da bi se tijekom vremena razvila u jednu od najvažnijih grana matematike.

Rođendanom teorije vjerojatnosti smatra se godina 1654. Kada se kockar Chevalier de Mere obratio pismom Blaisu Pascalu oko jednoga problema u igri kockom. Zatim se Pascal obratio pismom Fermatu.

Aksiomatska izgradnja teorije vjerojatnosti završena je između dvaju svjetskih ratova, a glavni autor je Kolmogorov (1933).

Suvremena teorija vjerojatnosti jako se bavi razradom Bayesovoga teorema, pa se razvija cijela nova grana statistike nazvana Bayesijanska statistika, za razliku od klasičnog pristupa na osnovu frekvencija.

Teorija vjerojatnosti čini osnovu statističkog zaključivanja.

Slučajan događaj je takav događaj koji se može, ali se ne mora realizirati, odnosno realizira se uz određenu vjerojatnost. Realizacija slučajnog događaja rezultat je mnogih čimbenika.

Vjerojatnost je spoj filozofijskoga poimanja slučaja i matematike.

Prema klasičnoj definiciji vjerojatnost realizacije slučajnog događaja A jednaka je omjeru broja (za njega) povoljnih ishoda i svih mogućih ishoda:

S obzirom na činjenicu da broj povoljnih događaja ne može premašiti broj svih mogućih ishoda, zaključujemo da je vjerojatnost mjera slučaja koja se kreće između 0 i 1.

Sigurnome događaju odgovara vjerojatnost 1. Nemogućem događaju odgovara vjerojatnost o, ali ako vjerojatnost iznosi 0 to ne znači da je događaj nemoguć.

Vjerojatnost protivnog događaja

Vjerojatnost da se slučajni događaj (A) ne realizira jednaka je omjeru broja za njega nepovoljnih ishoda i broja svih mogućih ishoda:



Stoga je:



Vjerojatnost „ a priori“

Kod vjerojatnosti „a priori“ *unaprijed* je poznat broj povoljnih i broj svih mogućih ishoda. Primjer je bacanje novčića gdje je vjerojatnost da padne „glava“ jednaka ½ s obzirom da ima dva moguća ishoda koja su jednako vjerojatna (ovo je idealna situacija kad se radi o tzv. „fer“ novčiću koji ne može pasti na brid).

 P(G) =

Vjerojatnost dobitka na lotu jednaka je:



Vjerojatnost „a posteriori“

Ukoliko vjerojatnost realizacije slučajnog događaja A nije poznata unaprijed, može se izračunati tzv. „vjerojatnost a posteriori“. Naziva se još i statističkom vjerojatnošću.



Izraz *p* čita se „ granična vrijednost po vjerojatnosti“ da se razlikuje od limesa u linearnoj algebri. Gornji izraz predstavlja Bernoullijev zakon velikih brojeva.

Vjerojatnost „ a posteriori“ jednaka je graničnoj vrijednosti relativne frekvencije kada broj pokusa teži u beskonačnost.

Primjer vjerojatnosti „a posteriori“ je uspješnost polaganja ispita iz statistike u šk. 2008/2009.

Od 720 ukupno upisanih studenata na kolegij „Statistika“ položilo ih je 432.

P(A) = = 0.6

Adicijski teorem (teorem o zbrajanju vjerojatnosti)

Ako dva slučajna događaja ne mogu nastupiti istodobno, kažemo da se ti događaji međusobno isključuju, tj. da su pripadni skupovi elementarnih događaja disjunktni.

Vjerojatnost realizacije jednoga ili drugoga događaja jednaka je zbroju vjerojatnosti realizacije jednoga i vjerojatnosti drugoga događaja.



Ukoliko se slučajni događaji A i B ne isključuju tada se vjerojatnost realizacije slučajnog događaja A ili događaja B dobiva na sljedeći način:



P(AB) predstavlja vjerojatnost da slučajni događaj A i B nastupe istovremeno.

Primjer:

Koliko iznosi vjerojatnost da će slučajno odabrani student dobiti na ispitu ocjenu 3 ili 4?



Multiplikacijski teorem ( teorem o množenju vjerojatnosti )

Ukoliko se događaji A i B međusobno ne isključuju i ako vjerojatnost realizacije jednog događaja ne zavisi o realizaciji drugoga događaja, tada je vjerojatnost istovremene realizacije događaja A i događaja B jednaka umnošku vjerojatnosti realizacije događaja A i događaja B:



Za takve događaje kažemo da su (stohastički) nezavisni.

Primjer:

Koliko iznosi vjerojatnost da će zelena kocka pasti na broj 2 i crvena na broj 4?



Koliko iznosi vjerojatnost da će od šestero djece u nekoj obitelji svi biti muškoga spola?



B2. Uvjetna vjerojatnost

Ukoliko je realizacija događaja A uvjetovana prethodnom realizacijom događaja B, radi se o uvjetnoj ili kondicionalnoj vjerojatnosti događaja A.



odnosno:

Kod nezavisnih događaja vrijedi:



Ako se događaj B realizira samo tada kada nastupi jedan od n disjunktnih događaja A1, A2, ..., An  za koje je onda se vjerojatnost događaja B dobiva

 po formuli potpune vjerojatnosti.





Ovaj teorem se naziva BAYESOV TEOREM i naročito se primjenjuje u medicini i ostalim bioznanostima jer pruža izračun vjerojatnosti za ispravno postavljene dijagnoze, odnosno testa, kako bi se što više smanjila mogućnost za nepotrebne medicinske zahvate.

Ovdje se pita kolika je vjerojatnost da će se dogoditi događaj A ako se dogodi događaj , tj. vjerojatnost da posljedica A ima za uzorak B.

Primjer:

U masovnoj proizvodnji 97% proizvoda je ispravno. Kontrola kvalitete proglašava proizvod ispravnim uz vjerojatnost 99% ako je proizvod ispravan i uz vjerojatnost od 4% ako je proizvod neispravan. Kolika je vjerojatnost da je proizvod ispravan ako ga je kontrola proglasila ispravnim?

Radi se o primjeni Bayesovoga teorema.

A1 = proizvod je potpuno ispravan, P(A1 ) = 0.97

A2 = proizvod je neispravan, P(A2 ) = 0.03

B = kontrola proglašava proizvod potpuno ispravnim

P(B/A1) = 0.99, P(B/A2) = 0.04





Dakle, ako uzmemo proizvod iz pakovanja za koji kontrola tvrdi da je ispravan vjerojatnost da je to doista tako iznosi 0.99875, dakle, veoma je visoka. Ukoliko bi takva vjerojatnost bila manja negoli što mislimo da je dozvoljeno prema kontroli kvalitete, onda moramo poboljšati sam način kontrole.

Vjerojatnost da je proizvod neispravan ako ga je kontrola proglasila neispravnim iznosi:

Dakle, relativno nizak postotak.

B3. Dvodimenzionalna distribucija vjerojatnosti. Marginalna distribucija vjerojatnosti.

Dvodimenzionalna distribucija vjerojatnosti

Diskontinuirana slučajna varijabla X može poprimiti vrijednosti *x*1, *x*2, x*3*, ... , xk, dok diskontinuirana slučajna varijabla Y može istovremeno poprimiti vrijednosti *y*1, *y*2, *y*3, ... , *y*m .

Vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost xi , a istovremeno slučajna varijabla y poprimi vjerojatnost yj označava se ovako:



Budući da se radi o distribuciji vjerojatnosti, moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:



Skup svih uređenih parova sačinjava dvodimenzionalnu distribuciju slučajne varijable (X,Y).

Marginalna distribucija vjerojatnosti

Kod marginalnih distribucija primjenjuje se adicijski teorem iz teorije vjerojatnosti. Traži se vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi neku vrijednost Xi bez obzira na to koju će vrijednost poprimiti slučajna varijabla Yj. Slično tomu marginalna distribucija slučajne varijable Y predstavlja vjerojatnost da varijabla Y poprimi vrijednost Yj bez obzira koju vrijednost poprimi slučajna varijabla X.



B4. Diskontinuirana slučajna varijabla. Svojstva i teorijske distribucije.

Diskontinuirana (ili diskretna) slučajna varijabla je varijabla koja može poprimiti najviše prebrojivo beskonačno mnogo vrijednosti s određenom vjerojatnošću:

 pri čemu mora biti :





uređeni skup parova naziva se distribucija slučajne varijable X. Zakon po kojem svakoj vrijednosti slučajne varijable X pripada vjerojatnost P(xi) naziva se *zakon vjerojatnosti* slučajne varijable X.

Funkcija distribucije slučajne varijable X predstavlja vjerojatnost da slučajna varijabla X ne premaši neku određenu vrijednost xk R.



Funkcija distribucije slučajne varijable X je monotono neopadajuća funkcija.

Očekivanje (diskontinuirane) slučajne varijable jednako je zbroju umnožaka vrijednosti varijable X i odgovarajućih vjerojatnosti P(xi):



Izraz koji vrijedi pod uvjetom da red na desnoj strani konvergira apsolutno ( to drugim riječima znači da očekivanje i ne mora imati konačnu vrijednost, ali se takovim distribucijama vjerojatnosti koje nemaju konačna očekivanja nećemo baviti).

Aritmetička sredina u empirijskim distribucijama ima istu interpretaciju kao i očekivanje kod teorijskih distribucija.

Varijanca (diskontinuirane) slučajne varijable X je očekivanje kvadratnog odstupanja vrijednosti varijable X od njenoga očekivanja:







TEORIJSKE DISTRIBUCIJE DISKONTINUIRANE SLUČAJNE VARIJABLE

1.) BINOMNA DISTRIBUCIJA

2.) POISSONOVA DISTRIBUCIJA

3.)JEDNOLIKA DISTRIBUCIJA

4.) HIPERGEOMETRIJSKA DISTRIBUCIJA

Binomna distribucija

Ako je vjerojatnost da nastupi neki slučajni događaj poznata i uvijek ista tijekom izvođenja pokusa može se izračunati vjerojatnost da se slučajna varijabla X realizira x puta u n pokušaja. U tom slučaju kažemo da se diskontinuirana varijabla X ravna prema tzv. Binomnoj distribuciji koja ima vjerojatnost:

n - br. pokusa

x - broj povoljnih ishoda u n pokusa

p - vjerojatnost realizacije slučajnog događaja

n-x - broj nepovoljnih ishoda u n pokusa

Očekivanje slučajne varijable X koja se distribuira prema binomnoj distribuciji zaračunava se kao i kod ostalih diskontinuiranih distribucija:

Varijanca, koeficijent asimetrije i koeficijent zaobljenosti binomne distribucije dobivaju se po formulama:



Ukoliko je p=q=0.5 onda binomna distribucija ima simetričan oblik.

Poissonova distribucija

Ako je vjerojatnost slučajnog događaja veoma malena i konstantna tijekom izvođenja pokusa, umjesto binomne distribucije koristi se tzv. Poissonova distribucija. U tom slučaju broj n pokusa raste u beskonačnost, ali očekivana vrijednost = n\*p ostaje konstantna.

Što je vrijednost od n veća, a vrijednost od p manja, to je aproksimacija bolja.





Poissonova distribucija je jednoparametarska distribucija a očekivanjem kao parametrom.

Poissonova distribucija je uvijek pozitivno asimetrična. Asimetričnost distribucije se smanjuje s porastom parametra .

Hipergeometrijska distribucija

Osnovni skup se sastoji iz dva dijela: skup elemenata koji imaju neko obilježje A i skup elemenata koji to obilježje nemaju . u uzorku se bira određeni broj elemenata osnovnoga skupa. Slučajna varijabla je broj jedinica u uzorku koje imaju određeno obilježje A. Ukoliko se jedinice osnovnoga skupa , koje su jednom uzete u uzorku ne vraćaju ponovno u osnovni skup radi se o tzv. hipergeometrijskoj distribuciji.



Upotrjebljene oznake su sljedeće:

P(X) – zakon vjerojatnosti slučajne varijable X

M – br. elemenata u osnovnom skupu s obilježjem A

N-M – br. elemenata u osnovnom skupu koje nemaju obilježje A

n-x – br. elemenata u uzorku koji nemaju obilježje A

N – br. elemenata u osnovnom skupu

N – br. elemenata u uzorku

X – br. elemenata u uzorku koji imaju obilježje A



Ukoliko veličina osnovnog skupa N teži u beskonačnost, tada vrijedi:



Ako pri tom n ostaje konstantan, može se pokazati da zakon vjerojatnosti hipergeometrijske distribucije H teži k binomnoj distribuciji B .



Iz navedenog se zaključuje da se hipergeometrijska distribucija u većini slučajeva u praksi može zamijeniti binomnom što olakšava izračunavanje pripadajućih vjerojatnoća.

Jednolika distribucija

Ako slučajna varijabla X poprima s istom vjerojatnošću bilo koju od n vrijednosti, kažemo da X ima jednoliku distribuciju :



Najbolji primjer je bacanje kocke gdje su vjerojatnosti da kocka padne na isti broj 1,2,3,4,5,6 iste i iznose 1/6.

U industrijskim primjenama često se upotrebljava pri ispitivanju rada strojeva koji izrađuju isti proizvod. Ako se kvaliteta proizvoda označava s „dobar“ i „loš“ , onda se može pretpostaviti da se radi o jednolikoj distribucija ukoliko strojevi rade jednoliko.

B5. Kontinuirana slučajna varijabla. Svojstva i teorijske distribucije.

Kontinuirana slučajna varijabla X može poprimiti neprebrojivo beskonačno mnogo vrijednosti. Zbog toga se kod kontinuiranih slučajnih varijabli ne računa vjerojatnost u određenoj točki, nego nad određenim intervalom vrijednosti slučajne varijable X. Vjerojatnost da će neka kontinuirana slučajna varijabla X poprimiti neku određenu vrijednost x jednaka je nuli, ali to ne znači i nemogući događaj.

Kod kontinuirane slučajne varijable umjesto P(X) upotrebljavamo *f(*X). Funkcija vjerojatnosti *f*(X) nije vjerojatnost, ali je tom funkcijom određena vjerojatnost što pripada svakom intervalu ( *x*1, *x*2).

Funkcija vjerojatnosti ( naziva se i funkcijom gustoće vjerojatnosti) kontinuirane slučajne varijable X ima sljedeća svojstva:

1.) *f*(*x*) 0 , *x*

2.) površina ispod krivulje vjerojatnosti jednaka je 1



3.)

Funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable X je sljedeća:



F(x) predstavlja vjerojatnost da slučajna varijabla X ne premaši neku unaprijed zadanu vrijednost x. U empirijskoj statistici ta funkcija predstavlja kumulativni niz „manje od“.

Očekivana vrijednost kontinuirane slučajne varijable X jednaka je:



 , ako integral konvergira

Varijanca kontinuirane slučajne varijable X jednaka je:



TEORIJSKE DISTRIBUCIJE KONTINUIRANE SLIČAJNE VARIJABLE:

1.) NORMALNA DISTRIBUCIJA

2.) STUDENTOVA DISTRIBUCIJA

3.) HI-KVADRAT DISTRIBUCIJA

4.) F-DISTRIBUCIJA

Normalna distribucija

Normalna distribucija je najvažnija distribucija u statističkoj teoriji. Funkcija gustoće vjerojatnosti normalne distribucije je sljedeća:





Parametri normalne distribucije su njeno očekivanje i varijanca 2.

Normalna distribucija je potpuno simetrična distribucija, pa svi koeficijenti asimetrije iznose nula, dok je vrijednost koeficijenata zaobljenosti jednaka 3.

Ako uvedemo standardiziranu varijablu Z oblika:

 dobivamo 





Ovdje se radi o normalnoj distribuciji *N(0;1)* koju nazivamo standardiziranom ili jediničnom normalnom distribucijom s očekivanjem koje je jednako nuli, a varijancom jednakom jedinici.

Buduće da jedinična normalna distribucija ima uvijek iste vrijednosti parametara (dakle, uvijek isti oblik) to se mogu tolerirati vjerojatnosti za intervale vrijednosti varijable Z od 0 do z.

Studentova distribucija

Studentova distribucija je česta u primjenama kod procjene parametara i kod testiranja hipoteza na osnovu uzorka. Njezin oblik visi o broju stupnjeva slobode *v.*

Područje vrijednosti varijable „t“ je interval (- + ). Studentova distribucija je simetrična s obzirom na t=0. Spljoštenija je od normalne distribucije . Ukoliko *v,* Studentova distribucija teži jediničnoj normalnoj distribuciji.

Ako je Z varijabla jedinične normalne distribucije *N(0;1)* ,a varijabla gama distribucije s brojem stupnjeva slobode *v,* onda je:



 varijabla Studentove distribucije s brojem stupnjeva

 slobode *v*



U primjenama upotrebljava se jedinična normalna distribucija umjesto Studentove distribucije već kod *v*= 30. Naime, kod *v*=30 pogreška aproksimacije je manja od 0.03.

Hi-kvadrat distribucija

Ako su X1,X2,X3,..., Xn nezavisne normalne varijable koje imaju jednaka očekivanja, E(X1) = ... = E(Xn) = i jednake varijance V(X1) = ... = V(Xn) = 2 , tada je:

gama varijabla sa stupnje slobode *v*=n

Područje vrijednosti varijable *x* 2 je (0;+).

Za različiti broj stupnjeva slobode distribucija ima različiti oblik

Varijabla pripada hi-kvadrat distribuciji s brojem stupnjeva

slobode koji je jednak: *v*= r - broj nepoznatih parametara u pretpostavljenoj distribuciji -1



Za *v* 3 distribucija je pozitivno asimetrična. Što je broj stupnjeva slobode veći , distribucija je bliža obliku normalne distribucije. Kod *v*30 upotrebljava se aproksimacija normalnom distribucijom:

gdje je „z“ varijabla iz jedinične normalne distribucije.

F-distribucija

F-distribucija je određena s dva parametra v1 i v2 koji predstavljaju stupnjeve slobode. Ako su i nezavisne *x*2 razdiobe sa stupnjevima slobode *v*1 i *v*2 tada varijabla :



 Pripada F-distribuciji sa stupnjevima slobode *v*1 i *v*2

Koristi se najviše pri testiranju značajnosti omjera varijanci.

C1. Procjena aritmetičke sredini osnovnoga skupa.

Distribucija aritmetičkih sredina svih mogućih uzoraka (ima ih K!) naziva se *sampling distribucija*. Ukoliko uzorci potječu iz osnovnih skupova koji su normalno distribuirani onda je sampling distribucija također normalnog oblika.

Međutim, sampling distribucija aritmetičkih sredina teži normalnome obliku kada veličina uzorka teži k beskonačnosti i u slučaju kada uzorci ne potječu iz normalno distribuiranih osnovnih skupova. Kod praktičnih primjena uzima se da je uzorak mali ako je n 30 jedinica. U tome slučaju sampling distribucija ima oblik Studentove t-distribucije. Kod procjene nekih drugih parametara (npr. proporcije) mali uzorak he prije definiran pa nema smisla primjenjivati.

Očekivana vrijednost sampling distribucije aritmetičkih sredina jednaka je očekivanoj vrijednosti osnovnoga skupa. To svojstvo naziva se *nepristranost*.

Očekivana vrijednost sampling distribucije može, ali ne mora biti jednaka očekivanoj vrijednosti osnovnoga skupa. Razlika između očekivane vrijednosti parametara u osnovnome skupu i u sampling distribuciji naziva se *pristranost.* Općenito, ako vrijedi:



 onda kažemo da je procjena nepristrana, a ako vrijedi:



 onda kažemo da je procjena pristrana

pristranost procjene na bazi uzorka predstavlja razliku između očekivane vrijednosti parametra u sampling distribuciji i vrijednosti populacijskoga parametra. Ocjena aritmetičke sredine na osnovu uzorka je nepristrana ako se uzima jednostavni slučajni uzorak. Dakle, vrijedi: E( ) = 

Standardna devijacija sampling distribucije naziva se *standardna graška.* Pri procjeni aritmetičke sredine standardna greška se izračunava na sljedeći način:



 , odnosno



 za konačne skupove , u praksi ako je f 0.05

ukoliko standardna devijacija osnovnog skupa s nije poznata upotrebljavamo procjenu na osnovu uzorka. Procjena standardne devijacije na osnovu uzorka je pristrana. Nepristrana ocjena varijance osnovnoga skupa na osnovu uzorka može se dobiti na sljedeći način:

 s2 = 2  s2 predstavlja nepristranu procjenu varijance

određivanje veličine uzorka uz zadani nivo povjerenja i maksimalnu grešku može se izvršiti na sljedeći način:

Ako je frakcija odabiranja manja od 0.05, tada se konačna veličina uzorka određuje kao n' . Ako je frakcija izbora veća od 0.05, onda se pristupa korekciji na sljedeći način:

 

Gornja korekcija vrijedi samo za konačne osnovne skupove.

Ukoliko se greška odredi u relativnome izrazu, onda se umjesto upotrebljava koeficijent varijacije osnovnoga skupa.

Kod praktičnih primjena već kod veličine uzorka n 30 zanemarujemo korektivni faktor na desnoj strani izraza za nepristranu procjenu varijance.

Procjena aritmetičke sredine na osnovu uzorka naziva se točkastom procjenom aritmetičke sredine osnovnoga skupa. Da bi se dobila intervalna procjena aritmetičke sredine, potrebno je u račun uzeti varijabilitet jedinica u osnovnome skupu (izražen preko varijance osnovnoga skupa ili njene ocjene pomoću uzorka) i veličinu uzorka. Intervalna procjena aritmetičke sredine osnovnoga skupa dobiva se:

1- naziva se intervalom povjerenja. Prema nepisanom pravilu taj interval obično iznosi 95%.

Koeficijent „z“ dobije se iz tablice površina ispod normalne krivulje kada veličina uzorka premaši 30 jedinica. Nivo pouzdanosti procjene je jednaka 1-Ukoliko je n 30 jedinica, upotrebljava se „t“ iz Studentove distribucije umjesto koeficijenta „z“.

npr. procjena prosječne površine stana na uzorku od 200 domaćinstava





Gornji rezultati čitaju se ovako: uz vjerojatnost od 98% procjenjujemo sa se prosječna površina svih stanova kreće između 54.17 i 64.71 m2 .

C2. Procjena totala osnovnoga skupa.

Total je ukupna vrijednost obilježja svih jedinica u (konačnome) statističkom skupu. Procjena totala vrši se na osnovu uzorka pomoću procjene aritmetičke sredine. Procjena totala nepristrana je kao i procjena aritmetičke sredine.

Interval povjerenja procjene totala osnovnoga skupa glasi:

****

U gornjem izrazu za procjenu totala standardna greška procjene totala osnovnoga skupa jednaka je:

Se ( ) = N ⃘ Se ()

Točkasta procjena totala na osnovu uzorka jednaka je:

Procjena totala na osnovu uzorka također je nepristrana jer je procjena aritmetičke sredine nepristrana.

C3. Procjena varijance osnovnoga skupa.

Sampling distribucija varijanci ima oblik Hi-kvadrat distribucije. Ukoliko uzorak raste u beskonačnost, sampling distribucija teži k normalnome obliku.

Procjena varijance na osnovu uzorka je pristrana. Nepristrana procjena varijance osnovnoga skupa može se dobiti ovako:



 s2 predstavlja nepristranu procjenu varijance osnovnoga skupa

Intervalna procjena varijance osnovnoga skupa može se dobiti na sljedeći način:



Vrijednost Hi-kvadrata očitavamo iz odgovarajućih tablica Hi-kvadrat distribucije na određenom nivou i uz određeni broj stupnjeva slobode df = *v* = n-1

Ukoliko veličina uzorka prelazi 30 jedinica Hi-kvadrat distribucija može se aproksimirati pomoću normalne distribucije. Tada se vrijednost Hi-kvadrata mogu dobiti pomoću sljedeće formule:

Intervalna procjena standardne devijacije dobiva se tako da se izračuna pozitivni korijen iz donje i gornje granice intervalne procjene varijance osnovnoga skupa.

C4. Procjena proporcije osnovnoga skupa.

Veličina uzorka određuje se sljedećom formulom:

n' = P ⃘ Q – varijanca osnovnoga skupa

Ukoliko je umjesto varijance osnovnoga skupa poznat koeficijent varijacije osnovnog skupa, tada formula poprima sljedeći oblik:

n' =

Ukoliko je frakcija izbora veća od 0.05 , onda se pristupa korekciji kao i pri procjeni aritmetičke sredine osnovnoga skupa.

Intervalna procjena proporcije (odnosno relativne frekvencije) osnovnoga skupa:



Procjena proporcije na osnovu uzorka je nepristrana.

Pri tomu se standardna greška procjene proporcije dobiva:



 ako je n 30, odnosno:

  ako je n 30 jedinica

Ukoliko je frakcija izbora veća od 0.05, tada se formule za standardnu grašku korigiraju (množe) s korektivnim faktorom za konačne osnovne skupove:

kao i pri procjeni aritmetičke sredine osnovnoga skupa.

Jaka preporuka za procjenu proporcije je da se ne radi nikako s malim uzorcima. Preporuča se da veličina uzorka ne smije biti manja od 100.

C5. Testiranje hipoteze o nepoznatoj aritmetičkoj sredini osnovnoga skupa.

Postavljaju se ove hipoteze:



Interval prihvaćanja hipoteze H0 (nulte hipoteze) glasi:



Ako je veličina uzorka n 30 , tada se upotrebljava „t“ iz Studentove distribucije umjesto koeficijenta „z“ iz normalne distribucije.

Ako se aritmetička sredina uzorka nalazi u navedenom intervalu, prihvaćamo hipotezu H0. Ukoliko se aritmetička sredina uzorka nalazi izvan navedenog intervala, prihvaća se alternativna hipoteza H1.

Testiranje se može izvesti tzv. „t“ testom:

 ako je n 30 jedinica, onda se uptrebljava z\*

Da bi se izvršilo testiranje, potrebno je pronaći kritičnu vrijednost za „t“ odnosno „z“ iz odgovarajućih tablica. Ako je uzorak mali, onda se uzima t iz Studentove distribucije sa (n-1) stupnjeva slobode i uz signifikantnost testa .

Zaključci se izvode na sljedeći način:

ako je - t\* + prihvaća se hipoteza H0

ako je - t\* ili + t\* prihvaća se hipoteza H1

Testiranje hipoteze o nepoznatoj aritmetičkoj sredini osnovnoga skupa može se postaviti i jednosmjerno.

Pri testiranju na donju granicu postavlja se alternativna hipoteza da je aritmetička sredina osnovnoga skupa manja od neke pretpostavljene vrijednosti. Hipoteza H0 glasi da je aritmetička sredina osnovnoga skupa veća ili jednaka nekoj pretpostavljenoj vrijednosti.



Donja granica prihvaćanja H0 hipoteze glasi:

 

Izuzetno, ukoliko smo sigurni iz određenih razloga da aritmetička sredina osnovnoga skupa ne može poprimiti vrijednost veću od  , tada se nulta hipoteza u jednosmjernome testiranju također može postaviti kao i kod dvosmjernog testiranja:





Prije navedeni način jednosmjernog testiranja je općenitiji pa se može primjeniti u svakome slučaju.

Ako aritmetička sredina uzorka ima vrijednost manju od donje granice prihvaćanja nulte hipoteze, prihvaća se alternativna hipoteza da je aritmetička sredina manja od neke pretpostavljene vrijednosti.

I ovdje se testiranje može izvršiti z-testom ili t-testom, kao i kod dvosmjernog testiranja. Zaključak se izvodi na ovaj način:

ako je t\* - prihvaća se alternativna hipoteza H1

ako je t\* - prihvaća se hipoteza H0

Testiranje na gornju granicu vrši se ovako:





Hipotezom H0 tvrdi se da vrijednost aritmetičke sredine osnovnoga skupa ne premašuje pretpostavljenu vrijednost . Alternativnom hipotezom tvrdi se da je aritmetička sredina osnovnoga skupa veća od pretpostavljene vrijednosti.

Gornja granica prihvaćanja glasi:



Ukoliko aritmetička sredina uzorka premaši gornju granicu prihvaćanja nulte hipoteze prihvaća se alternativna hipoteza, tj. hipoteza da je aritmetička sredina osnovnoga skupa veća od neke pretpostavljene vrijednosti.

Testiranje pomoću „z“ testa:

ako je z\* prihvaća se hipoteza H1

ako je z\* prihvaća se hipoteza H0

Ovdje se također primjenjuje vrijednost „t“ umjesto „z“ ukoliko veličina uzorka ne premaši 30 jedinica.

Kao i kod testiranja na donju granicu, može se izuzetno nulta hipoteza postaviti da je aritmetička sredina jednaka nekoj pretpostavljenoj vrijednosti nasuprot hipotezi da je aritmetička sredina veća od neke pretpostavljene vrijednosti ,ali samo ako smo sigurni da vrijednost aritmetičke sredine ne može biti manja od pretpostavljene vrijednosti.

Zaključci o statističkoj signifikantnosti donose se na osnovu greške tipa I.

Veličina greške tipa I jednaka je vjerojatnosti da odbacimo nultu hipotezu ukoliko je ona istinita. Ta vjerojatnost jednaka je nivou signifikantnosti testa . Uobičajno je da se u znanstvenoj literaturi signifikantnost ograničava ne 5% (rjeđe na 1%), iako posljednjih par godina jako se raspravlja o ispravnosti toga stava, odnosno preispituje se kruto utvrđivanje signifikantnosti na razini 5%. Naime, ake se kruto držimo razine signifikantnosti od 5%, onda rezultat testa čija signifikantnost je jednaka npr. 5.02% neće biti dovoljan za odbacivanje nulte hipoteze, dok će signifikantnost od 4.98% biti za tu svrhu dovoljna.

Veličina greške tipa II predstavlja vjerojatnost da prihvatimo nultu hipotezu premda ona nije istinita. Veličina greške tipa II je funkcija istinite vrijednosti aritmetičke sredine osnovnoga skupa.

Što se više razlikuju prava i pretpostavljena aritmetička sredina, to je veličina greške tipa II manja. U krajnjem slučaju ako je vrijednost prave aritmetičke sredine jednaka pretpostavljenoj vrijednosti, greška tipa II iznosi (1-). Veličina greške tipa II označava se s . Snaga testa također je funkcija istinite vrijednosti aritmetičke sredine osnovnoga skupa. Veličina snage testa je vjerojatnost da ne prihvatimo lažnu nultu hipotezu.

Snaga testa = 1-

U praktičnim primjenama ograničava se na 80%.

Dakle, snaga testa je veća što je greška tipa II manja. Prema tomu, može se zaključiti da jednosmjerni testovi imaju veću snagu od dvosmjernih testova, pa ih je pod određenim uvjetima bolje primjenjivati.

Ukoliko se smanji greška tipa I, povećava se greška tipa II i obratno.

|  |  |
| --- | --- |
| Odluka u svezi nul-hipoteze | Stvarno stanje nul-hipoteze |
| **Istinita** | **lažna** |
| **Odbacujemo nul-hipotezu** | Greška tipa I (α) | Ispravan zaključak |
| **Prihvaćamo nul-hipotezu** | Ispravan zaključak | Greška tipa II (β) |

C6. Testiranje hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dvaju nezavisnih osnovnih skupova.

Postavlja se nulta hipoteza da nema značajne razlike između aritmetičkih sredina dvaju nezavisnih osnovnih skupova.

 Nezavisni uzorci potječu iz različitih osnovnih skupova (populacija) te među njima ne postoji (korelacija). Ukoliko se na istome uzorku vrše različita mjerenja pod različitim uvjetima, onda govorimo o zavisnim uzorcima. Kod zavisnih uzoraka postoji korelacija između rezultata prije i poslije eksperimenta. Kod nezavisnih uzoraka standardna greška je veća negoli kod nezavisnih.



Interval prihvaćanja nulte hipoteze glasi:

0 z ⃘

Standardna graška u navedenom testiranju računa se ovako:

 =

Pretpostavlja se da su varijance osnovnih skupova jednake, ali su nepoznate, te se ocjena njihove vrijednosti dobiva iz uzorka, pa se izraz za standardnu grešku svodi na:

Se () =

Ako se radi o velikom uzorku može se koristiti jednostavniji izraz:



Treba naći apsolutnu vrijednost razlike aritmetičkih sredina uzorka. Ukoliko ta razlika premaši interval prihvaćanja nulte hipoteze, tada prihvaćamo alternativnu hipotezu kao istinitu, tj. zaključujemo da se aritmetičke sredine dvaju osnovnih skupova značajno razlikuju.

Pomoću „z“ testa:

z\* 

ako je - z\* + prihvaćamo hipotezu H0

ako je z\* - ili z\* + prihvaćamo hipotezu H1

Vrijednost „t“ se upotrebljava umjesto „z“ ukoliko zbroj veličina dvaju uzorka ne prelazi 32. Naime stupnjevi slobode se određuju kod ovog testiranja na sljedeći način:

df = + – 2

Zaključci o statističkoj signifikantnosti donose se na osnovi greške tipa I.

Ovdje je potrebno napomenuti da bi uzorci trebali potjecati iz normalnih populacija i trebali bi imati istu varijancu. Ovaj test je poprilično robustan na odstupanje od uvjeta normalnosti, ali tada je potrebit veći uzorak.

Testiranje ove hipoteze može se također provesti kao jednosmjerno ukoliko za to ima opravdanje, naime ako imamo saznanja da je aritmetička sredina jednoga osnovnoga skupa veća( ili manja) od aritmetičke sredine drugoga osnovnoga skupa a zanima nas signifikantnost testa, odnosno značajnost te razlike.

Snaga testa je veća što je greška tipa II manja. Prema tomu, može se zaključiti da jednosmjerni testovi imaju veću snagu od dvosmjernih testova, pa ih je pod određenim uvjetima bolje primjenjivati.

Jednosmjerni test izgledao bi ovako:



Jednosmjerni test može se postaviti kao test na donju kao test na gornju granicu.

Npr. ako kod dvosmjernog testa dobijemo signifikantnost od 8%, to znači da nema signifikantne razlike u aritmetičkim sredinama dviju nezavisnih populacija, a ako test postavimo jednosmjerno signifikantnost iznosi 4% što nje statistički signifikantnost.

C7. Testiranje hipoteze nepoznatoj proporciji osnovnoga skupa.

Testiranje hipoteze o nepoznatoj proporciji osnovnoga skupa vrši se na sličan način kao i testiranje hipoteze o nepoznatoj aritmetičkoj sredini osnovnoga skupa s obzirom na činjenicu sa su ima sampling distribucije iste.

Nultom hipotezom postavlja se da je proporcija (relativna frekvencija) osnovnoga skupa jednaka nekoj pretpostavljenoj vrijednosti:



Interval prihvaćanja nulte hipoteze glasi:



Standardna greška računa se ovako:

Se ( p ) = ako je n 30 jedinica, odnosno:

Se ( p ) = ako je n 30 jedinica

Ako je uzorak mali inda se umjesto „z“ upotrebljava vrijednost „t“ iz Studentove distribucije s *n* – 1 stupnjeva slobode.

Ako se proporcija iz uzorka nalazi u gornjem intervalu prihvaćanja, tada prihvaćamo nultu hipotezu kao istinitu. Ako se proporcija uzorka nalazi izvan intervala prihvaćanja, tada prihvaćamo kao moguću alternativnu hipotezu , tj. zaključujemo na nivou signifikantnosti da proporcija osnovnoga skupa nije jednaka nekoj pretpostavljenoj vrijednosti.

Testiranje se može izvesti i „z“ testom na isti način kao mi kod testiranja hipoteze o nepoznatoj vrijednosti aritmetičke sredine osnovnoga skupa.

Testovi se i ovdje mogu postaviti jednosmjerno, na analogan način kao i prije, postižući tako veću snagu testa.

C8. Testiranje hipoteze o razlici proporcija dvaju osnovnih skupova.

Testiranje hipoteze o razlici proporcija dvaju osnovnih skupova vrši se na sličan način kao i testiranje hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dvaju osnovnih skupova.

Nultom hipotezom pretpostavlja se da nema razlike u proporcijama dvaju nezavisnih osnovnih skupova, odnosno da uzorci koje smo odabrali potječu iz istih populacija. Hipoteze glase:



Interval prihvaćanja nulte hipoteze glasi:

Umjesto „z“ upotrijebit ćemo „t“ iz Studentove distribucije ako je broj stupnjeva slobode jednak 30 ili manje. Broj stupnjeva slobode u ovom testiranju se određuje na sljedeći način:

df = n1 + n2 – 2

Standardna greška može se izračunati sljedećom formulom:



 = prosječna proporcija (relativna frekvencija) za oba uzorka zajedno

 = procjena zajedničke varijance na osnovu uzorka

Sada treba usporediti apsolutnu vrijednost razlike proporcije između dvaju uzoraka s granicama intervala prihvaćanja.

Ukoliko se razlika proporcija uzorka nalazi u granicama intervala prihvaćanja nulte hipoteze prihvaćamo nultu hipotezu kao istinitu. Ukoliko se ta razlika nalazi izvan granica intervala prihvaćanja prihvaćamo alternativnu hipotezu, tj. zaključujemo da se proporcije dvaju osnovnih skupova razlikuju, naravno uz rizik da smo pogrešno odbacili nultu hipotezu koji je jednak razini signifikantnosti testa .

Testiranje se također može izvesti „z“ testom. Također i ovdje je primjenjivo testiranje na jednu granicu (npr. da je proporcija u drugome osnovnome skupu veća od proporcije u prvome osnovnome skupu) čime postižemo veću snagu testa.

C9. Testiranje hipoteze o razlici proporcija triju ili više osnovnih skupova

Pomoću uzorka ispituje se rad pet strojeva: A,B,C,D i E koji proizvode isti proizvod. Ispituje se razlika u proporciji proizvoda I kvalitete u ukupnoj proizvodnji navedenih strojeva. Rezultati uzorka su bili sljedeći:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Stroj | Veličina uzorka | Broj proizvoda I kvalitete |
| A | 200 | 40 |
| B | 180 | 34 |
| C | 300 | 110 |
| D | 200 | 50 |
| E | 160 | 26 |

Da li se na osnovu rezultata iz uzorka može prihvatiti kao istinita hipoteza da strojevi rade ujednačenom kvalitetom, odnosno da se proporcija proizvoda I kvalitete ne razlikuje od stroja do stroja? Nivo signifikantnosti testa je 1%.

Radi se o hipotezi da distribucija ima oblik pravokutne (jednolike) distribucije:



Za testiranje hipoteze da distribucija ima oblik pravokutne (jednolike) distribucije koristi se Pearsonov Hi-kvadrat test.

Stupnjevi slobode za testiranje hipoteze o pravokutnome obliku distribucije su

df = n – 1

Teorijske frekvencije dobiju se na sljedeći način:



 - procjena zajedničke proporcije na osnovu uzorka



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stroj | Veličina uzorka | Broj proizvoda I kvalitete |  |  |
| A | 200 | 40 | 50 | 2.000 |
| B | 180 | 34 | 45 | 2.689 |
| C | 300 | 110 | 75 | 16.333 |
| D | 200 | 50 | 50 | 0.000 |
| E | 160 | 26 | 40 | 4.900 |
| 𝛴 | 1040 | 260 | 260 | 25.922 |



 df = 5-1 = 4



Izračunata vrijednost Hi-kvadrata je veća od tablične na nivou signifikantnosti od 0.01 pa se prihvaća alternativna hipoteza, odnosno da distribucija nema oblik pravokutne distribucije, odnosno da strojevi ne rade ujednačeno.

C10. Testiranje hipoteze da distribucija ima određeni oblik.

Može se testirati hipoteza da distribucija slučajne varijable X ima oblik neke teorijske distribucije. Ovdje će se pokazati testiranja da li distribucija ima oblik jednolike, binomne, Poissonove ili normalne distribucije, ali se test može primijeniti i na druge pretpostavljene oblike distribucije.

Kod svih testiranja test-veličina je vrijednost empirijskoga Hi-kvadrata:



 – originalne frekvencije (iz distribucije uzorka)

 – teorijske frekvencije koje se izračunavaju pod pretpostavkom da distribucija ima oblik neke teorijske distribucije.

Teorijske frekvencije za diskontinuirane (diskretne) slučajne varijable dobivaju se ovako:



 gdje p( ) predstavlja vjerojatnost da slučajna (diskontinuirana) varijabla X poprimi vrijednost prema zakonu vjerojatnosti slučajne varijable koji smo pretpostavili nultom hipotezom. Kod testiranja hipoteze da distribucija ima normalni oblik ne računa se vjerojatnost u točki nego vjerojatnost nad određenim intervalom i ta vjerojatnost također množi sa zbrojem frekvencija.

Empirijska vrijednost Hi-kvadrata se uspoređuje s kritičnom vrijednošću Hi-kvadrata iz tablice na određenom nivou signifikantnosti testa i uz određeni broj stupnjeva slobode df = *v*.

Broj stupnjeva slobode izračunava se na sljedeći način:

- za jednoliku distribuciju df = k – 1

- za binomnu distribuciju df = k – 2

- za Poissonovu distribuciju df = k – 2

- za normalnu distribuciju df = k – 3

Veličina „k“ predstavlja broj frekvencija.

Ukoliko empirijska vrijednost hi-kvadrata ne premaši kritičnu vrijednost iz tablica, prihvaćamo hipotezu da empirijska distribucija ima pretpostavljeni oblik. Ukoliko je empirijska vrijednost Hi-kvadrata veća od kritične vrijednosti iz tablica, prihvaćamo alternativnu hipotezu da distribucija nema pretpostavljeni oblik.

Većina autora se slaže da teorijske frekvencije ne bi smjele biti manje od 5.

C11. Testiranje hipoteze o nezavisnosti obilježja

Nulta hipoteza glasi da ne postoji zavisnost dvaju obilježja (nominalnih, odnosno kategorijskih). Hipoteze glase:



Test-veličina je sljedeća:



 – originalne frekvencije (empirijske)

 – očekivane (teorijske) frekvencije koje se izračunavaju pod pretpostavkom da ne postoji zavisnost dvaju obilježja osnovnoga skupa



 - marginalna frekvencija i-tog retka

 – marginalna frekvencija j-tog stupca

n – veličina uzorka

Navedena veličina uspoređuje se s kritičnom vrijednošću Hi-kvadrata iz tablica. Broj stupnjeva slobode jednak je df = (r-1) ⃘ (c-1) , gdje oznaka r označava broj redaka, a oznaka c broj stupaca u tablici kontingence.

Ukoliko empirijska vrijednost Hi-kvadrata ne premaši kritičnu vrijednost Hi-kvadrata iz tablica, prihvaćamo nultu hipotezu kao istinitu, tj. zaključujemo da nema ovisnosti obilježja elemenata osnovnoga skupa. U drugom slučaju, ako vrijednost empirijskoga Hi-kvadrata premaši kritičnu vrijednost prihvaćamo alternativnu hipotezu, tj. zaključujemo da postoji zavisnost dvaju obilježja elemenata osnovnoga skupa. Tabela iz koje se izračunava vrijednost Hi-kvadrata naziva se tabelom kontingence.

Hi-kvadrat testom ustanovljava se samo vjerojatnost povezanosti dviju varijabli, ali ne i visina povezanosti. Aproksimativnu visinu povezanosti možemo ustanoviti pomoću *Pearsonovoga koeficijenta kontingence*.



Najmanja vrijednost koeficijenta kontingence iznosi nula.

Hi-kvadrat test može se izvoditi samo s apsolutnim frekvencijama. To znači da nije dopušteno rabiti postotke ili bilo koje druge izvedene veličine. Zbroj originalnih frekvencija uvijek mora biti jednak zbroju očekivanih frekvencija jer se Hi-kvadrat testom testira raspored frekvencija unutar tabele kontingence ne dirajući u njihove zbrojeve.

Ovdje također vrijedi pravilo da očekivane frekvencije ne smiju biti po volji male. Uobičajeno je kod tabela kontingence, ako postoje više od dvije ćelije da ne smije biti više od 20% očekivanih frekvencija koje su manje od 5.

Ukoliko je broj stupnjeva slobode veći od 1, potrebito je da 20% ćelija ima očekivane frekvencije manje od 5, a ni jednu očekivanu frekvenciju manju od 1.