MATRIČNI RAČUN

1. Pojam i vrste matrice

Matrica je pravokutna shema elemenata poredanih u m redaka i n stupaca. Elemente matrice označavamo oznakom a_{ij} tako da i označava redak, a j stupac u kojem se nalazi dani elem.
Matricu najčešće zapisujemo u uglatim zagradama, ali može biti zapisano u: [ ], ( ), ‖ ‖.
a matricu koja ima m redaka i n stupaca kažemo da je reda ili formata (m,n) ili m×n i to zapisujemo:

$$A_{(m,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice su međusobno jednake ako vrijedi: 1) istog su formata

2) $a_{ij} = b_{ij}$ za svaki $i \in \{1,2,\ldots m\}$; $j \in \{1,2,\ldots n\}$

Vrste matrica su:

Kvadratna matrica - ima jednaki broj redaka i stupaca, m = n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- glavna dijagonala kvadratne matrice sastavljena je od elemenata s istim indeksima

Dijagonalna kvadratna matrica - svi elementi izvan glavne dijagonale su jednaki nuli
Skalarna dijagonalna matrica - -||- i svi elementi na glavnoj dijagonali su jednaki
Jedinična skalarna matrica - -||- elementi na glavnoj dijagonali su jednaki 1
Nul matrica - svi elementi su jednaki nuli, ne mora biti kvadratna
Gornja trokutasta kvadratna matrica - svi elementi ispod glavne dijagonale su jednaki nuli
Donja trokutasta kvadratna matrica - svi elementi iznad glavne dijagonale su jednaki nuli
Transponirana matrica - transponiranu matricu A^T neke matrice A dobijemo tako da zamijenimo retke odgovarajućim stupcima matrice;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Simetrična kvadratna matrica - ako vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$; $j, i \in \{1,2,3\ldots n\}$, tada vrijedi $A = A^T$.

2. Zbrajanje matrica i svojstva. Množenje matrica sa skalarom.

Zbrajati/oduzimati se mogu samo matrice istog formata i rezultat je matrica istog formata

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Svojstva zbrajanja matrica: 1) $A+B=B+A$ komutativnost 3) $(A+B)+C = A+(B+C)$ asocijativnost

2) $A+0=0+A$ 4) $(A+B)^T = A^T + B^T$

Neka je $\lambda \in R$ i $A_{(m,n)} = [a_{ij}]$ matrica formata $m \times n$. Matrica se množi sa skalarom, tj. ako njen element pomnoži s tim skalarom, tj

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & 5\lambda & 6\lambda \\ 3\lambda & 2\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

3. Množenje matrica i svojstva

Matrice se mogu množiti samo ako prva od njih ima onoliko stupaca koliko druga ima redaka (to je tzv. ulančane matrice), pri čemu kao rezultat dobivamo matricu koja ima redaka kao prva i stupaca kao druga matrica

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$$ $\forall$ i-ti redak matrice A množi se j-tim stupcem B matrice

Svojstva množenja matrica:
1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ asocijativnost

2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

3) $A \cdot I = I \cdot A = A$ A je kvadratna matrica

4) $A \cdot O = O \cdot A$

5) $(A + B) \cdot C = AC + BC$
$C(A + B) = CA + CB$ distributivnost

6) $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1}$ $n \geq 2$

4. Pojam determinante. Laplaceov razvoj determinante

Determinanta je funkcija koja preslikava skup kvadratnih matrica M_n u skup realnih brojeva, tj
$\det : M_n \to R$

Označava se kao:
$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$
a definirana je formulom $\det A = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots$ gdje drugi indeksi prolaze sve permutacije brojeva 1, ..., n, a predznak +/- ovisi o tome je li permutacija parna ili neparna

Determinanta bilo kojeg reda može se jednostavnije izračunati primjenom **Laplaceovog razvoja** po formulama:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$ po i-tom retku (i fiksan, j se mijenja)

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$$ po j-tom stupcu

A_{ij} - algebarski komplement ili kofaktor elem. a_{ij}

Što znači da je determinanta neke matrice jednaka sumi umnožaka elemenata nekog retka (ili stupca) i njihovih algebarskih komplemenata

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$! $A_{ij} = M_{ij}$ $i+j$ parno, $A_{ij} = -M_{ij}$ $i+j$ neparno

M_{ij} - minor ili subdeterminanta $(n-1)$-og retka, dobije se tako da se iz matrice ispusti i-ti redak i j-ti stupac i izračuna se determinanta preostale matrice

čunanje determinante matrice 2.reda. Sarrusovo pravilo.

erminanta matrice 2 reda izračunava se tako da se od umnoška elemenata na glavnoj dijag dizme umnožak elemenata na sporednoj dijagonali.

eterminante 3 reda se mogu računati po Sarrusovom pravilu. Račun se provodi tako da se s desne strane determinante dopišu 1. i 2. stupac i zatim se s predznakom + računaju umnošc na glavnoj dijagonali i njoj paralelnim pravcima, a s predznakom - umnošci elemenata na sporednoj dijagonali i njoj paralelnim pravcima.

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

6. Svojstva determinanti.

1) Determinanta se množi nekim brojem tako da se tim brojem pomnože svi elementi jednog njenog retka ili stupca.

2) Ako je $B = k \cdot A$, $k \in R$, a A kvadratna matrica n-tog reda tada je $\det B = k^n \det A$

3) Transponirana i početna matrica, ako su kvadratne, imaju jednake determinante

4 Binet-Cauchyev teorem $\det A \cdot B = \det A \det B$, kvadratne matrice istog reda

5 Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi nekog njenog retka ili stupca jednaki nuli

6 Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na glavnoj dijagonali.

7 Determinanta je jednaka nuli ako su dva retka (ili stupca) te determinante jednaki ili linearno zavis

8 zamjene li 2 retka (ili stupca) svoje mjesto determinanta mijenja predznak.

9) Vrijednost determinante se ne mijenja ako elementima nekog retka (ili stupca) dodamo odgovarajući elemente nekog drugog (ili retka) pomnožene s nekim brojem

7. Regularna i singularna matrica. Inverzna matrica. Svojstva inverzne matrice.

Ako za kvadratnu matricu vrijedi $\det A \neq 0$, onda je to regularna matrica, a ako vrijedi $\det A = 0$, nda je to singularna matrica.

Samo za regularne matrice možemo definirati inverznu.

eka je A regularna matrica. Matricu B za koju vrijedi $AB = BA = I$ gdje je I jedinična matrica istog re zovemo inverznom matricom matrice A i označavamo s A^{-1}

Svojstva inverzne matrice
1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
3) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

8. Računanje inverzne matrice: preko adjunkte i Gauss-Jordanovom inverzijom.

nverzna matrica se može računati pomoću relacije: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$ gdje je A^* adjunkta ili adjungirana matrica matrice A, odnosno transponirana matrica čiji elementi su algebarski komplementi matrice A

nverzna matrica se može izračunati primjenom elementarnih transformacija istodobno na matrici A i jediničnoj matrici I

Elementarne transformacije se vrše samo na retcima tih matrica. Pomoću tih transformacija matrica se prevodi u jediničnu, a jedinična u inverznu matricu A^{-1}. Takav postupak se zove Gauss Jordanov postupak inverzije.

npr.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2I + II \\ -4I + III \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 9 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -19 & 13 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$\vdots$

9. Rang matrice – pojam i svojstva (elementarne transformacije)

Matrica A ima rang r, i pišemo $R(A)=r$, ako su sve njene subdeterminante (minori) reda većeg od r jednake nuli, ali postoji barem jedna njena subdeterminanta različita od nule.

Svojstva ranga matrice su:
1) rang matrice se ne mijenja ako se u njima izvrši bilo koja permutacija retka ili stupca
2) rang matrica se ne mijenja ako bilo koji redak ili stupac pomnožimo brojem različitim od nule
3) rang matrica se ne mijenja ako nekom retku ili stupcu dodamo neki drugi redak ili stupac pomnožen s nekim brojem

Ovim elementarnim ~~funkcijama~~ transf. svodimo rang matricu u Jordanov oblik, tj. u matricu koja na glavnoj dijagonali ima određeni broj jedinica, a svi ostali elementi su nule.

10. Sustav linearnih jednadžbi: opći i matrični zapis. Pravokutni i kvadratni sustav, homogeni sustav, proširena matrica sustava.

Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica u općem obliku zapisati:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Neka je A matrica formata (m,n) u kojoj prvi redak tvore koeficijenti nepoznanica iz prve jednadžbe, drugi redak iz druge i tako dalje. Matricu A zovemo matricom koef. danog sustava linearnih jednadžbi. Matrica B je jednostupčana matrica slobodnih članova, tj. realnih brojeva, s desne strane jednadžbi. Matrica X je jednostupčana matrica (vektor) nepoznanica.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

broj jednadžbi (m) različit od broja nepoznanica, sustav zovemo pravokutnim. Ako je $m=n$, ako je matrica kvadratna, sustav je kvadratni.

Ako je vektor slobodnih članova nul-vektor, tj. $B=0$, odnosno sustav ima oblik $AX=0$, onda taj sustav zovemo homogeni sustav. Takav sustav ima uvijek barem još jedno rješenje (nul-vektor je jedno rješenje i to rješenje zovemo trivijalno rješenje). Proširena matrica sustava nastaje tako da matrici A dodamo kao posljednji stupac matricu B, tj. stupac slobodnih članova:

$$(A,B)=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

11. Capelli - Kroneckerov teorem

Da bi sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica imao rješenje nužno je i dovoljno da matrica sustava A i proširena matrica sustava (A,B) imaju jednaki rang, tj. $r(A)=r(A,B)=r$. U protivnom sustav nije konzistentan, tj. nema rješenje. Ako je rang sustava jednak broju nepoznanica ako je $r=n$, onda sustav ima samo jedno rješenje. Ako je $r=n$ i $B=0$ to rješenje je trivijalno, tj. $x_1=x_2=x_3 \dots x_n=0$. Ako je rang sustava manji od broja nepoznanica, tj. ako je $r<n$ onda sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

12. Cramerov sustav. - pojam i metode rješavanja: matrično i pomoću Cramerove formule.

Ako je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica i ako je matrica sustava A regularna, sustav linearnih jednadžbi zovemo Cramerovim sustavom.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_n + a_{n2}x_n \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

a) Matrično rješavanje jednadžbe

$A^{-1} / AX=B \Rightarrow X=A^{-1} \cdot B$

Budući da je matrica sustava kvadratna i regularna postoji inverzna matrica A^{-1} pa sustav linearnih jednadžbi $AX=B$ možemo riješiti kao matričnu jednadžbu množenjem s inverznom slijeva i to daje traženo jedinstveno rješenje danog sustava.

b) Cramerova formula

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A},\ i\in\{1,2\dots n\}$$

gdje je A_i matrica koja se dobije kada se u matrici sustava A i-ti stupac zamijeni stupcem slobodnih čla[nova]

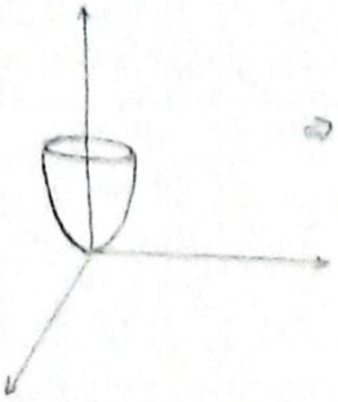
13. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi Gaussovom i Gauss-Jordanovom metodom eliminacije

Dva sustava su ekvivalentna ako imaju ista rješenja. Neki sustav prevodimo u njemu ekvivalentan sustav elementarnim transformacijama nad jednadžbama sustava, tj.

1) permutacijom (zamjenom mjesta) dviju jednadžbi
2) množenjem jednadžbe brojem različitim od nule
3) dodavanjem neke jednadžbe neku drugu jednadžbu pomnoženu nekim brojem
4) reduciranje broja jednadžbi (izbacuje se ona koja se može dobiti kao linearna kombinacija ostalih)

1. Funkcije dviju i više varijabli. Homogenost.

Kao funkcije dviju varijabli, proučavamo samo realne funkcije. Funkcija od n varijabli $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ obično se označava $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Funkcija od n varijabli za sliku ima neku plohu u prostoru dimenzija n+1. Najpoznatiji primjer funkcije dviju varijabli je zbrajanje realnih brojeva $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pri čemu je $f(x,y) = x + y$; x i $y \in \mathbb{R}$. Graf funkcije dviju varijabli je neka ploha u prostoru $\mathbb{R}^3$.



⇒ rotacioni paraboloid: $z = y^2 + x^2$

Za funkciju od n varijabli $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je homogena stupnja homogenosti α ako vrijedi: $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^{\alpha} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Točnije, ako je $\alpha = 1$ funkcija je linearno homogena, a za $\alpha = 0$ funkcija je nultog stupnja homogenosti (njena vrijednost ostaje nepromijenjena ako joj se svaka varijabla pomnoži s tim faktorom).
Homogene funkcije jedne varijable imaju oblik $y = a \cdot x^{n}$, gdje je n njihov stupanj homogenosti.

2. Prve i druge parcijalne derivacije funkcija dviju varijabli

Ako funkcija dviju varijabli ima limes (stalnu graničnu vrijednost), kažemo da ta funkcija ima parcijalnu derivaciju po prvoj varijabli x, a broj dobiven računanjem $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$ naziva se parcijalna derivacija funkcije f u točki $P(x_0, y_0)$ i to se označava $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\|-$ ⇒ I parcijalna derivacija

2. parcijalne derivacije nastaju kao derivacije prvih parcijalnih derivacija, iz čega slijedi

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Mješovite parcijalne derivacije drugog reda dobivamo tako da funkciju prvo deriviramo po jednoj, pa novu funkciju po drugoj varijabli. $z_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ analogno $z_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Schwarzov teorem koji kaže ako funkcija $z = f(x,y)$ ima u okolini točke $P(x_0, y_0)$ prve i druge parcijalne derivacije, pri čemu su mješovite parcijalne ~~mješovite~~ derivacije u toj točki neprekidne, tada vrijedi: $z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0)$

3. Ekstremi funkcija dviju varijabli

Da bi funkcija dviju varijabli $z = f(x,y)$ imala lokalni ekstrem u točki $P(x_0, y_0)$, nužno je da vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = z_x(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z_y(x_0, y_0) = 0$$

funkcije jedne varijable u toj točki imaju ekstreme, a da bi imale ekstrem njihove prve derivacije moraju biti jednake nuli

Te relacije formiraju sustav 2 jednadžbi s 2 nepoznanice čija rješenja su stacionarne točke funkcije tj. točke u kojima funkcija možda ima ekstreme. Dovoljni uvjeti temelje se na Taylorovoj formuli, a da bi smo ispitali karakter i egzistenciju ekstrema funkcije dviju varijabli pratimo postupak:

→ NASTAVAK EKSTREMA

1) Odredi stacionarne točke iz sustava jednadžbi $\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$

2) Odredi parcijalne derivacije drugog reda i njihove vrijednosti u radnim stacionarnim točkama:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=A \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)=B \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=C$$

3) Formirajte determinantu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

→ ako je $\Delta > 0$, onda funkcija $z=f(x,y)$ u promatranoj stacionarnoj točci $P(x_0,y_0)$ ima lokalni ekstrem, uz to ako je $A>0$ onda se radi o minimumu, a ako je $A<0$ onda je riječ o maksimumu

→ ako je $\Delta < 0$, funkcija nema ekstrem

→ ako je $\Delta = 0$, onda za odluku o ekstremu se trebaju vršiti dodatna ispitivanja

$\boxed{4.}$ Relativni (uvjetni) ekstremi funkcija dviju varijabli

Tada tražimo ekstreme funkcije $z=f(x,y)$, ali ne na cjelokupnom području definicije te funkcije (D_z) već na nekom njegovom podskupu $S \subseteq D_z$, te ekstreme nazivamo relativnim ili vezanim ekstremima. Najčešće je skup S definiran nekim ograničenjima, ali mi se zadržavamo na $m=1$, što znači da je skup definiran samo jednim ograničenjem $g(x,y)=0$.
Ako je funkcija g jednostavna onda problem rješavamo tako da iz nje eksplicitno izrazimo y (ili x) i uvrstimo u funkciju $z=f(x,y)$, čime se problem svodi na pronalaženje ekstrema funkcije jedne varijable.
Ako iz ograničenja nije moguće izraziti jednu varijablu, problem rješavamo formiranjem Lagrangeove funkcije $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$, gdje je λ Lagrangeov multiplikator.
Nadalje tražimo ekstreme funkcije $F(x,y,\lambda)$. Nužni uvjeti svode se na rješavanje sustava od tri jednadžbe

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=g(x,y)=0$$

Rješenje sustava je jedno ili više rješenja i funkcija $z=f(x,y)$ ima eventualno u točki $T(x_0,y_0)$ ekstrem. Pitanja karaktera i egzistencije odgovaramo rješavanjem drugog diferencijala Lagrangeove funkcije $d^2F(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2$ gdje za diferencijale vrijedi: $(dx)^2+(dy)^2 \neq 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy=0$$

Ako je drugi diferencijal $d^2F(x,y)>0$, naša funkcija ima relativni minimum, a ako je manji od nule funkcija ima relativni maksimum.
Ako je determinanta Δ za funkciju $f(x,y)$ pozitivna, funkcija u toj točki ima uvjetni ekstrem:

$$AC-B^2=F_{xx}(x_0,y_0)\cdot F_{yy}(x_0,y_0)-F_{xy}^2(x_0,y_0)>0$$

Ako je $A>0$, funkcija ima uvjetni minimum, a ako je $A<0$ funkcija ima uvjetni maksimum

5. Pojam, red, stupanj, rješenje diferencijalne jednadžbe. Diferencijalne jednadžbe sa separabilnim varijablama

Diferencijalne jednadžbe su funkcionalne jednadžbe u kojima se pojavljuje jedna ili više derivacija (ili diferencijala) neke nepoznate funkcije.
Ako te jednadžbe sadrže derivacije po samo jednoj varijabli onda su to obične diferencijalne jednadžbe, a ako sadrže derivacije po više varijabli onda su to parcijalne diferencijalne jed.
Red diferencijalne jednadžbe je red derivacije najvišeg stupnja koja je u njoj sadržana, a stupanj diferencijalne jednadžbe je eksponent derivacije najvišeg reda.

npr $\quad 2y'' + y\,y'^2 + 3 = 0 \quad$ obična, drugog reda (y'') i prvog stupnja (y''^1)

Svaku diferencijalnu jednadžbu prvog reda i stupnja može se zapisati u obliku:

$$f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = 0$$

Ako se varijable mogu odijeliti/separirati da dobijemo $g_1(y)dy = g_2(x)dx$ tada integriranjem ćemo dobiti rješenje tj nepoznatu funkciju $y = y(x)$. Rješenje separabilne diferencijalne jednadžbe u sebi sadržaje konstantu C i to rješenje zovemo opće ili generalno, a ako je za nepoznatu funkciju zadan uvjet, dobivamo posebno ili partikularno rješenje.

6. -II- Homogene diferencijalne jednadžbe

Diferencijalna jednadžba $f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0$ je homogena ako su f_1 i f_2 homogene funkcije istog stupnja homogenosti.
Homogena diferencijalna jednadžba se može zapisati u obliku: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ i svesti na na dif jed sa separabilnim varijablama: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = z\,x \rightarrow y' = z + xz'$

7. -II- Linearne diferencijalne jednadžbe

Ukoliko se diferencijalna jednadžba može zapisati kao $y' + f(x)y = g(x)$ zovemo je linearna diferencijalna jednadžbom. Opće rješenje te jednadžbe se može dobiti izravno formulom:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x)\,dx + C\right]$$

ili metodom varijacije konstante

8. Funkcija potražnje. Funkcija ponude. Ravnoteža (ekvilibrij) ponude i potražnje.

Potražnja je funkcija različitih varijabli. Zato što najčešće promatramo individualnu potražnju ili potrošnju određenog tipa kućanstva za potrošnim dobrima koja nemaju trajnu vrijednost (non durable consumer goods) u razmatranje uzimamo: p - cijenu dobra
$p_1, p_2 \ldots$ - cijene povezanih dobara (supstituti, komplementi)
K - dohodak potrošača
t - vrijeme

Za potražnju se koriste simboli d (demand) i q (quantity). Funkcija potražnje glasi: $q = f(p, p_1, \ldots, t, K)$
Potražnja u užem smislu je funkcija cijene: $q = f(p)$. Ona iskazuje zavisnost potraživane količine dobra o cijeni samog dobra, c.p.

$$q' = \frac{dq}{dp} < 0 \Rightarrow \text{potražnja je obrnuto proporcionalna cijeni}$$

Funkcija potražnje se u užem smislu aproksimira funkcijama

2. $q = \frac{1}{ap+b}$ 4. $q = \frac{a-\sqrt{p}}{b}$ 6. $q = \frac{b}{p^2} + c \quad a>0$ 8. $q = p^a \cdot e^{-b(p+c)}$

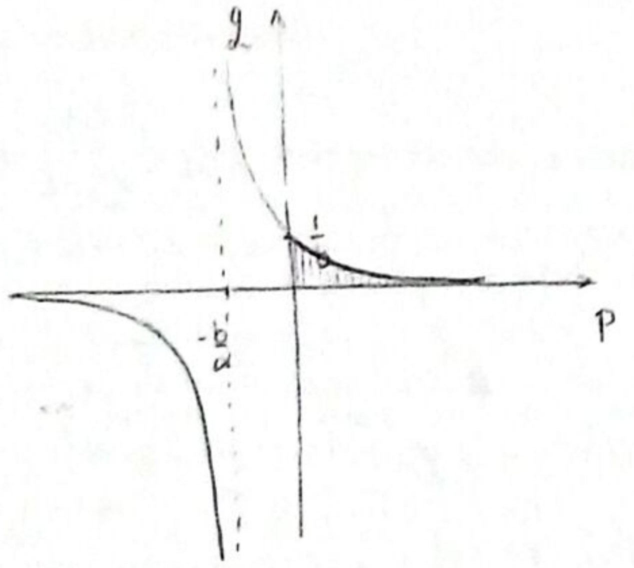
gdje su a, b i c pozitivne realne konstante za neko vremensko razdoblje. Svakoj funkciji odgovara krivulja u prvom kvadrantu (jer nas p i q zanimaju samo kao pozitivne veličine).

npr. $q = \frac{1}{ap+b}$ 1/0 nema nul-točaka

$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{ap+b} = 0$ horizontalna asimptota = 0 ($p \to \infty / x \to \infty$)

$p = -\frac{b}{a}$ vertikalna asimptota

$p=0 \quad q = \frac{1}{b}$

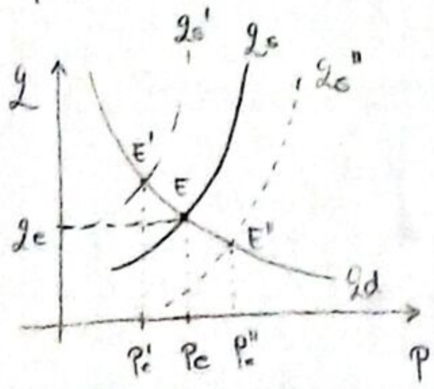


$q' = \frac{-a}{(ap+b)^2}$

Područje varijabiliteta cijene i količine je
$p\ [0, +\infty\rangle \quad q = \langle 0, \frac{1}{b}]$

Ponuda nekog dobra je količina tog dobra koja se iznosi na tržište, a ovisi o cijeni dobra, troškovima proizvodnje, cijeni povezanih dobara, te organizaciji tržišta. Razlikujemo individualnu ~~potražnju~~ ponudu kao ponudu pojedinačnog proizvođača (poduzeća), te agregatnu ponudu kao sumu individualnih ponuda određenog dobra. Funkcija ponude u užem smislu glasi $q = f(p)$ koja iskazuje zavisnost ponuđene količine o cijeni dobra. Ponuda je rastuća funkcija cijene: $q' = \frac{dq}{dp} > 0$. Označava se slovom s (supply).

Tržišna ravnoteža ili ekvilibrij nastaje kada je potražnja Q_d za nekim dobrom jednaka ponudi Q_s tog dobra. Cijena pri kojoj se ostvaruje ravnoteža zove se ravnotežna ili ekvilibrij cijena. Grafički ravnoteža se prikazuje sjecištem krivulja ponude i potražnje, gdje je ravnotežna cijena p_e, a ravnotežna količina q_e



$\boxed{9.}$ Elastičnost - koeficijent elastičnosti. Elastična i neelastična veličina. Jedinična elastičnost.

Elastičnost podrazumijeva sposobnost veličine da više ili manje intenzivno reagira na promjenu neke druge veličine koja je s njom u međuzavisnosti. Što je ekonomska veličina elastičnija, to je njena reakcija intenzivnija.

$E_{y,x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot y'$ ⇒ pokazuje za koliko se postotaka približno promijeni veličina y kada x poraste za 1% ⇒ koef. elastičnosti

Ako neka ekonomska veličina y ima koef. elastičnosti u odnosu na neku drugu veličinu x po apsolutnoj vrijednosti veći od 1, tj. $|E_{yx}|>1$ ($E_{yx}<-1$ ili $E_{yx}>1$) kažemo da je ta veličina elastična ⇒ promjena x-a za 1 % izaziva promjenu (rast ili pad) y-a za više od 1 %.

Veličina y je u nekoj točki savršeno elastična kada je u toj točki $E_{yx}=\pm\infty$.

Ako je $|E_{yx}|<1$, tj. $-1<E_{yx}<1$, veličina y je neelastična prema promjeni x-a.

Ako je $E_{yx}=0$, y je savršeno neelastična (u svim točkama gdje je $y'=0$, što znači u stacionarnim točkama funkcije $y=f(x)$)

Ako je $|E_{yx}|=1$, veličina y je jedinično elastična.

$\boxed{10.}$ Nužno, luksuzno, inferiorno dobro.

x - dohodak y - izdaci za neko dobro

Za svako dobro za koje je $0<E_{yx}<1$, gdje x označava dohodak potrošača, a y izdatke za to dobro, kažemo da je to dobro nužno dobro. Njihova potrošnja porastom dohotka raste, ali ne u velikom postotku u odnosu na rast dohotka.

Za ona dobra za koja vrijedi $E_{yx}>1$, tj. za koja porast dohotka znači relativno veći porast izdatka kažemo da su luksuzna dobra.

Inferiorna dobra su ona dobra za koja postoji ne samo relativni, već apsolutni pad potrošnje u slučaju porasta dohotka, tj. za koje vrijedi $E_{yx}<0$.

FINANCIJSKA MATEMATIKA

① Kamate i kamatna stopa. Dekurzivno i anticipativno ukamaćivanje. Jednostavno i složeno ukamaćivanje.

Kamata je naknada koju dužnik plaća za posuđenu glavnicu. Glavnica je određena svota novca. Kamate se uvijek obračunavaju za neki ~~osnovni~~ vremenski interval koji nazivamo razdoblje ukamaćivanja ili razdoblje kapitalizacije.

Kamatna stopa ili kamatnjak je iznos koji se plaća za 100 novčanih jedinica za neki osnovni vremenski interval. Oznaka za kamatnu stopu je p (percent).

Dekurzivno obračunati kamate znači izračunati kamate na posuđeni iznos i isplatiti ili pribrojiti iznosu na kraju vremenskog razdoblja. (p)

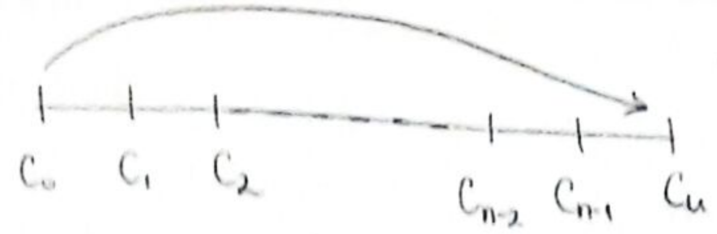
Anticipativno obračunati kamate znači obračunati ih unaprijed za neko vremensko razdoblje pri čemu se kamate obračunavaju na konačnu vrijednost zadanog iznosa. (q)

Jednostavno ukamaćivanje je slučaj kod kojeg se kamate obračunavaju uvijek na početnu vrijednost glavnice (C_0), a kod složenog ukamaćivanja kamate se u svakom sljedećem razdoblju obračunavaju na prethodnu vrijednost uvećanu za kamate.

② Konačne vrijednosti jedne svote. Ekvivalentni ili preformulacijski kamatnjak. Početne (sadašnje) vrijednosti jedne svote.

Dekurzivno ukamaćivanje

↳ pretpostavimo da je u banku uložena glavnica C_0 uz složeno ukamaćivanje i dekurzivan obračun kamate po stopi p



$$C_n = C_0\underbrace{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

dekurzivni kamatni faktor (r)
- vrijednost jedne novčane jedinice zajedno sa složenim kamatama na kraju jednog razdoblja

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

- potencije kamatnog faktora mogu se pronaći u prvim financijskim tablicama (I_p^n)

$$C_n = C_0 \cdot I_p^n$$

Anticipativno ukamaćivanje

$$C_n = C_0 \underbrace{\left(\frac{100}{100-q}\right)^n}$$

anticipativni kamatni faktor (ρ)

$$C_n = C_0 \cdot I_q^n$$

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n$$

Ekvivalentni kamatnjak

Želimo li dekurzivnim ukamaćivanjem dobiti jednaku konačnu vrijednost (jednaki iznos ukupnih kamata) kao i anticipativnim, moramo povećati dekurzivni kamatnjak p.

$$\cancel{C_0} \cdot r^n = \cancel{C_0} \cdot \rho^n$$

$$1+\frac{p}{100} = \frac{100}{100-q} \Rightarrow p = \frac{100 \cdot q}{100-q} \quad \text{ekvivalentni dekurzivni kamatnjak}$$

U obrnutom slučaju:

$$q = \frac{100 \cdot p}{100+q} \quad \text{ekvivalentni anticipativni kamatnjak}$$

Početna vrijednost i rok

Ako želimo znati koliku vrijednost moramo danas uložiti u banku da bi na kraju određenog razdoblja imali neki iznos, tj. ako želimo izračunati početnu (sadašnju) vrijednost jednog iznosa (diskontirati ga) koji uz kamatnu stopu p naraste zajedno sa složenim kamatama na neki iznos C_n, koristimo formule:

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} = \frac{C_n}{r^n} = C_n \cdot II_p^n \quad \text{dekurzivna kapitalizacija}$$

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(\frac{100}{100-q}\right)^n} = \frac{C_n}{\rho^n} = C_n \cdot II_q^n \quad \text{anticipativna kapitalizacija}$$

(3) Nominalni, relativni i konformni kamatnjak.

Propisana kamatna stopa za osnovno vremensko razdoblje naziva se nominalna ili zadana kamatna stopa.

Osnovni vremenski interval na koji se odnosi kamatna stopa ne mora uvijek biti jednako intervalu kapitalizacije. n_1 je vremenski interval na koji se odnosi zadana kamatna stopa, a n_2 je interval u kojem se obračunavaju kamate.

$m = \frac{n_1}{n_2}$ m je broj koji pokazuje koliko se puta u toku osnovnog vremenskog intervala obračunavaju kamata

Ako je $n_1 > n_2$, onda govorimo o ispodgodišnjem ukamaćivanju, što znači $m > 1$.

Ako je $n_1 < n_2$, nominalna kamata je zadana za razdoblje kraće od razdoblja ukamaćivanja, pa je

★ sa dužeg na kraće razdoblje ⇒ niža kamata

sa kraćeg na duže razdoblje ⇒ viša kamata

Neka je p kamatna stopa za neko razdoblje n_1, a pripis kamata neka se vrši u nekom razdoblju n_2 kamatnjak $p_r = \frac{p}{m}$ nazivamo relativni ili proporcionalni kamatnjak, koji se odnosi na vremenski interval n_2.

Ako je $m > 1$, tada je relativni kamatnjak manji od nominalnog. dobije se jednostavnim dijeljenjem nominalnog kamatnjaka s brojem koji pokazuje koliko se puta vrši pripis kamata u toku osnovnog vremenskog intervala.

npr. $p_{god} = 24$

$p_{\frac{1}{2}} = 12 \quad p_{\frac{1}{4}} = 6 \quad p_{\frac{1}{12}} = 2$

Problem relativnog kamatnjaka je u tome da za različita obračunska razdoblja u toku istog vremenskog intervala, dobivaju se različiti iznosi ukupnih kamata.

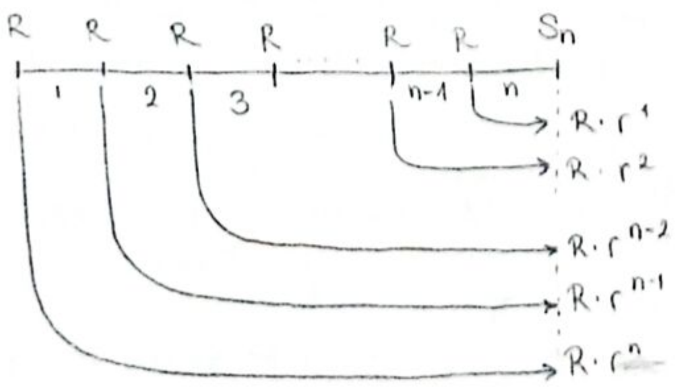
Kada bi smo željeli preračunati nominalnu kamatnu stopu p u takvu kamatnu stopu p' kojom će se, češćom ili rjeđom kapitalizacijom u nekom drugom vremenskom intervalu, ostvariti jednaki iznos kamata, pa samim time i jednaka konačna vrijednost. Takav kamatnjak se zove konformni kamatnjak i označava se s p'.

$$p' = 100 \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \text{ dekurzivno} \qquad q' = 100 \left(1 - \left(\frac{100-q}{100} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \text{ anticipativno}$$

4. Konačne vrijednosti više periodičkih svota

- više jednakih svota se uplaćuje u jednakim vremenskim intervalima kroz n razdoblja

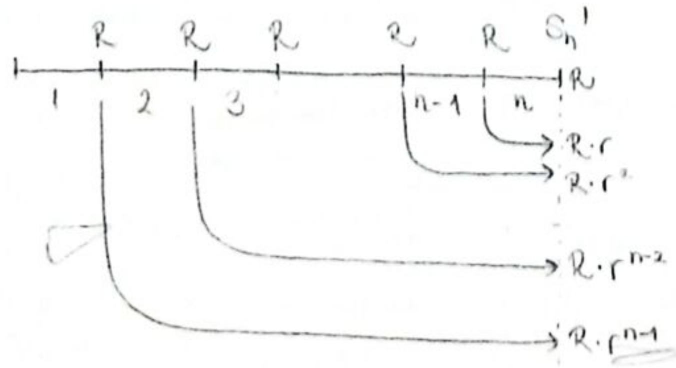
Prenumerando - uplate/isplate na početku razdoblja



$$S_n = R\underbrace{(r + r^2 + \ldots r^{n-2} + r^{n-1} + r^n)}_{\text{suma prvih n članova geometrijskog niza s prvim članom } a_1 = r \text{ i } q = r}$$

$$S_n = R \cdot r \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad S_n = R \cdot III^n_p$$

Postnumerando - uplate/isplate na kraju razdoblja



$$S_n' = R\underbrace{(r + r^2 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1})}_{\text{suma prvih članova u geometrijskom nizu s prvim članom } a_1 = 1 \text{ i } q = r}$$

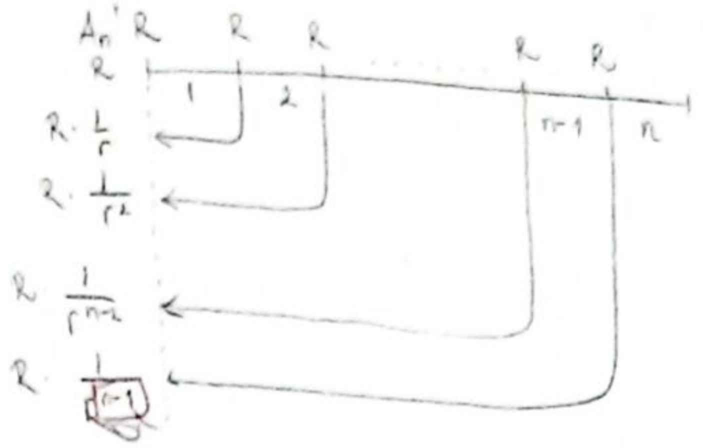
$$S_n' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad S_n' = R\left(III^{n-1}_p + 1\right)$$

Veza između prenumerando i postnumerando uplata/isplata: $S_n = S_n' \cdot r$

5. Sadašnje vrijednosti više periodičnih svota.

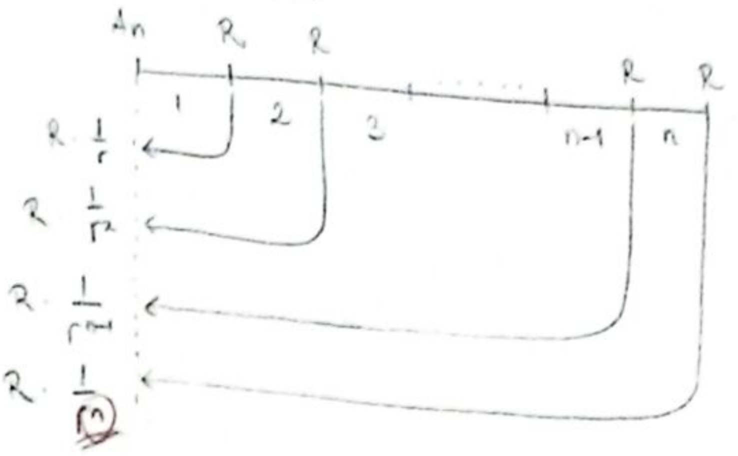
Više jednakih svota R koje se javljaju u jednakim vremenskim razmacima zamjenjujemo sada jednom svotom koja dospijeva odmah, tj. izračunavamo im sadašnju vrijednost.

Prenumerando



$$A_n' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} \qquad A_n' = R \cdot \left(IV_p^{n-1} + 1 \right)$$

Postnumerando



$$A_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r-1)} \qquad A_n = R \cdot IV_p^n$$

6. Vječna renta. Kontinuirana (neprekidna) kapitalizacija.

Renta je obična periodična isplata. Želimo li pak da broj tih renti bude beskonačan, tj. želimo li na osnovu naše uplate u banci primati vječnu rentu, s matematičkog stajališta treba izračunati graničnu vrijednost. Au kada broj n teži u beskonačno.

$$C_0 = \lim_{n\to\infty} a \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = \frac{a}{r-1} \lim_{n\to\infty} \frac{r^n - 1}{r^n} = \frac{a}{r-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1} = \frac{a}{r-1} \quad \text{postnumerando}$$

$$C_0' = \frac{a \cdot r}{r-1} \quad \text{prenumerando}$$

Ukoliko se kapitalizacija odvija neprekidno, tj. ako između dva obračuna kamata i njihovog pribrajanja kapitalu nema vremenskog diskontinuiteta, govorimo o kontinuiranoj/neprekidnoj kapitalizaciji. Nju dobijemo kada $m \to \infty$, prema tome:

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{np}{100}} \quad \text{konačna vrijednost}$$

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\frac{np}{100}} \quad \text{početna vrijednost}$$

↳ najčešće se koristi za računanje prirasta drveća

7. Otplata zajma jednakim anuitetima uz dekurzivni obračun kamata.

Zajam je novac koji se odobrava na temelju ugovora između zajmodavca i zajmoprimca ili korisnika zajma. Ugovorom se utvrđuje iznos zajma, kamatna stopa, vrijeme i način otplate zajma. Zajam se otplaćuje anuitetima. Anuitet je periodični iznos koji se plaća korisnik zajma, a sastoji se od:

- otplatne kvote - dio kojim se otplaćuje nominalni iznos zajma
- kamata

→ Ako se zajam otplaćuje u jednakim anuitetima, osnovne pretpostavke kojima se koristimo su:

- obračun kamata je složen i dekurzivan

- razdoblje ukamaćivanja jednako je jedinica vremenskog dospijeća između anuiteta
- kamatna stopa je konstantna

C - visina zajma

a - anuiteti

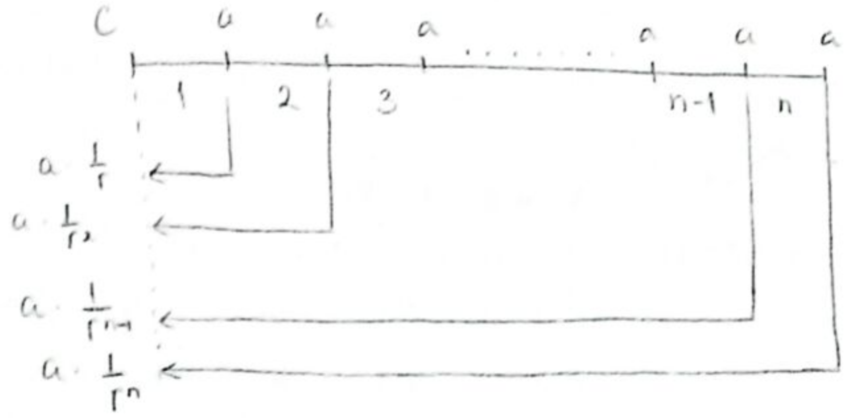
I_k - kamate na kraju k-tog razdoblja

R_k - otplatna kvota na kraju k-tog razdoblja

C_k - ostatak duga na kraju k-tog razdoblja

p - konstantna kamatna stopa

Zajam C moramo otplatiti u jednakim postnumerando anuitetima uz konstantnu kamatnu stopu p. Taj zajam mora biti jednak sadašnjoj vrijednosti n postnumerando anuiteta.



$$C = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} = a \cdot IV_p^n$$

$$a = C\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = C \cdot V_p^n$$

Otplatu zajma možemo prikazati i tablicom:

k	a	I_k	R_k	C_k
0	/	/	/	C_0
1	a	I_1	R_1	C_1
2	a	I_2	R_2	C_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
				0
Σ	$n \cdot a$	$\sum_{k=1}^{n} I_k$	$\sum_{k=1}^{n} R_k$	/

$$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$$

$$I = n a - C$$

ukupne kamate

$$R_k = a - I_k$$

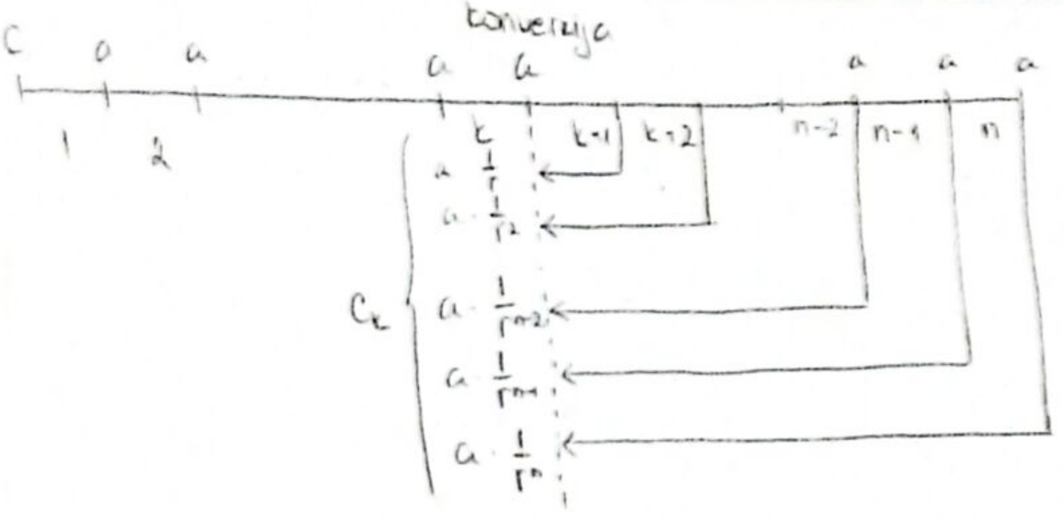
$$C_k = C_{k-1} - R_k$$

* posljednja otplatna kvota mora biti jednaka ostatku duga u predzadnjem razdoblju
* suma otplatnih kvota mora biti jednaka ukupnom zajmu
* budući da se zajam zajedno sa složenim kamatama otplaćuje anuitetima, suma svih anuiteta mora biti jednaka sumi svih kamata i zajma
* otplatne kvote tvore geometrijski niz: $R_{k+1} = R_k \cdot r$

8. Konverzija zajma.

Često se za vrijeme otplate mijenjaju uvjeti amortizacije zajma. Pod konverzijom zajma podrazumijevamo promjenu ugovorenih uvjeta otplaćivanja zajma, bilo da je riječ o promjeni kamatne stope i/ili roka otplate i/ili načina otplaćivanja što za posljedicu ima promjenu anuiteta. Zato je potrebno izračunati koliki je u tom trenutku ostatak duga zajma koji će se nastaviti otplaćivati po novim uvjetima. Taj dug krajem k-tog razdoblja predstavlja novi iznos zajma. Ostatak duga jednak je sadašnjoj vrijednosti dotad neplaćenih anuiteta svedenih na kraj k-tog razdoblja.

$$C_k = a\frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)} = a \cdot IV_p^{n-k}$$



9) Krnji ili nepotpuni anuitet.

Moguće je da se pri amortizaciji zajma vjerovnik i dužnik unaprijed dogovore o visini anuiteta amortizacije. Takav anuitet zovemo dogovoreni anuitet. Budući da je mala vjerojatnost da dogovoreni anuitet bude jednak analitičkom, u kojoj imamo posljedicu da je zadnji anuitet manji od prethodnih. Taj posljednji anuitet nazivamo krnji ili nepotpuni anuitet i označavamo ga s a'. Krnji anuitet računamo tako da:

- zadnja otplatna kvota mora biti jednaka predzadnjem ostatku duga
- zadnja kvota + zadnje kamate = nepotpuni anuitet

10) Intertalarne kamate

Kod većih dugoročnih zajmova između banke i korisnika zajma ugovaraju se intertalarne kamate. To je naknada koju korisnik zajma plaća za korištenje sredstava (cijelog zajma ili tranše) od trenutka dobivanja sredstava do trenutka stavljanja zajma u otplatu. Intertalarna kamata se može obračunati na 2 načina:

1) obračunati i isplatiti u trenutku kada počne otplata zajma
2) pripisati iznosu zajma u trenutku stavljanja zajma u otplatu te tako povećati njegov nominalni iznos

11) Model zajma s konstantnom otplatnom kvotom uz dekurzivni obračun kamata

k	a_k	I_k	R	C_k
0	/	/	/	C_0
1	a_1	I_1	R	C_1
2	a_2	I_2	R	C_2
⋮			⋮	
	a_n	I_n	R	0
Σ	$\sum_{k=1}^{n} a_k$	$\sum_{k=1}^{n} I_k$	C	

Budući da se nominalni iznos zajma otplaćuje s otplatnim kvotama vrijedi: $\sum_{k=1}^{n} R_k = C$

$$R_k = \frac{C}{n} \qquad I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$$

Anuitet otplate više nije stalan. $a_k = I_k + R$

12) Amortizacija zajma uz anticipativni obračun kamata.

Zajam C, odobren uz anticipativnu kapitalizaciju treba otplatiti sa n međusobno jednakih anuiteta. Za razliku od dekurzivnog, ovdje se unaprijed plaćaju kamate tako da korisnik zajma ne prima cjelokupni iznos zajma, već umanjen za inicijalne/nulte kamate.

$$I_0 = \frac{C_0 \cdot q}{100} \qquad \underbrace{C_0 - I_0}_{\text{svota koju prima}} = C_0 \cdot \frac{1}{\rho}$$

prima ⇒ tu svotu on mora vratiti u jednakih n anuiteta, sadašnja vrijednost te svote jednaka je sadašnjoj vrijednosti anuiteta

$$C_0 = a\,\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)} = a\left(IV_\rho^{\,n-1} + 1\right) \Rightarrow a = C_0\,\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1} = C_0 \cdot VI_q^n$$

k	a	I_k	R_k	C_k
0	/	I_0	/	C_0
1	a	I_1	R_1	C_1
2	a	⋮	R_2	⋮
⋮	⋮		⋮	
	a_n	—	R_n	0
Σ	$n \cdot a$	$\sum_{k=1}^{n} I_k$	C_0	

* budući da ne postoje kamate u posljednjem razdoblju, zadnji anuitet jednak je posljednoj otplatnoj kvoti, koja mora biti jednaka preazadnjem iznosu duga $a_n = R_n = C_{k-1}$

* kod anticipativnog zajma kamate se računaju od ostatka duga istog razdoblja: $I_k = \frac{C_k \cdot q}{100}$

$$R_1 = (a - I_0) \cdot \rho \qquad C_k = C_{k-1} - R_k$$

$$R_1 = C_0 - C_1 \qquad R_k = (a - I_{k-1}) \cdot \rho$$

$$n \cdot a = I + \underbrace{(C_0 - I_0)}_{\text{stvarna promjena}}$$

* otplatne kvote tvore geometrijski niz s kvocijentom niza ρ

13. Potrošački kredit.

To je poseban način prodaje pojedinih vrsta roba. Odobrava se uz obvezu uplate dijela kredita odmah, u gotovini. Nakon odbitka udjela u gotovini dobije se stvarni iznos potrošačkog kredita na koji se primjenjuje jednostavni kamatni račun i pribrajaju ukupne kamate, čime se dobije ukupno dugovanje. Iznos konstantnog anuiteta (rate) dobija se dijeljenjem ukupnog dugovanja s brojem mjeseci na koji je odobren kredit.

- C - iznos odobrenog potrošačkog kredita
- P - udio u gotovini
- $C_0 = C - P$ - stvarni iznos kredita nakon odbitka dijela u gotovini
- q - anticipativna kamatna stopa
- I - ukupne kamate
- I_k - kamate u k-tom trenutku
- n - broj obroka otplate
- R - prosječna otplatna kvota
- a - rata otplate

Ukupno dugovanje $(C_0 + I)$ treba otplatiti u n jednakih mjesečnih anuiteta a.

$$n \cdot a = C_0 + I$$

$$a = \underbrace{\frac{C_0}{n}}_{} + \underbrace{\frac{I}{n}}_{} = R + I_s$$

I_s - prosječne kamate

R - prosječna otplatna kvota

k	a	R	I_s	I_k	$I_k - I_s$
1	a	R	I_1	I_1	
2	a	R	I_2	I_2	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	a	R	I_s	I_n	
Σ	$n \cdot a$	C_0	I	I	