1. **SKUPOVI**

Označavanje skupova: *A, B, S, X, Y…*

Označavanje elemenata skupa: *a, b, c, x, y, z…*

**Zadavanje skupa**

**Enumeracija ili ekstenzija –** skup smatramo zadanim ako je određeno (nabrojeno) koji su njegovi elementi. *B* = {2, 4, 6, 8, …}

**Deskripcija ili intenzija** – skup možemo zadati i tako da navedemo svojstvo ili propis koje mora zadovoljavati svaki njegov element. *C* = {x ∈ ***N*** : x ≤ 5}

**Podskup skupa**

Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, kažemo da je A **podskup** skupa B. A ⊆ B ili B ⊇ A.

Ako je A sadržan u B i ako postoji bar jedan element skupa B koji nije u skupu A, tada je A **pravi podskup** skupa B. A ⊂ B.

**Prazan skup** – skup koji ne sadrži nijedan element i označavamo ga sa ∅. – podskup svakoga skupa.

**Jednakost skupova**

Dva skupa su jednaka ako i samo ako se sastoje od istih elemenata, tj. ako je svaki element iz A ujedno i element skupa B i obrnuto. A = B → A ⊆ B i B ⊇ A.

**Partitivni skup** – 𝓟(X) – podskup svih poskupova skupa X. Elementi partitivnog skupa su podskupovi skupa X.

**Kardinalni broj skupa** X – broj elemenata skupa – 𝓴(X). - 𝓴(𝓟(X)) = **2**^𝓴(X).

**Univerzalni skup** – ima univerzalno značenje. Označavamo ga sa U.

**Unija** – skup svih elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova A i B.

A ∪ B

**Presjek** – skup koji se sastoji od onih i samo onih elemenata koji su istovremeno sadržani i u A i u B. A ∩ B

**Disjunktni skupovi** - A ∩ B = ∅

**Komplement** – svi elementi skupa U koji nisu u skupu A. CA

**Razlika** – skup svih elemenata skupa A koji nisu u skupu B. A\B = A ∩  CB

**Simetrična razlika** – pripadnost jednom ili drugom skupu, ali ne istodobno jednom i drugom. A Δ B = (A\B) ∪ (B\A)

**Svojstva Booleovih operacija**

1. **Komutativnost**

A ∩ B = B ∩ A

A ∪ B = B ∪ A

1. **Asocijativnost**

(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

1. **Idempotentnost**

A ∩ A = A

A ∪ A = A

1. **Distributivnost**

A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

1. **Involutivnost**

C(CA) = A

1. **De Morganovi zakoni**

C(A ∪ B) = CA ∩ CB

C(A ∩ B) = CA ∪ CB

1. A\B = A ∩  CB
2. **FUNKCIJE – SURJEKCIJA, INJEKCIJA, BIJEKCIJA**

**Svojstva funkcije**

Ako svakom elementu skupa E na neki potpuno određeni način pridružimo **samo jedan** element skupa F, kažemo da je zadana funkcija f na skupu E sa vrijednostima u skupu F. **f : E → F**

x ∈ E – nezavisna varijabla, argument, original

y = f(x) ∈ F – zavisna varijabla, vrijednost funkcije f od x

E – **domena** ili područje funkcije

F – **kodomena** ili područje vrijednosti funkcije

**SURJEKCIJA**

Ako je slika funkcije *f* cijeli skup F, odnosno R(f) = F, ako za svaki element skupa F postoji neki element skupa E koji se preslikao u njega. (kada su zauzeti svi elementi)

**INJEKCIJA**

Ako se različiti elementi skupa E preslikavaju u različite elemente skupa F,

f(x1) = f(x2) → x1 = x2

**BIJEKCIJA**

Ako je funkcija f : E → F i surjekcija i injekcija (obostrano jednoznačno preslikavanje) **eksponencijalna i logaritamska funkcija, linearna funkcija, ~~konstantna i trigonometrijske funkcije~~**

1. **NEKE POSEBNE VRSTE FUNKCIJA, JEDNAKOST FUNKCIJA, KOMPOZICIJA FUNKCIJA I INVERZNA FUNKCIJA**

**KONSTANTA**

Ako se svaki element domene funkcije *f* preslikava u jedan jedini element kodomene. Neki broj većinom.

**IDENTITETA**

Ako se svaki element domene preslikava na samog sebe.

**JEDNAKOST DVIJU FUNKCIJA**

f = g, samo ako su ispunjena sljedeća tri zahtjeva:

1. *f* i *g* su definirane na istom skupu E, imaju iste domene
2. *f* i *g* imaju iste kodomene
3. f(x) = g(x), za svaki x ∈ E.

**KOMPOZICIJA FUNKCIJA**

Neka su E, F i G neprazni skupovi, te f : E → F, g : F → G funkcije na E sa vrijednostima u F, odnosno na F sa vrijednostima u G.

**Kompozicija** promatranih funkcija *f* i *g* je funkcija *h* : E → G, takva da za svaki x ∈ E vrijedi: ***h(x) = g(f(x))***

Kompozicija funkcija f i g → ***h = g ⸰ f***

**INVERZNA FUNKCIJA**

Neka je funkcija *f* : E → F bijekcija. Tada postoji bijekcija *g* : F → E takva da je funkcija *h1* = g ⸰ f : E → E. Označavamo je s *f* -1

1. **ELEMENTARNE FUNKCIJE**

Realne funkcije realne varijable – funkcije za koje su domena i kodomena sadržane u skupu realnih brojeva (f : R → R)

**Realne funkcije:**

1. Algebarske funkcije
2. Transcendentne funkcije

**ALGEBARSKE FUNKCIJE**

Dobivaju se nizom algebarskih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje te potenciranje sa cijelim i razlomljenim eksponentom) koje se vrše nad nezavisnom varijablom x.

1. Cijele racionalne funkcije ili polinomi
2. Razlomljene racionalne funkcije
3. Iracionalne funkcije

**Cijele racionalne funkcije ili polinomi**

1. Polinom nultog stupnja – konstanta funkcija
2. Polinom prvog stupnja – linearna funkcija

a – koeficijent smjera, b – odsječak pravca na osi y

1. Polinom drugog stupnja – kvadratna funkcija (parabola)

Rješenja algebarske jednadžbe su **nultočke**

Za polinome vrijedi sljedeće:

1. Osnovni nastavak algebre: svaki polinom stupnja n ≥ 1 ima u kompleksnom brojevnom području točno *n* nultočki.
2. Ako je kompleksni broj z = a + bi korijen polinoma Pn(x), tada je u njemu konjugirano kompleksni broj također korijen tog polinoma
3. Pn(x) = a0(x-x1)k1(x-x2)k2…(x- xm)km

**Razlomljene racionalne funkcije**

 Ako je polinom u brojniku manjeg stupnja nego polinom u nazivniku, m < n, f(x) nazivamo **pravom** racionalnom funkcijom. U protivnom, imamo **nepravu** racionalnu funkciju.

Područje definicije racionalne funkcije je skup svih realnih brojeva osim realnih nultočki polinoma u nazivniku, Df = ***R*** \ {x1, x2…)

**Uvjeti za traženje domene funkcije**

**Iracionalne funkcije**

Ako se kao eksponent varijable pojavljuje i racionalan broj (razlomak).

**TRANSCENDENTNE FUNKCIJE**

1. Eksponencijalna funkcija
2. Logaritamska funkcija
3. Trigonometrijska funkcija
4. Ciklometrijske funkcije
5. Hiperbolne funkcije
6. Area funkcije

**Eksponencijalna funkcija**

****Neka je a > 0, a ≠ 1, f(x) = ax, strogo monotono (rastuća ili padajuća)

**Logaritamska funkcija**

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije. Y = logax. Logaritam nekog broja je eksponent kojim treba potencirati bazu (a) da bi se dobio taj broj, ay = x. y = lnx

**Trigonometrijske funkcije**

sin2x + cos2x = 1



1. **NIZOVI**

Funkciju f : ***N*** → A nazivamo **nizom** u skupu A. Ako je A ⊆ R onda je to **realni niz** ili niz realnih brojeva.

Funkcijsku vrijednost *f(n)* označavamo sa an i nazivamo **općim članom niza**. Niz je **zadan** ako je poznat njegov opći član.

**Konačni niz** – f : An → A, gdje je An = {1, 2, 3, …, n}

Niz je **monotono rastući** (uzlazan) ako je an ≤ an + 1

Niz je **strogo rastući** ako je an < an + 1

Niz je **monotono opadajući** (silazan) ako je an ≥ an + 1

Niz je **strogo opadajući** ako je an > an + 1

Niz je **odozgo ograničen** (**ograđen**) ako postoji M koji je element skupa **R** takav da je an ≤ M.

Svaki realni broj M ∈ ***R*** koji je veći (ili možda jednak) od svakog člana niza nazivamo **majorantom** niza. Najmanju majorantu nazivamo **supremum** niza i pišemo: sup an = M.

Niz je **odozdo ograničen** (**ograđen**) ako postoji m koji je element skupa **R** takav da je m ≤ an.

Svaki realni broj m ∈ ***R*** koji je manji (ili možda jednak) od svakog člana niza nazivamo **minorantom** niza. Najmanju minorantu nazivamo **infimum** niza i pišemo: inf an = m.

Za niz kažemo da je **ograničen** (ograđen) ako je ograničen i odozgo i odozdo.

**KONVERGENCIJA NIZA**

Svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži broj α – **okolina** tog broja.

Ako se broj α nalazi u sredini intervala, takvu okolinu nazivamo **simetričnom okolinom** ili ε **okolinom** oko broja α.

Za svaki realni broj x koji se nalazi u ε okolini broja α vrijedi: α – ε < x < α + ε ili .

Broj α u čijoj se svakoj simetričnoj okolini nalazi **beskonačno mnogo** članova niza, nazivamo **točkom gomilanja** ili **gomilištem** tog niza.

Broj α sa svojstvom da se u svakoj ma kako malenoj simetričnoj okolini broja α nalaze **gotovo svi** članovi niza, nazivamo **graničnom vrijednošću** ili **limesom** tog niza:

Ako niz ima **konačan limes**, niz je **konvergentan**, a u protivnom niz je **divergentan.**

Ako za niz vrijedi da je ili kažemo da je niz **divergentan u užem smislu**. S druge strane, niz je **divergentan u širem smislu** ako ima više gomilišta.

Svaki monotono rastući i odozgo ograničen niz je **konvergentan**. Svaki monotono opadajući i odozdo ograničen niz je **konvergentan**.

**ARITMETIČKI NIZ**

Niz kojem je svaki član (osim prvog) aritmetička sredina svog prethodnika i svog sljedbenika.

**GEOMETRIJSKI NIZ**

Niz kojem je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina svog prethodnika i svog sljedbenika.

(-1)n – više gomilišta

1. **REDOVI**

Neka je an niz realnih brojeva. Tada izraz oblika

a1 + a2 + … + an + … = nazivamo **beskonačnim redom.**

Za red kažemo da je **konvergentan** ako postoji limes niza njegovih parcijalnih suma. Taj limes nazivamo **sumom reda** [S]. Ako ova granična vrijednost ne postoji, kaže se da red **divergira**.

**Kriterij konvergencije reda**

Da bi red konvergirao je, nužno je, ali nije dovoljno da vrijedi:

**D'Alambertov kriterij** (faktorjel !)

α < 1 **konvergira**

α = 1 **nema odluke**

α > 1 **divergira**

**Cauchyjev kriterij** (nn)

α < 1 **konvergira**

α = 1 **nema odluke**

α > 1 **divergira**

1. **LIMES FUNKCIJE**

Kažemo da je *b* **granična vrijednost** ili **limes** funkcije y=f(x) kada x teži prema a (x → a) i pišemo .

**Jednostrani limes**

Definirani su za vrijednosti varijable koje prolaze realnim brojevima:

1. Samo manjim od a (x < a), i takav limes zovemo **lijevi limes** ili **limes s lijeva:**
2. samo većim od a (x > a), i takav limes zovemo **desni limes** ili **limes s desna:**

Limes funkcije za x=a postoji ako i samo ako je b1 = b2 ∈ ***R***

**Neprekidnost funkcije**

Realna funkcija *f* je **neprekidna** ili **kontinuirana** u točki a iz intervala područja definicije, ako i samo ako je njena granična vrijednost kada x teži a (x→a) jednaka vrijednosti funkcije za x = a.

Da bi funkcija bila neprekidna u točki a moraju biti ispunjena 3 uvjeta:

1. f(x) definirana u točki a, a ∈ *Df*
2. lijevi limes jednak je desnom limesu

sin 0 = 0

cos 0 = 1

sin2x + cos2x = 1

sin2x = 2sinxcosx

cos2x = cos2x – sin2x

1. **DERIVACIJA**

 – odnos promjene funkcije i promjene nezavisne varijable.

Derivacija funkcije u točki A jednaka je koeficijentu smjera tangente u toj točki.

*f* strogo rastuća na intervalu 〈a,b〉 ⇔ f'(x) > 0

*f* strogo padajuća na intervalu 〈a,b〉 ⇔ f'(x) < 0

**Pravila deriviranja**

1. [f(x)g(x)]'=f'(x)g'(x)
2. [f(x)\*g(x)]'=f'(x)\*g(x)+f(x)\*g'(x)
3. **LOGARITAMSKA DERIVACIJA**

Koristimo najčešće kod deriviranja funkcija koje sadrže varijablu x i u bazi i u eksponentu.(xx)

**Implicitno zadane funkcije**

Ako je funkcija zadana u implicitnom obliku F(x,y) = 0, njena derivacija se može odrediti na način da se deriviraju obje strane te jednakosti i dobivena jednadžba riješi po y'. Dobivena derivacija je tada najčešće funkcija i od x i od y.

**Tangenta i normala**

Vrijednost derivacije funkcije u točki T jednaka je koeficijentu smjera tangente na graf funkcije u toj točki.

t…y – y0 = y'(x0)(x – x0)

n…y – y0 = -(x -x0)

**L'Hospitalovo pravilo**

Kada ili

Ako postoji , onda postoji i i vrijedi

 \*samo kvocijent (dijeljenje)

 ln 0 =0

1. **EKSTREMI, ASIMPTOTE, GRAF FUNKCIJE**

**Ekstremi funkcija jedne varijable**

Pod pojmom ekstrema podrazumijeva se minimum ili maksimum neke funkcije.

Funkcija y = f(x) ima za x = x0 **lokalni minimum** ako postoji interval 〈a,b〉 koji sadrži točku x0 tako da vrijedi: **f(x0) ≤ f(x).**

Funkcija y = f(x) ima za x = x0 **lokalni maksimum** ako postoji interval 〈a,b〉 koji sadrži točku x0 tako da vrijedi: **f(x0) ≥ f(x).**

**Nužan uvjet** za egzistenciju maksimuma. f'(x0) = 0.

Ako funkcija y = f(x) ima maksimum za x = x0 tada je u toj točki vrijednost njene prve derivacije nula. Točke koje su rješenja jednadžbe f'(x0) = 0 nazivamo **stacionarnim točkama** funkcije f(x) i one su „kandidati“ za ekstrem funkcije f.

Da bi derivabilna funkcija y = f(x) imala za x = x0 ekstrem, nužno je dovoljno da vrijedi:

1. f'(x0) = 0
2. prva derivacija mijenja predznak prolazeći kroz x0.

Da bi funkcija y = f(x) imala ekstrem za x = x0 dovoljno je da vrijedi:

1. f'(x0) = 0
2. f''(x0) 0

Pri tome ako je f''(x0) < 0 funkcija ima **maksimum**, a ako je f''(x0) > 0, funkcija ima **minimum**.

 **Konkavnost, konveksnost i točke infleksije**

Funkcija f(x) je **konveksna** na intervalu 〈a,b〉 ako za svake dvije točke x1 i x2 vrijedi: f[αx1+(1-α)x2] ≤ αf(x1)+(1-α)f(x2), 0 ≤ α ≤ 1

Funkcija je **konkavna** na intervalu 〈a,b〉 u suprotnom slučaju:

f[αx1+(1-α)x2] ≥ αf(x1)+(1-α)f(x2), 0 ≤ α ≤ 1

**Točka infleksije** – točka u kojoj krivulja prelazi iz konkavnog u konveksni oblik ili obratno.

**Asimptote funkcije**

y = f(x) – ako se pod pretpostavkom da barem jedna koordinata teži prema +∝ ili -∝ graf promatrane funkcije približava tom pravcu.

1. **Vertikalna asimptota**

Pravac x = a je vertikalna asimptota funkcije y = f(x) ako vrijedi: . Pri tome, ako taj limes postoji samo kada x teži a slijeva ili samo kad x teži a zdesna govorimo o **desnoj**, odnosno **lijevoj vertikalnoj asimptoti**.

1. **Horizontalna asimptota**

Pravac y = b je horizontalna asimptota funkcije y = f(x) ako vrijedi: . Pri tome ako vrijedi , ali , pravac y = b je **desna horizontalna asimptota** i obrnuto.

1. **Kosa asimptota**

Pravac y = kx + l je kosa asimptota funkcije y = f(x) ako postoje limesi: i , gdje je *k* koeficijent smjera, a *l* odsječak na osi y te kose asimptote.

Funkcija **ne može** istovremeno imati i kosu i horizontalnu asimptotu.

 – gornja potencija veća od donje – **nema HORIZONTALNU asimptotu**

 – ima **HORIZONTALNU asimptotu**

1. **NEODREĐENI INTEGRAL**

Integriranje – inverz diferenciranju, svodi se na traženje funkcije čija je derivacija poznata.

Funkcija F(x) je **primitivna funkcija** funkcije f(x) u intervalu 〈a,b〉 ako je ispunjen uvjet F'(x)=f(x).

F(x) = i čita se **neodređeni integral** funkcije f(x).

Ako je u intervalu 〈a,b〉 funkcija F(x) primitivna funkcija funkcije f(x), tada je i funkcija F(x) + C, gdje je C proizvoljna konstanta, isto primitivna funkcija funkcije f(x).

**Metoda supstitucije**

Služi da integral transformiramo do jednostavnijeg integrala supstitucijom . Tada podintegralni izraz i postaje funkcija varijable t.

**Metoda parcijalne integracije**

Slijedi iz pravila za diferencijal umnoška funkcija: **d(uv) = udv + vdu**

1. **Određeni integral**

Određeni integral je granična vrijednost zbroja površina opisanih pravokutnika i predstavlja površinu ispod krivulje y = f(x) u granicama od x = a do x = b.

**Određeni integral** funkcije *f* u granicama od *a* do *b* jednak je razlici vrijednosti primitivne funkcije *F* funkcije *f* u gornjoj (*b*), odnosno donjoj granici (*a*):

