Mr. RATKO PAIĆ

" K matematici nema kraljevskog puta" – odgovor Euklida na pitanje kralja Ptolomeja da li postoji neki lakši pristup geometriji od njegovih Elemenata.

I. GRAĐA MATEMATIKE

1. LOGIKA

Pojednostavljeno kazano, matematika se sastoji od osnovnih matematičkih pojmova, aksioma, definicija i teorema.

Najjednostavniji pojmovi od kojih se u matematici polazi i koji se ne mogu svesti na jednostavnije, zovu se **osnovni matematički pojmovi**. Svojstva tih pojmova intuitivno su nam poznata iz iskustva, i onda se ona izriču u obliku aksioma.

Aksiom je činjenica ili tvrdnja koja se po dogovoru smatra istinitom, pa se ne dokazuje. Primjer osnovnog matematičkog pojma je pravac. Osnovna svojstva pravca sadržana su u aksiomu o pravcu koji kaže: "Dvjema različitim točkama ravnine može se položiti jedan i samo jedan pravac". Skup je također osnovni matematički pojam i o njemu ćemo detaljno govoriti nešto kasnije.

Pojam koji nije osnovni uvodi se definicijom. **Definicija** je izreka kojom se uvodi, odnosno opisuje novi pojam pomoću već poznatih pojmova. Formulacija definicije mora biti sasvim precizna. Iz nje se mora jasno vidjeti koja se riječ uvodi odnosno koji se pojam definira, a sve ostale riječi u njoj moraju biti poznate (osnovni matematički pojmovi ili prethodno definirani pojmovi). Strogo kazano, definicija ne smije sadržavati niti jednu riječ viška niti manjka. Pokažimo to na primjeru definicije kružnice:

"Neka je Π ravnina, S točka iz ravnine Π, r pozitivan realni broj i $d(T,S)$ udaljenost točaka T i S. Tada se skup $\{T \in \Pi \mid d(T,S) = r\}$ zove kružnica sa središtem u točki S polumjera r, i označava s $k(S,r)$."

Dakle: $k(S,r) = \{T \in \Pi \mid d(T,S) = r\}$.

Tom definicijom smo novi pojam, kružnicu, opisali pomoću pojmova koje smo prethodno upoznali (skup, ravnina, točka, udaljenost, realan broj).

Rezultate matematičkih istraživanja izričemo teoremima ili poučcima. **Teorem** ili **poučak** je tvrdnja čiju istinitost treba dokazati. To znači da iza teorema treba navesti njegov dokaz. Svaki teorem sadrži pretpostavku ili hipotezu i tvrdnju ili tezu. Pretpostavka nabraja uvjete uz koje vrijedi ono što kaže tvrdnja. Dokaz teorema je niz logičkih koraka kojima se pokazuje istinitost tvrdnje. Ako pokažemo da teorem izvire iz aksioma, definicija i već dokazanih teorema, odnosno ako je tvrdnja deducirana kao njihova logička posljedica, govorimo o direktnom dokazu. Ima teorema koji se ne mogu dokazati direktnim dokazom, pa se oni dokazuju indirektnim dokazom.

Ako tvrdnju nekog teorema uzmemo za pretpostavku, a njegovu pretpostavku za tvrdnju, dobivamo tom teoremu suprotan teorem, ili kako ga ponekad nazivamo, njegov obrat. Obrat se uvijek mora dokazati, jer ako je neki teorem istinit njegov obrat ne mora biti istinit.

Primjer 1. Jedan od najpoznatijih teorema je Pitagorin poučak: "U pravokutnom trokutu kvadrat hipotenuze jednak je zbroju kvadrata kateta."

Pretpostavka ovog teorema je da je trokut pravokutan, a tvrdnja je da je kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata kateta. Obrat Pitagorinog poučka je:

"Ako je kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata kateta, onda je trokut pravokutan", i to je opet istinit teorem. Dakle, obrat Pitagorinog teorema je istinit.

Primjer 2. Vrijedi teorem: "Ako su dva trokuta sukladna, onda oni imaju jednake kutove." Obrat ovog teorema je: "Ako dva trokuta imaju jednake kutove, onda su oni sukladni." Znamo da to nije istina, jer su tada trokuti slični i ne moraju biti sukladni.

Zadatak. Iskaži obrate sljedećih teorema i ispitaj njihovu istinitost:

a) Ako je n paran broj, onda je n^2 paran broj;

b) Ako je n neparan broj, onda je n^2 neparan broj;

c) Ako su brojevi a i b djeljivi brojem c, onda je a + b djeljiv brojem c;

d) Ako su α i β pravi kutovi, onda su oni jednaki.

Rješenje: obrati od a) i b) su istiniti, a od c) i d) nisu.

Logika proučava vrste pravilnog zaključivanja i određuje put od pretpostavke do zaključka. Matematička logika je posebna matematička disciplina koja se izučava kao formalizirana deduktivna teorija. Ovdje ćemo iznijeti samo osnovne pojmove i simbole matematičke logike koje ćemo ubuduće često koristiti.

I druge matematičke discipline imaju svoje simbole, pa se može reći da su simboli sastavni dio matematike. Jasno je da značenje simbola mora biti precizno definirano. Razvojem matematike razvija se i njena simbolika.

U matematici, kao i u svakodnevnom životu, misli i tvrdnje izražavamo rečenicama. Rečenice kojima se nešto tvrdi zovu se **deklarativne rečenice**. Deklarativne rečenice koje mogu biti samo ili istinite ili neistinite (lažne) zovu se **izjave** ili **sudovi**. Pogledajmo nekoliko primjera:

1. "Split se nalazi u Hrvatskoj."
2. "Split se nalazi u Bosni."
3. "Broj 5 je veći od broja 10."

Sve tri navedene rečenice su izjave. Naime, prva rečenica izražava istinitu tvrdnju, a druga i treća rečenica su neistinite tvrdnje. Razmotrimo sljedeće tri rečenice:

4. "Broj 2 je veći od broja x."
5. "Ja sada lažem."
6. "Zeleni tangens pjeva."

Ove tri rečenice su deklarativne rečenice, ali nisu izjave jer se njihova istinitost ne može odrediti. Naime, u četvrtoj rečenici se ne zna koliki je broj x, pa se ne može odrediti njena istinitost. U petoj se tvrdi da lažem, a to znači da lažem kad kažem da lažem, pa govorim istinu, a to je u suprotnosti s izjavom da lažem. Šesta rečenica nije smislena.

Označimo s A neku izjavu. Ako je izjava A istinita pisat ćemo

$$\tau(A) = \mathrm{T} \quad \text{ili} \quad \tau(A) = 1 .$$

Ako je izjava A neistinita pisat ćemo

$$\tau(A) = \perp \quad \text{ili} \quad \tau(A) = 0 .$$

Tu je τ grčko slovo "tau", znak T čita se "te", a znak $\perp$ čita se "ne te".

Na primjer, τ (Split se nalazi u Hrvatskoj) = 1, a τ (Split se nalazi u Bosni) = 0.

Princip na osnovu kojeg izjava može biti samo ili istinita ili lažna zove se "tertium non datur", odnosno princip isključenja trećeg. Jezik svake matematičke discipline sastoji se isključivo od rečenica koje su izjave, dakle od rečenica koje su ili istinite ili lažne i nema neke daljnje treće mogućnosti. Na toj činjenici počiva **značaj, ljepota i težina matematike**.

Istaknimo još jednom, svaka rečenica koja se izgovori ili napiše u izlaganju nekog matematičkog gradiva je ili istinita ili lažna, ili točna ili netočna, i ne može biti djelomično točna. To ne vrijedi u svakoj znanosti, na primjer ekonomiji, pravu, medicini.

Navedimo usput da se na principu isključenja trećeg zasniva u matematici često korištena metoda indirektnog dokaza. Ona se sastoji u tome da ako dokažemo da nije istina da je neka izjava lažna, onda je ona istinita. U praksi se indirektni dokaz istinitosti neke izjave provodi tako da se dokaže da suprotna izjava vodi do apsurda (proturječja, kontradikcije).

Iz pojedinih izjava grade se nove, složene izjave pomoću operacija s izjavama. Te operacije definirane su među elementima skupa $\{1,0\}$ i one čine algebru izjava. Definiramo ih na sljedeći način (A i B su oznake za proizvoljne izjave):

1. Konjukcija A&B ili $\mathbf{A \wedge B}$ dviju izjava je složena izjava koja je po definiciji istinita ako i samo ako (kraće pišemo **akko**) su obje izjave A, B istinite. Znak & odnosno $\wedge$ čita se "i" ili "et", što je latinski veznik "i". Navedena definicija konjukcije izjava može se prikazati pomoću tablice koja se zove **tablica istinitosti** ili **semantička tablica**:

A	**B**	**A&B**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2. Disjunkcija $\mathbf{A \vee B}$ dviju izjava je složena izjava koja je po definiciji istinita akko je barem jedna od izjava A, B istinita. Znak $\vee$ čita se "ili" odnosno latinski "vel". U ovoj definiciji znak $\vee$, odnosno veznik ili ima slabiji, inkluzivni smisao jer dopušta da istodobno vrijede obje izjave A, B. Zato se ova operacija preciznije zove **inkluzivna disjunkcija**. Pored nje postoji i **ekskluzivna disjunkcija** $\mathbf{A \veebar B}$ koja je istinita akko je samo jedna od izjava A i B istinita (ali ne obje). Definicije ovih složenih izjava dane su u tablici istinitosti:

A	B	$A \vee B$	$A \underline{\vee} B$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Uočimo da u našem jeziku veznik "ili" ima ponekad inkluzivni, a ponekad ekskluzivni smisao. U rečenici "Popodne ću spavati ili ću čitati knjigu." smisao je inkluzivni, dok je u rečenici "Ivo se rodio u Splitu ili u Šibeniku." smisao ekskluzivni.

3. Implikacija $\mathbf{A \Rightarrow B}$ dviju izjava je složena izjava koja je po definiciji lažna akko je A istinita, a B lažna. Izjava $A \Rightarrow B$ čita se "ako je A onda je B", "iz A slijedi B", "A je dovoljan uvjet za B" ili "B je nužan uvjet za A", a znak $\Rightarrow$ čita se "povlači" ili "implicira". Pripadna tablica istinitosti je:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primijetimo da se treći i četvrti redak tablice razlikuje od onog što smo naučili u svakodnevnom životu. Naime, ako je pretpostavka pogrešna onda se ne uobičavamo služiti implikacijom jer se iz pogrešne pretpostavke ne može ništa zaključiti. Objasnimo četvrti redak tablice na primjeru:
"Ako je Zemlja veća od Sunca onda je Mjesec veći od Zemlje." Izjava A da je Zemlja veća od Sunca je lažna kao i izjava B da je Mjesec veći od zemlje, a izjava $A \Rightarrow B$ je ipak točna.

4. Ekvivalencija $\mathbf{A \Leftrightarrow B}$ dviju izjava je složena izjava koja je istinita akko su obje izjave istinite ili obje lažne. Izjava $A \Leftrightarrow B$ čita se "A je onda i samo onda ako je B", "A je akko je B" ili "A je nužan i dovoljan uvjet za B". Znak $\Leftrightarrow$ čita se "ekvivalentno". Tablica istinitosti je:

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Izjava A $\Leftrightarrow$ B može se definirati i kao (A $\Rightarrow$ B) & (B $\Rightarrow$ A).

5. Negacija $\rceil$**A** izjave A je izjava koja je istinita akko je izjava A lažna. Znak $\rceil$ čita se "nije" ili latinski "non". Tablica istinitosti je:

A	$\rceil$A
1	0
0	1

Iz navedenog slijedi da su konjukcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija binarne operacije (jer djeluju na dvije izjave), dok je negacija unarna operacija (djeluje na samo jednu izjavu).

Na kraju navedimo da je izjava A $\Rightarrow$ B ekvivalentna s izjavom $\rceil$B $\Rightarrow$ $\rceil$A , tj.
(A $\Rightarrow$ B) & ($\rceil$B $\Rightarrow$ $\rceil$A), pa se u matematici implikacija A $\Rightarrow$ B često dokazuje tako da se dokaže implikacija $\rceil$B $\Rightarrow$ $\rceil$A (takozvana metoda suprotnog ili kontrapozicije ili kontradikcije).

U matematici često koristimo riječi "svaki" i "postoji" pa za te riječi uvodimo i posebne znakove koji olakšavaju njihovu primjenu. Zovemo ih kvantifikatori ili kvantori.

Univerzalni kvantifikator ima značenje "za svaki" i oznaku $\forall$. Na primjer izjava $(\forall x \in R)(x^2 \geq 0)$ znači "za svaki realan broj x vrijedi $x^2 \geq 0$".
Usput navedimo da vrijedi $\tau\,[(\forall x \in R)(x^2 \geq 0)] = 1$ (jer je kvadrat svakog realnog broja nenegativan broj) i $\tau\,[(\forall x \in R)(x^2 > 0)] = 0$ (jer kvadrat broja 0 nije veći od 0).

Egzistencijalni kvantifikator ima značenje "postoji barem jedan" i oznaku $\exists$. Tako izjava $(\exists x \in R)(x^2 = 4)$ znači "postoji barem jedan realan broj kojemu je kvadrat 4".
Pored kvantifikatora $\exists$ postoji i kvantifikator $\exists!$ koji ima značenje "postoji jedan i samo jedan" ili "postoji točno jedan". Tako na primjer izjava $(\exists x! \in R)(x^2 = 0)$ znači "postoji jedan i samo jedan realan broj čiji je kvadrat 0".

Zadatak 1. Pročitaj i ispitaj istinitost sljedećih izjava:

a) $(\forall n \in N)(\exists m \in N)(m \cdot n > 100)$;

b) $(\exists! n \in N)(2n + 20 = 34)$;

c) $(\forall a, b \in R)\left[(a \cdot b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)\right]$.

Zadatak 2. Sljedeće izjave izrazi logičkim simbolima (a i b su realni brojevi):

a) Ako je $a \cdot b \neq 0$ onda je $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Rješenje: $(a \cdot b \neq 0) \Rightarrow \left[(a \neq 0) \,\&\, (b \neq 0)\right]$.

b) Ako je $a \cdot b > 0$ onda je $a > 0$ i $b > 0$ ili $a < 0$ i $b < 0$.

Rješenje: $(a \cdot b > 0) \Rightarrow \left[(a > 0) \,\&\, (b > 0)\right] \underline{\vee} \left[(a < 0) \,\&\, (b < 0)\right]$.

Zadatak 3. Uvjeri se u istinitost sljedećih ekvivalencija (tu su sa P(x) označeni svi elementi nekog skupa koji imaju svojstvo P):

a) $\rceil(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \rceil P(x)$;

b) $\rceil(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x) \rceil P(x)$.

2. SKUPOVI

U ovoj točki navest ćemo osnovne pojmove i simbole teorije skupova koji su nam većinom poznati još iz osnovne škole. Ti pojmovi predstavljaju osnove svake matematičke teorije.
Po dogovoru, **skup** je osnovni matematički pojam pa se ne definira. Bilo je mnogo pokušaja da se taj pojam definira, kao na primjer: "skup je ujedinjenje nekih predmeta u cjelinu", ili "skup je mnoštvo koje shvaćamo kao jedno". Ipak ovo nisu definicije jer se u njima koriste nepoznate riječi ili sinonimi: ujedinjenje, predmet, cjelina, mnoštvo.
Skup je uzet za osnovni matematički pojam jer je intuitivno jasan. Na primjer svima je jasno što predstavlja "skup studenata nekog fakulteta", "skup točaka na pravcu", "skup slova u riječi", itd.

Svaki skup sačinjavaju njegovi **elementi** ili **članovi**. Po dogovoru se pretpostavlja da su oni međusobno različiti. Skupove označavamo velikim slovima, a elemente malim slovima. Izjava "a je element skupa A", "a pripada skupu A" ili "A sadrži element a" označava se $\mathbf{a \in A}$, a suprotna izjava "a nije element skupa A" označava se $\mathbf{a \notin A}$.
Skup A je zadan ako se za proizvoljni element a zna da li vrijedi $a \in A$ ili $a \notin A$, tj. ako se točno zna koje elemente sadrži. Iako riječ skup navodi na misao o sadržavanju više elemenata, u matematici se promatraju i skupovi koji sadrže samo jedan ili nijedan element.
Oznaka $A = \{a, b, c\}$ znači da skup A sadrži točno elemente a, b i c. Analogno, oznaka $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ znači da skup B sadrži elemente $b_1, b_2, ..., b_n$ (pri ovom ispisivanju elemenata, tri točkice "..." znače i čitaju se "i tako dalje"), a oznaka $C = \{c\}$ znači da se skup C sastoji od samo jednog elementa c (takozvani jednočlani skup). Napomenimo da kod zapisa skupa nije važan poredak njegovih elemenata. Na primjer vrijedi $A = \{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Navedeni skupovi su konačni skupovi.
Postoje i beskonačni skupovi, na primjer skup $D = \{ d_1, d_2, ..., d_n , ...\}$, prije spomenuti skup točaka na kružnici $k(S,r) = \{T \in \Pi \mid d(T,S) = r\}$ i poznati skupovi brojeva:

N = skup prirodnih brojeva,

Z = skup cijelih brojeva,

Q = skup racionalnih brojeva,

R = skup realnih brojeva,

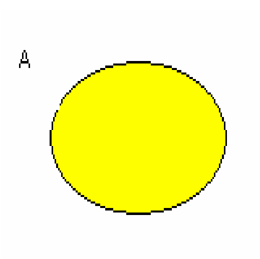
C = skup kompleksnih brojeva.

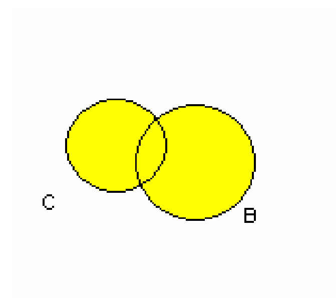
Te skupove kasnije ćemo detaljno razmatrati. Isto tako, kasnije ćemo dati točnu definiciju konačnog odnosno beskonačnog skupa.

Među skupove, po dogovoru ubrajamo i **prazan skup** $\emptyset$ koji ne sadrži niti jedan element. Mogli bi reći da je prazan skup negacija ili odsustvo skupa. On je po dogovoru konačan skup. Primjeri praznog skupa su "skup konja na Mjesecu" ili "skup rješenja sustava jednadžbi $x-2y=1,\ 3x-6y=5$".

Često nije moguće navesti sve elemente nekog skupa, pa se u tom slučaju koristi oznaka $A = \{a \mid P(a)\}$ ili $A = \{a : P(a)\}$. Ona nam kazuje da se skup A sastoji od onih i samo onih elemenata koji imaju svojstvo P, a čita se "A je skup svih elemenata a sa svojstvom P". Na primjer $A = \{a \in Z \mid |a|<3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{ x \in Q \mid x^2 = 2\} = \emptyset$.

Skupove je zgodno prikazivati pomoću Venn-Eulerovih dijagrama, tj. kao dijelove ravnine omeđene zatvorenim krivuljama:





2.1. PODSKUP

Definicija. Ako su A i B proizvoljni skupovi i ako vrijedi $(\forall a)(a \in A \Rightarrow a \in B)$,tada kažemo da je A **podskup skupa** B, ili B je **nadskup skupa** A i pišemo **A ⊂ B**. Ova relacija među skupovima zove se **inkluzija**.

Po dogovoru prazan skup smatramo podskupom svakog skupa. Dakle, vrijedi $\emptyset \subset A,\ \forall A$. Očito je i da vrijedi $A \subset A,\ \forall A$.

Definicija. Skupovi A i B su **jednaki**, pišemo **A = B**, ako vrijedi $A \subset B$ i $B \subset A$. Skupovi A i B su **različiti**, pišemo **A ≠ B**, ako nisu jednaki.

Definicija. Ako vrijedi $A \subset B$ i $A \neq B$ tada kažemo da je A **pravi podskup** od B i pišemo **A⊆B**.

Dakle vrijedi: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall a)(a \in A \Rightarrow a \in B)\ \&\ (\exists b)(b \in B\ \&\ b \notin A)$.

Definicija. Ako je A skup, onda se skup svih podskupova skupa A zove se **partitivni skup skupa** A i označava sa $\mathcal{P}(A)$.

Dakle, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$, odnosno to je skup čiji su elementi podskupovi skupa A. Može se pokazati da partitivni skup skupa od n elemenata sadrži 2^n elemenata.

Primjer: Partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$ je

$$\mathcal{P}(A) = \{O, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

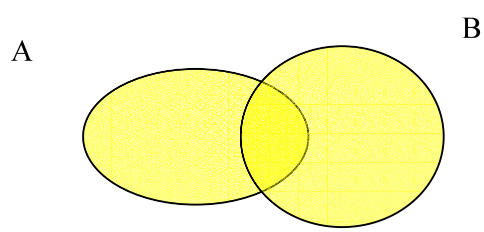
Skup A ima 3 elementa, a partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ ima $2^3 = 8$ elemenata.

2.2. OPERACIJE SA SKUPOVIMA

Osnovne operacije sa skupovima su unija, presjek i razlika skupova. Ove operacije se još zovu i Boole-ove operacije. Pomoću njih zadanim skupovima pridružujemo nove skupove.

Definicija. **Unija skupova** A i B je novi skup $\mathbf{A \cup B}$ čiji elementi imaju svojstvo da pripadaju barem jednom od skupova A i B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

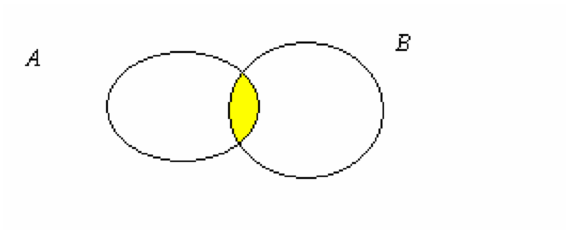


Očito je da vrijedi $A \cup O = A$, $A \cup A = A$ i općenito iz $B \subset A$ slijedi $A \cup B = A$.

Analogno se definira i unija bilo kojeg broja skupova: Ako su A_i, $i \in I$, proizvoljni skupovi, tada je unija skupova A_i skup $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$. Tu je I neki konačni ili beskonačni skup, npr. $I = \{1,2,3,\ldots,n\}$.

Definicija. **Presjek skupova** A i B je skup $\mathbf{A \cap B}$ čiji elementi imaju svojstvo da pripadaju i skupu A i skupu B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$$



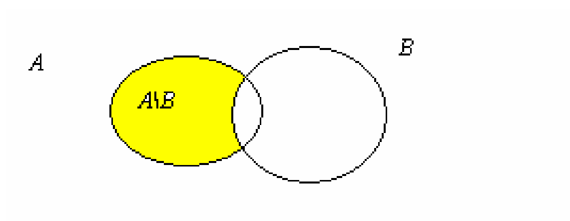
Očito je da vrijedi $A \cap O = O$, $A \cap A = A$ i općenito iz $B \subset A$ slijedi $A \cap B = B$.
Analogno se definira i presjek bilo kojeg broja skupova: Ako su A_i, $i \in I$, proizvoljni skupovi, tada je presjek skupova A_i skup $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.

Definicija. Ako je $A \cap B = \emptyset$, kaže se da su A i B **disjunktni skupovi**.

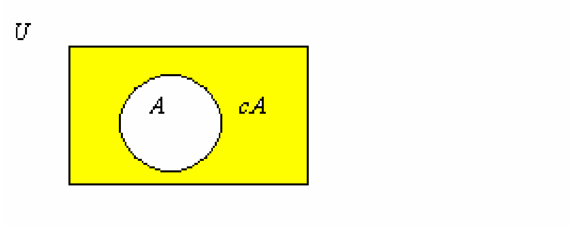
Definicija. Razlika ili diferencija skupova A i B je skup $A \setminus B$ koji se sastoji od onih elemenata skupa A koji nisu elementi skupa B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}$$

Definicija. Ako je $B \subset A$ tada se skup $A \setminus B$ zove **komplement** od B u skupu A i označava sa $\mathbf{c_A B}$.



Često se u razmatranjima promatraju samo podskupovi nekog određenog skupa, a svi ostali skupovi se zanemaruju. U tom se slučaju taj skup zove **univerzalni skup** ili univerzum i označava sa **U**. Tada se $c_U A$ označava samo sa **cA**.



Primjer 1. Za učenike u nižim razredima osnovne škole univerzalni skup **U** je skup prirodnih brojeva **N** ili skup cijelih brojeva **Z**, jer oni promatraju samo podskupove ili elemente tih skupova.

Primjer 2. Za liječnike univerzalni skup **U** je skup svih ljudi, jer oni promatraju samo određene skupine (skupove) ljudi, dakle podskupove toga skupa.

Teorem. Ako su A, B i C proizvoljni skupovi, onda vrijedi:

1. $A \cup B = B \cup A$ (zakon komutacije za uniju);
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (zakon asocijacije za uniju);
3. $A \cap B = B \cap A$ (zakon komutacije za presjek);
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (zakon asocijacije za presjek);
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (zakon distribucije);
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (zakon distribucije).

Dokaz. Slijedi neposredno iz definicije jednakosti dvaju skupova i definicija operacija sa skupovima. Provodi se tako da se dokaže da je skup na lijevoj strani jednakosti podskup skupa na desnoj strani, i obrnuto.

Teorem. Ako su A, B i C proizvoljni skupovi, onda vrijedi:

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
3. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
4. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
5. $c_A\, O = A,\ \ c_A\, A = O$;
6. $c_A\, (c_A\, B) = B$,
7. $c\,(A \cup B) = cA \cap cB$;
8. $c\,(A \cap B) = cA \cup cB$;
9. $c\,(A \setminus B) = cA \cup B$.

Dokaz. Dokažimo jednu od ovih tvrdnji, na primjer prvu.

Ako uvedemo oznake $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, trebamo dokazati da je $X = Y$ a to ćemo dokazati ako pokažemo da je $X \subset Y$ i $Y \subset X$.

Odaberimo proizvoljni $x \in X = A \setminus (B \cup C)$. To znači da je $x \in A$ i $x \notin B \cup C$, odnosno $x \in A$, $x \notin B$ i $x \notin C$. Nadalje to znači da je $x \in A \setminus B$ i $x \in A \setminus C$, odnosno $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = Y$. Budući da je x proizvoljno odabrani element skupa X, to vrijedi za svaki element skupa X, pa je $X \subset Y$.

Ispišimo za vježbu ovaj dio dokaza logičkim simbolima.

$x \in X = A \setminus (B \cup C) \Rightarrow (x \in A \ \& \ x \notin B \cup C) \Rightarrow (x \in A, x \notin B \ \& \ x \notin C) \Rightarrow$ $(x \in A \setminus B \ \& \ x \in A \setminus C) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = Y$, a to znači da je zaista $X \subset Y$.

Uzmimo sada proivoljni element $y \in Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. To znači da je $y \in A \setminus B$ i $y \in A \setminus C$, odnosno $y \in A$, $y \notin B$ i $y \notin C$. Sada je očito da vrijedi $y \notin B \cup C$ i $y \in A \setminus (B \cup C) = X$. Budući da je y bio proizvoljno odabrani element iz Y, vrijedi zaista $Y \subset X$. Time je tvrdnja potpuno dokazana.

Slično se dokazuju i sve preostale tvrdnje.

Zadatak 1. a) Što sve može biti presjek dva različita pravca u ravnini?

b) Što sve može biti presjek pravca i kružnice u ravnini?

Rješenje:

a) Presjek dva različita pravca u ravnini je jednočlani skup (ako se pravci sijeku), ili prazan skup (ako su pravci paralelni).
b) Presjek pravca i kružnice u ravnini je dvočlani ili jednočlani ili prazan skup.

Zadatak 2. Ako je $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leq x < 8\}$, odredi skupove $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$. Isto odredi za skupove $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 5x - 12 > 4\}$ i $D = \{x \in \mathbf{N} \mid 18 - 2x > 1\}$.

Rješenje:

$A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = B$, $A \cap B = \{2, 3, 4\} = A$, $A \setminus B = O$, $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$;

$C = \{4, 5, 6, \dots\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$C \cup D = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbf{N}$, $C \cap D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C \setminus D = \{9, 10, 11, \dots\}$,

$D \setminus C = \{1, 2, 3\}$.

2.3. PARTICIJA SKUPA I DIREKTNI UMNOŽAK SKUPOVA

Definicija. **Particija skupa A** je skup $\mathcal{F}(A) = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ čiji su elementi neprazni podskupovi A_i skupa A sa svojstvima:

1. elementi skupa $\mathcal{F}(A)$ međusobno su disjunktni;
2. unija svih elemenata skupa $\mathcal{F}(A)$ je skup A.

Dakle, elementi particije skupa A su podskupovi A_i skupa A takvi da vrijedi $A_i \cap A_j = O$ za $i \neq j$, i $\cup A_i = A$. Važno je uočiti da u navedenoj definiciji A_i ponekad predstavlja skup, a ponekad element. Naime, A_i je podskup skupa A, a ujedno element skupa $\mathcal{F}(A)$.

Budući da je partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ skupa A skup svih podskupova skupa A, particija $\mathcal{F}(A)$ je podskup partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$. Stoga smo definiciju particije skupa mogli iskazati i na drugi način: podskup $\mathcal{F}(A)$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ je particija skupa A ako za svaki $a \in A$ postoji jedan i samo jedan element $X \in \mathcal{F}(A)$ takav da je $a \in X$.

Dakle: Skup $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{P}(A)$ je particija skupa A ako za $\forall\, a \in A\ \exists! X \in \mathcal{F}(A)$ takav da je $a \in X$.

Očito, skup različit od praznog, jednočlanog i dvočlanog skupa, ima više različitih particija.

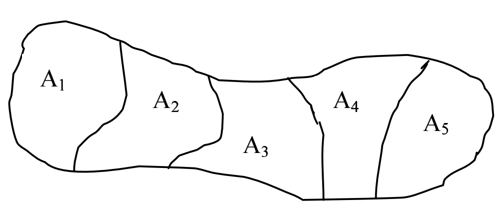
Primjer 1. Navedimo nekoliko particija skupa $A = \{1, 2, 3\}$:

$\mathcal{F}_1(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{F}_2(A) = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$,

$\mathcal{F}_3(A) = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\mathcal{F}_4(A) = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$.

Prva od tih particija je tročlani skup, a ostale su dvočlani skupovi. Lako se vidi da su to sve moguće particije skupa A.

Primjer 2. Skupovi A_i prikazani na ovom Venn-Eulerovom dijagramu, elementi su jedne particije skupa A, odnosno $\mathcal{F}(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$.



Primjer 3. Navedimo nekoliko particija skupa studenata nekog fakulteta: particija određena spolom, particija određena godinom rođenja, particija određena mjesecom rođenja, particija određena datumom rođenja, itd.

Prva od tih particija ima dva elementa. Prvi njen element je skup studenata muškog spola, a drugi element skup studenata ženskog spola. Zadnja od tih particija ima onoliko particija koliko ima dana u godini. Prvi njen element čini skup studenata rođenih 1. siječnja, drugi element studenti rođeni 2. siječnja, itd.

Definicija. Neka su A i B neprazni skupovi. **Direktni** ili **Kartezijev umnožak skupova** A i B je skup $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ čiji su elementi uređeni parovi (a, b), gdje je $a \in A$ i $b \in B$.

Dakle: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Pri tom se pod uređenim parom smatra dvočlani skup kod kojeg se zna koji je element na prvom, a koji na drugom mjestu (ti elementi zovu se komponente ili koordinate uređenog para).

Dakle, za uređene parove vrijedi: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \;\&\; b = d$, i općenito: $(a, b) \neq (b, a)$.

Sjetimo se da za skupove vrijedi $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Iz navedene definicije slijedi $A \times B \neq B \times A$.

Posebno je važan slučaj kada je $A = B$, tj. Kartezijev umnožak skupa A sa samim sobom. Taj skup $A \times A$ označava se sa $\mathbf{A^2}$ i zove **kvadrat skupa A.**

Dakle: $A \times A = A^2 = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$.

Npr. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{N}\} = \{(1,1), (1,2), \ldots, (11,231), \ldots\}$.

Analogno se definira Kartezijev umnožak tri skupa:

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$ (elementi tog skupa zovu se uređene trojke), odnosno proizvoljnog konačnog broja skupova:

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$. Elementi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zovu se uređene n-torke elemenata (čita se: entorke).

Primjer 4. Ako je $A = \{1, 2, 3\}$, a $B = \{a, b\}$, onda je

$$A \times B = \{(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b)\},$$

$$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\},$$

$A \times A = A^2 = \{(1,1),(1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$,

$B\times B= B^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Primjer 5. Ako je u ravnini zadan pravokutni koordinatni sustav, skup $\mathbf{N}^2$ predstavlja sve točke u prvom kvadrantu s cjelobrojnim koordinatama. Analogno, skup $\mathbf{Z}^2$ predstavlja sve točke ravnine s cjelobrojnim koordinatama, a skup $\mathbf{R}^2$ predstavlja sve točke ravnine (kasnije ćemo pokazati da između skupa $\mathbf{R}^2$ i skupa točaka ravnine postoji preslikavanje koje je bijekcija).

Primjer 6. Oznake na ulaznicama za kino dvoranu možemo promatrati kao elemente Kartezijevog umnoška skupa redova i skupa sjedala u redu: (I,1), (III,5), (X,12), …

Zadatak. Odredi eksplicite skupove:

$S = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x^2 + y^2 =25\}$,

$T= \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$,

$U= \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid x^2 + y^2 =25\}$.

Rješenje:

$S = \{(3, 4), (4, 3)\}$,

$T = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$,

$U = \{(0,5), (0, -5), (5,0), (-5, 0), (3,4), (4,3), (-3,4), (3, -4), (-3, -4), (-4, -3), (4, -3), (-4, 3)\}$.

Geometrijski, skup S je skup točaka s cjelobrojnim pozitivnim koordinatama koje leže na zadanoj kružnici, skup T je skup točaka s cjelobrojnim pozitivnim koordinatama koje leže na toj kružnici ili unutar nje, a skup U je skup točaka s cjelobrojnim koordinatama koje leže na toj kružnici ili unutar nje.

3. SKUP PRIRODNIH BROJEVA

Već prije osnovne škole upoznali smo se sa najjednostavnijim brojevima. U godini ima dvanaest mjeseci. Ivo ima dva brata i jednu sestru. U razredu ima trideset i šest učenika. Brojevi 12, 2, 1, 36 koji su se pojavili u tim rečenicama zovu se **prirodni brojevi**. Njih koristimo pri prebrojavanju raznih objekata iz naše okoline. Zato se može reći da prirodni broj iskazuje koliko neki neprazan skup ima elemenata. Skup svih prirodnih brojeva označava se slovom **N**. Dakle,

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}.$$

Navedimo osnovna svojstva tog skupa:

1. Svaki prirodni broj ima svog **sljedbenika** (npr. 14 je sljedbenik broja 13, 223 je sljedbenik broja 222) i svaki prirodni broj, osim broja 1, sljedbenik je nekog prirodnog broja (iz toga slijedi posebna uloga broja 1 u skupu **N**).

2. Skup **N** je beskonačan skup.

3. Na skupu **N** definirane su dvije binarne ili računske operacije (tj. preslikavanje iz skupa **N**×**N** u skup **N**):

   zbrajanje: $+ : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (npr. $+(11,28) = \underbrace{11 + 28}_{\textit{pribrojnici}} = \underbrace{39}_{\textit{zbroj}}$)

   množenje: $\cdot : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (npr. $\cdot(11,4) = \underbrace{11 \cdot 4}_{\textit{faktori}} = \underbrace{44}_{\textit{umnožak}}$)

   Za $a, b, c \in \mathbf{N}$ te operacije imaju sljedeća svojstva:

   1) $a+b=b+a$ zakon komutativnosti za zbrajanje;
   2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ zakon asocijativnosti za zbrajanje;
   3) $a\cdot b=b\cdot a$ zakon komutativnosti za množenje;
   4) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ zakon asocijativnosti za množenje;
   5) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ zakon distributivnosti.

4. Ako za $a, b \in$ **N** vrijedi $a + x = b$ gdje je $x \in$ **N**, onda se kaže da je b **veći od** a i piše $b>a$ ili $a<b$.

   Očito je da vrijedi: $1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots$, a to znači da skup **N** ima najmanji element (to je broj 1), a nema najveći element.

5. Ako je $a \in$ **N**, onda se brojevi oblika $a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots$ zovu **višekratnici** broja a. Npr. višekratnici broja 8 su brojevi 8, 16, 24, ...

Ako je $a \in$ **N**, onda se brojevi oblika $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ zovu **potencije** broja a. Pri tom vrijedi: $a^1 = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a$, itd. Kod potencije a^n, broj a se zove **baza**, a broj n **eksponent potencije**.

Lako se provjeri da vrijede sljedeće jednakosti za $a, b, m, n \in$ **N:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n},$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

6. Prirodni broj b **djeljiv** je prirodnim brojem a ako je b višekratnik od a, tj. ako postoji $k \in$ **N** takav da je $b = k \cdot a$. Tada se još kaže da je a mjera od b ili a dijeli b i piše $a \mid b$.

   Primjer: $3|21$ jer je $21 = 7 \cdot 3$. Još se piše

21	:	3	=	7
djeljenik		*djelitelj*		*količnik*
(dividend)		*(divizor)*		*(kvocijent)*

   Ako a ne dijeli b piše se $a \nmid b$.

   Primjer: $3 \nmid 20$ jer ne postoji $k \in$ **N** takav da je $20 = k \cdot 3$.

   Dakle, za proizvoljne prirodne brojeve a i b vrijedi: $a \mid b$ ili $a \nmid b$, tj. dijeljenje nije uvijek izvedivo u skupu **N**.

7. Prirodni broj $n \neq 1$ je **prost** ili **prim broj** ako iz $a \mid n$ slijedi da je $a = 1$ ili $a = n$. Prirodni broj $n \neq 1$ je **složen broj** ako nije prost broj. Drugim riječima, $n \neq 1$ je prost broj ako je djeljiv samo s brojem 1 i sa samim sobom (tj. ako ima točno 2 djelitelja), a složen ako ima više od 2 djelitelja.

   Prvih nekoliko prostih brojeva su 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Može se pokazati da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Svaki se složeni broj može prikazati kao umnožak prostih brojeva.

   Primjer: $2772 = 2 \cdot 1386 = 2 \cdot 2 \cdot 693 = \cdots = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

   Dakle, prosti brojevi su na neki način opeke od kojih su sastavljeni svi prirodni brojevi.

8. Zajednička mjera prirodnih brojeva *a* i *b* je prirodan broj *d* koji je djelitelj oba broja *a* i *b*, tj. $d \mid a$ i $d \mid b$. Najveći takav broj zove se **najveća zajednička mjera** brojeva *a* i *b* i označava M(*a*, *b*).

   Primjer: M(12,18) = 6, M(375,105) = 15, M(12,17) = 1.

   Ako je M(*a*, *b*) = 1, tada kažemo da su brojevi *a* i *b* **relativno prosti**.

   Zajednički višekratnik prirodnih brojeva *a* i *b* je prirodan broj *c* koji je višekratnik oba broja *a* i *b*, odnosno $a \mid c$ i $b \mid c$. Najmanji takav broj zove se **najmanji zajednički višekratnik** brojeva *a* i *b* i označava v(*a*, *b*).

   Primjer: v(12, 18) = 36, v(375, 105) = 2625, v(12, 17) = 204.

   Vrijedi teorem: $M(a,b) \cdot v(a,b) = a \cdot b$.

9. Budući da prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, potrebno je uvesti ekonomičan način njihova zapisivanja i imenovanja. Stari Rimljani zapisivali su ih ovako: I, II, III, IV, V, …, X, …, L, …, C, …, D, …, M,… Tako je na primjer MCMXCII zapis broja 1992. Vidimo da je taj način dosta nezgrapan i ograničen. Današnji način zapisivanja brojeva je indijsko-arapskog porijekla i spada u najvažnije pronalaske u povijesti čovječanstva. Taj

način zove se **pozicioni brojevni sustav**, a sastoji se samo od nekoliko brojevnih znakova (znamenaka) i naziva. Svaka znamenka u tom sustavu ima svoju brojevnu i mjesnu (pozicionu) vrijednost.

U svakodnevnom životu prirodne brojeve zapisujemo u sustavu kojemu je baza b = 10. Taj sustav zove se **dekadski ili decimalni sustav** i ima znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9, a čija si imena nula, jedan, dva, …, devet. U tom sustavu je 3128 zapis broja $3\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 8\cdot 1$, a ime mu je tri tisuće sto dvadeset osam.

Ako je baza sustava b = 2, brojevni sustav zove se **binarni ili dijadski**. Taj sustav ima samo dvije znamenke i to 0 i 1. U tom sustavu zapis prvih deset prirodnih brojeva je: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.

Primjer: $1010 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8 + 2 = 10$, a 11010011 je binarni zapis broja $1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 211$.

Iz navedenog slijedi: što je baza sustava veća, sustav ima više znamenaka, a zapis broja je kraći i obrnuto.

Napomenimo da svi računski strojevi rade u binarnom sustavu jer je pomoću električnih sklopova lako realizirati dva znaka (teče-ne teče, uključeno-isključeno).

4. SKUP CIJELIH BROJEVA

Promotrimo jednostavnu linearnu jednadžbu oblika $a = b + x$, gdje su $a,\ b \in$ **N**, npr. $11 = 5 + x$, $7 = 7 + x$, $4 = 9 + x$. Vidimo da jednadžba tog oblika ima rješenje u skupu prirodnih brojeva **N** jedino u slučaju kad je a>b. Da li promatrana jednadžba imala rješenje za svaki izbor brojeva $a,\ b \in$ **N**, uvodimo nove brojeve, odnosno pojam broja proširujemo.

Broj 0 (nula) definira se kao rješenje jednadžbe $n = n + x$. Dakle, $n = n + 0$ ili $n = n + x \Rightarrow x = 0$. Kaže se da je 0 neutralni element za zbrajanje.

Negativni cijeli broj $-n$ definira se kao rješenje jednadžbe $0 = n + x$, $n \in$ **N**. Dakle, $0 = n + (-n)$ ili $0 = n + x \Rightarrow x = -n$.

Skup negativnih cijelih brojeva označavamo sa **-N**, odnosno

$$\mathbf{-N} = \{-n \mid n \in N\} = \{-1, -2, -3, \ldots, -n, -n-1, \ldots\}.$$

Sada možemo definirati skup cijelih brojeva, kojeg označavamo **Z**, kao uniju skupa **N**, skupa **-N** i skupa {0}:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{-N} \cup \{0\} \cup \mathbf{N} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Očito je **N** $\subset$ **Z**, a prirodni brojevi zovu se i pozitivni cijeli brojevi.

Iz navedenog slijedi da jednadžba $a = b + x$, gdje su $a,\ b \in$ **N**, a koju smo naveli na početku ovog razmatranja ima rješenje u skupu cijelih brojeva **Z** za svaki izbor brojeva $a,\ b \in$ **N.**

Primjer: $7 = 7 + x \Rightarrow x = 0$; $4 = 9 + x \Rightarrow x = 4 - 9 \Rightarrow x = -5$.

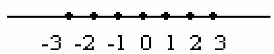
Te jednadžbe imaju rješenje i za svaki izbor brojeva $a,\ b \in$ **Z**.

Primjer: $7 = -4 + x \Rightarrow x = 7 - (-4) \Rightarrow x = 7 + 4 \Rightarrow x = 11$;

$-11 = 23 + x \Rightarrow x = -11 - 23 \Rightarrow x = -34$.

Sada kada smo definirali skup **Z**, navedimo njegova svojstva.

1. Skup **Z** može se prikazati na brojevnom pravcu kao niz ekvidistantnih točaka. Brojevni pravac je pravac na kojemu su odabrane dvije točke koje određuju jediničnu dužinu. Ako prvu od tih točaka označimo sa 0, a drugu sa 1, tada je svakom cijelom broju pridružena jedna točka brojevnog pravca:



   To dalje znači da skup **Z** nema ni najmanji ni najveći element, te da se između bilo koja dva cijela broja nalazi samo konačno mnogo cijelih brojeva. Stoga se kaže da je skup **Z diskretan skup**, a nije gust skup.

2. I na skupu **Z** definirane su računske ili binarne operacije $+ : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ i $\cdot : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, zbrajanje i množenje, i one imaju ista svojstva kao i na skupu **N**.

   Vrijedi teorem:

$$
\begin{aligned}
&(-a)+(-b) = -(a+b);\\
&-(-a) = a;\\
&0 \cdot a = 0;\\
&(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -a\cdot b;\\
&(-a)\cdot(-b) = a\cdot b.
\end{aligned}
$$

3. **Teorem o dijeljenju:** Ako su a i b cijeli brojevi i b>0, onda su jednoznačno određeni cijeli brojevi q i r takvi da je $a = q \cdot b + r,\ \ 0 \le r < b$.

   Broj r zove se ostatak pri dijeljenju broja a s brojem b. Ako je $r = 0$, onda b dijeli a.

   ***<u>Primjer</u>**:* Za brojeve $a = 123$, $b = 16$ lako se provjeri da je $q = 7$, $r = 11$.

   Naime, vrijedi $123 = 7 \cdot 16 + 11$.

5. SKUP RACIONALNIH BROJEVA

Skup $\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ proširili smo na skup $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$ zahtjevom da jednadžba $b+x=a$ ima rješenje za svaki izbor brojeva $a,\ b\in$ **N**. Promotrimo sada jednadžbe oblika $b\cdot x=a$, gdje su $a,\ b\in$ **Z** i $b\neq 0$. Npr. $3x=-18\Rightarrow x=-\frac{18}{3}\Rightarrow x=-6$, dakle njeno rješenje je x = -6 (jer zaista vrijedi $3\cdot(-6)=-18$), dok jednadžba $3x=5$ nema rješenja u skupu **Z** jer ne postoji cijeli broj koji pomnožen s brojem 3 daje broj 5. Da bi ovu jednadžbu mogli riješiti primorani smo pojam broja proširiti uvođenjem **razlomka** ili **kvocijenta** definiranog sa:

$$x=\frac{a}{b}\Leftrightarrow bx=a \quad ,(b\neq 0)\ .$$

Iz ove definicije i činjenice da se jednadžba $bx=a$ ne mijenja množenjem njene lijeve i desne strane istim brojem različitim od nule, slijedi definicija jednakosti dvaju razlomaka:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\ .$$

Skup svih razlomaka zove se **skup racionalnih brojeva** i označava sa **Q**:

$$\mathbf{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbf{Z}\text{ i }b\neq 0\}.$$

Budući da za cijeli broj $a\in$ **Z** vrijedi $a=\frac{a}{1}=\frac{ab}{b}\in\mathbf{Q}$, skup **Z** je podskup skupa **Q**, odnosno

$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$.

Na skupu **Q** definirane su također operacije zbrajanja, množenja i dijeljenja na slijedeći način:

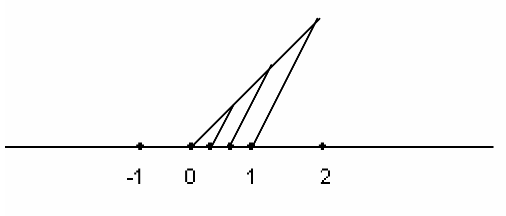
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Skup **Q** može se prikazati kao unija tri međusobno disjunktna skupa:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_{+}\cup\mathbf{Q}_{-}\cup\{0\},$$

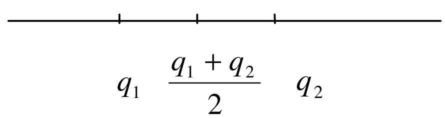
gdje je $\mathbf{Q}_{+}=\left\{\frac{a}{b}\mid a\cdot b>0\right\}$ skup pozitivnih racionalnih brojeva, $\mathbf{Q}_{-}=\left\{\frac{a}{b}\mid a\cdot b<0\right\}$ skup negativnih racionalnih brojeva, a {0} jednočlani skup koji se sastoji samo od broja 0.

Skup Q se također može prikazati na brojevnom pravcu:



(na slici je prikazana konstrukcija kojom smo došli do točke pridružene broju $\frac{1}{3}$)

To znači da svakom racionalnom broju $q \in \mathbf{Q}$ pripada jedna točka brojevnog pravca. Da li vrijedi i obratno, da li svakoj točki brojevnog pravca pripada jedan racionalan broj? Vidjet ćemo da to ne vrijedi. Lako se može pokazati da između bilo koja dva različita racionalna broja postoji racionalan broj. Neka su $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ i $q_1 < q_2$. Između brojeva q_1 i q_2 nalazi se broj $\frac{q_1 + q_2}{2}$ (to je njihova aritmetička sredina).



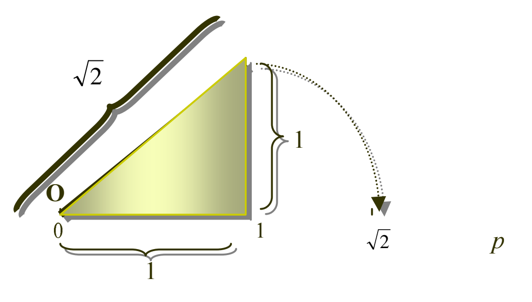
I između brojeva q_1 i $\frac{q_1 + q_2}{2}$ se nalazi njihova aritmetička sredina, itd. Budući da se to zaključivanje može ponavljati beskonačno mnogo puta, slijedi da između bilo koja dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Stoga se kaže da je skup **Q** **gust skup** (a nije diskretan). Iz toga dalje slijedi da racionalan broj nema svog neposrednog prethodnika ni sljedbenika.

Svaki racionalni broj $q = \frac{a}{b}$ može se dijeljenjem brojnika s nazivnikom prikazati u obliku decimalnog broja. Npr. $\frac{103}{50} = 2.06$; $\frac{2}{11} = 0.181818\ldots = 0.\overline{18}$; $\frac{29}{22} = 1.31818\ldots = 1.3\overline{18}$.

Vidimo da je svaki racionalni broj ili **konačni decimalni broj** ili **beskonačni periodički decimalni broj**. Vrijedi i obratno, svaki takav decimalni broj može se prikazati u obliku razlomka. Npr. $2.8\overline{34} = \frac{1403}{495} \in \mathbf{Q}$.

6. SKUP REALNIH BROJEVA

Vidjeli smo da su racionalni brojevi ili konačni decimalni brojevi ili beskonačni periodički decimalni brojevi. Sada se možemo upitati što su beskonačni neperiodični decimalni brojevi, npr. broj 3.171771777… ili broj $\pi = 3.141592\ldots$ (javlja se kod računanja opsega ili površine kruga) ili broj $e = 2.718281828\ldots$ (uzima se kao baza eksponencijalne i logaritamske funkcije). Prema prethodnom, oni nisu razlomci odnosno racionalni brojevi, a to znači da postoje brojevi koji nisu racionalni. Primjer takvog broja je i broj $\sqrt{2}$, tj. broj sa svojstvom $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Može se pokazati: $\sqrt{2} = 1.41421\ldots \notin \mathbf{Q}$. Ta nam činjenica omogućava da geometrijskom konstrukcijom dođemo do točke na brojevnom pravcu koja nije pridružena nijednom racionalnom broju:



Isto vrijedi i za broj $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$ Dakle, iako točke pridružene racionalnim brojevima leže gusto na brojevnom pravcu, one ipak nisu sve njegove točke. Postoje i druge točke, za koje kažemo da pripadaju **skupu iracionalnih brojeva I**. Ponovimo, iracionalni brojevi su beskonačni neperiodični decimalni brojevi: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \pi, e$.

Unija skupa racionalnih i skupa iracionalnih brojeva zove se **skup realnih brojeva** i označava sa **R**. Dakle,

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset.$$

Vrijedi: svakom realnom broju pridružena je jedna točka brojevnog pravca i obratno, svakoj točki brojevnog pravca pridružen je jedan realan broj. To znači da između skupa **R** i skupa točaka brojevnog pravca postoji preslikavanje koje je bijekcija.

Skup **R** ima fundamentalno značenje u tzv. višoj matematici.

Vrijedi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

7. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA

Promotrimo jednadžbu $x^2 - 2 = 0$. Njena rješenja su brojevi $\sqrt{2}$ i -$\sqrt{2}$. To su iracionalni brojevi, a ne racionalni brojevi, što znači da ta jednadžba nema rješenja u skupu racionalnih brojeva **Q**, a ima rješenje u skupu realnih brojeva **R** = **Q** $\cup$ **I**.

Promotrimo sada jednadžbu $x^2 + 2 = 0$. Ova jednadžba nema rješenja u skupu **R**, jer je kvadrat svakog realnog broja nenegativan broj, pa ne postoji realan broj x takav da je $x^2 = -2$. Da bi se došlo do rješenja ove jednadžbe, pojam broja odnosno skup brojeva se i dalje proširuje uvođenjem broja *i*, kojeg zovemo **imaginarna jedinica**, a koji po dogovoru ima svojstvo da je njegov kvadrat broj -1:

$$i^2 = -1.$$

Pomoću broja i izgrađujemo brojeve oblika $z = a + bi$, gdje su $a, b \in$ **R**, a koje zovemo kompleksni brojevi.

Skup $\mathbf{C} = \{ z = a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ naziva se **skup kompleksnih brojeva**.

Budući da za $a \in \mathbf{R}$ vrijedi $a = a + 0i \in$ C, svaki realni broj je i kompleksni broj pa vrijedi $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Dakle, vrijedi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Gore promatrana jednadžba $x^2 + 2 = 0$ ima rješenja (korijene) u skupu **C**. To su brojevi $x_1 = +\sqrt{2}i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$.

Svaka kvadratna jednadžba, tj. jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = 0$, ima dva rješenja koji su kompleksni brojevi (ti brojevi mogu biti realni, ali ne moraju).

II. ELEMENTI LINEARNE ALGEBRE

1. LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Ako su dva matematička izraza jednaka samo za neke vrijednosti općih brojeva koji se u njima pojavljuju, i te vrijednosti treba odrediti, ta odredbena jednakost zove se **jednadžba**. Opći brojevi koji se u jednadžbi pojavljuju zovu se **nepoznanice** i obično se označavaju sa *x, y, z,* itd.

Riješiti jednadžbu znači naći sve vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju jednakost. Te vrijednosti nepoznanica zovu se **rješenja** ili **korijeni jednadžbe**. Opći oblik jednadžbe s jednom nepoznanicom je:

$$\underset{\substack{lijeva \\ strana}}{A(x)} = \underset{\substack{desna \\ strana}}{B(x)}.$$

Odredimo broj x za koji vrijedi $4 \cdot x = 28$. Traženi broj je $x = 7$. Jednadžba $4 \cdot x = 28$ zove se linearna jednadžba s jednom nepoznanicom.

Opći oblik linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom je $ax = b$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$ (dakle, brojevi a, b su neke konstante – zovu se koeficijenti, a x se zove nepoznanica).

I svaka druga jednadžba koja se elementarnim transformacijama može svesti na jednadžbu oblika $ax = b$ je linearna jednadžba s jednom nepoznanicom, npr. $\frac{x-2}{10} - \frac{x+3}{6} = \frac{1}{2}$ (rješenje joj je $x = -18$).

Mogući su ovi slučajevi:

1. $a \neq 0$. Rješenje je $x = \frac{b}{a}$ (ovo je najčešći slučaj);
2. $a = 0$: Ako je $b = 0$, imamo $0 \cdot x = 0$, pa je rješenje svaki $x \in \mathbf{R}$;

   Ako je $b \neq 0$, imamo $0 \cdot x = b$, pa jednadžba nema rješenja (jer je $0 \cdot x = 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$, pa ne može biti $0 \cdot x = b \neq 0$). U ovom slučaju kaže se da je jednadžba nemoguća.

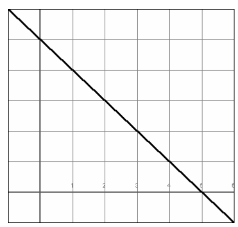
2. LINEARNE JEDNADŽBE S DVIJE NEPOZNANICE

Opći oblik linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

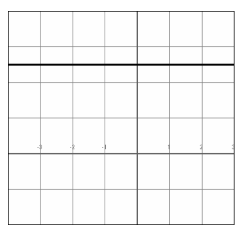
$$ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Primjer: $x + y = 5$.

Rješenje ove jednadžbe su brojevi $x = 1$, $y = 4$, tj. uređeni par brojeva (1, 4). Lako se vidi da su i uređeni parovi (2, 3), (0, 5), (-1, 6), … također rješenja, a to znači da ova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Ako ovu jednadžbu napišemo u obliku $y = -x + 5$ vidimo da ona predstavlja jednadžbu pravca, pa svaka točka tog pravca predstavlja jedno rješenje jednadžbe.



Svaka jednadžba oblika $ax + by = c$ ima beskonačno mnogo rješenja (jer toliko točaka ima pravac).



Ako je $a = 0$, npr. $2y = 5$, onda je taj pravac paralelan s osi apscisa, a ako je $b = 0$, npr. $x = -3$, pravac je paralelan s osi ordinata.

3. SUSTAV OD DVIJE LINEARNE JEDNADŽBE S DVIJE NEPOZNANICE

Opći oblik sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice je:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Realni brojevi $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (kraće $a_{ij}, i = 1,2, j = 1,2$) zovu se **koeficijenti uz nepoznanicu**, a b_1, b_2 (kraće $b_i, i = 1,2$) **slobodni koeficijenti**. **Rješenje sustava** je uređeni par (x_1, x_2) koji zadovoljava obje jednadžbe sustava.

Primjer 1: $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Ovaj sustav možemo riješiti **metodom supstitucije** (jednu nepoznanicu iz jedne jednadžbe izrazimo preko druge pa je uvrstimo u drugu jednadžbu) ili **metodom suprotnih koeficijenata**:

$$\begin{aligned} &x - 2y = 1 \\ &\underline{x + y = 2 \,/\cdot (-1)} \\ &\left.\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -x - y &= -2 \end{aligned}\right| + \\ &-3y = -1 \,/ : (-3) \\ &y = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ovo uvrstimo u bilo koju početnu jednadžbu: $x - 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

Dakle, rješenje sustava je uređeni par $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Kažemo da ovaj sustav ima **jedno rješenje** (ili **jedinstveno rješenje**).

<u>Primjer 2</u>:

$$\begin{cases} x-2y=1 /\cdot(-2) \\ \underline{2x-4y=2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x+4y=-2 \\ \underline{2x-4y=2} \end{array}\right| +$$

$$0=0$$

Rješavajući ovaj sustav dobili smo $0 = 0$ i to zbog toga što su ove dvije jednadžbe ekvivalentne. Stoga je rješenje ovog sustava uređeni par koji zadovoljava samo prvu jednadžbu. To je jednadžba s dvije nepoznanice pa ima **beskonačno mnogo rješenja**: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, (1,0), (5,2), … odnosno: $\left\{\left(x, \frac{x-1}{2}\right) \mid x \in R\right\}$.

<u>Primjer 3</u>:

$$\begin{cases} x-2y=1 /\cdot(-2) \\ \underline{2x-4y=20} \end{cases}$$

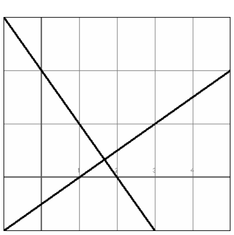
$$\left.\begin{array}{l} -2x+4y=-2 \\ \underline{2x-4y=20} \end{array}\right| +$$

$$0=18$$

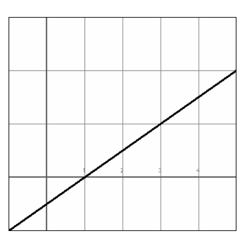
Ovdje vidimo da ne možemo doći do rješenja. Prva jednadžba je $x - 2y = 1$, a druga (ako je podijelimo s 2) $x - 2y = 10$, pa ne postoji uređeni par (x,y) koji zadovoljava i prvu i drugu jednadžbu. Dakle, ove jednadžbe su u protuslovlju jedna s drugom, one su kontradiktorne, pa ovaj sustav **nema rješenja**. Kažemo da je **sustav nemoguć**.

Ako se sjetimo geometrijske interpretacije navedenih sustava (jednadžba sustava je linearna funkcija čiji je graf pravac, a rješenje sustava je sjecište tih pravaca), dobivena rješenja su u skladu s međusobnim položajem pravaca:

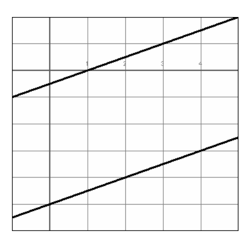
<u>Primjer 1.</u>



<u>Primjer 2.</u>



<u>Primjer 3.</u>



Sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice može imati jedinstveno rješenje, beskonačno mnogo rješenja ili nema rješenja. To općenito vrijedi i za sustave linearnih jednadžbi (m jednadžbi s n nepoznanica).

Vratimo se na opći oblik sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\}(*)$$

slobodni koeficijenti

Metodom suprotnih koeficijenata i uz uvjet $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, lako se vidi da je rješenje ovog sustava $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, tj. rješenje ovog sustava je uređeni par

$$\left(\frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right).$$

Broj $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ bilježimo kraće kao vrijednost determinante 2. reda $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, gdje je determinanta 2. reda funkcija koja svakoj četvorci brojeva $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ pridružuje broj $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, tj.

retci

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

stupci

Stoga vrijedi i $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Ako prvu od tih determinanti označimo s D, drugu sa D_1 a treću sa D_2 , rješenje promatranog sustava (*) možemo kratko zapisati u obliku $\left(\dfrac{D_1}{D}, \dfrac{D_2}{D}\right)$. To rješenje vrijedi samo uz uvjet da je D = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Ako taj uvjet nije ispunjen, sustav nema rješenja ili ih ima beskonačno mnogo. Uočimo da determinante D_1 i D_2 nastaju iz determinante D tako da 1. odnosno 2. stupac determinante D zamijenimo stupcem slobodnih koeficijenata.

Riješimo prethodni ***primjer 1*** pomoću determinanti: $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

Iz zadanog sustava vidimo da je determinanta $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 1\cdot(-2) = 1+2 = 3$,

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot(-2) = 1+4 = 5$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 2-1 = 1$.

Odatle slijedi da je rješenje sustava: $\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. SUSTAV OD *n* JEDNADŽBI S *n* NEPOZNANICA

Neka je zadan **sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Taj sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je determinanta sustava različita od nule, tj. ako je

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

To jedinstveno rješenje formalno je jednako građeno kao i rješenje sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. **Rješenje** je uređena trojka $\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right)$, gdje su D_1, D_2, D_3 determinante 3. reda:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Jednako vrijedi i za sustav od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice, odnosno općenito za sustav od n jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Brojevi $a_{ij} \in \mathbf{R}$, i,j = 1, 2, ..., n se zovu **koeficijenti uz nepoznanice**, a brojevi $b_i \in \mathbf{R}$, i = 1, 2, ..., n **slobodni koeficijenti**.

Ako je determinanta tog sustava različita od nule, tj. ako je

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

onda se takav sustav zove **Cramerov sustav**. Može se pokazati da Cramerov sustav ima jedinstveno rješenje zadano sa $\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, ..., \frac{D_n}{D}\right)$. Rješenje je, dakle, uređena n-torka $(x_1, x_2, ..., x_n)$ zadana sa $x_i = \frac{D_i}{D}$, i = 1,2, ..., n. Tu je D_i (i = 1,2,...,n) determinanta n-tog reda koja nastaje iz determinante D tako da se njezin i-ti stupac zamijeni stupcem slobodnih koeficijenata.

Ostaje još pitanje kako se računa determinanta n- tog reda $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

5. DETERMINANTE

Determinanta 1. reda je funkcija koja na broju a_{11} ima vrijednost a_{11}, tj.

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

(Iz konteksta je uvijek jasno radi li se o determinanti 1. reda ili apsolutnoj vrijednosti.) To je u skladu s rješenjem $\frac{b_1}{a_{11}}$ jednadžbe $a_{11}x_1 = b_1$, jer je i po Crameru $x_1 = \frac{|b_1|}{|a_{11}|} = \frac{b_1}{a_{11}}$ za $|a_{11}| \neq 0$.

U vezi s determinantom n-tog reda definira se prethodno **algebarski komplement** A_{ij} elementa a_{ij} (koji se nalazi u *i*-tom retku i *j*-tom stupcu determinante):

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.$$

Pri tom je D_{ij} determinanta (n-1)-og reda koja se na "prirodan" način dobije od elemenata determinante n-tog reda kad se u njoj izostave svi elementi i-tog retka i j-tog stupca.

Sad se može dati (induktivna) **definicija determinante** u dva koraka:

(I.) $|a_{11}| = a_{11}$

(II.) $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$, za $n \geq 2$

(Elemente 1. retka redom množimo s pripadnim algebarskim komplementima i dobivene umnoške zbrojimo.)

Ovo se zove **Laplace-ov razvoj determinante po elementima 1. retka**. Pomoću njega se determinanta n-tog reda svodi na zbroj n determinanti (n-1)-og reda.

Po definiciji je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} =$$

$$= a_{11} \cdot 1 \cdot |a_{22}| + a_{12} \cdot (-1) \cdot |a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

što se poklapa s našom ranijom definicijom determinante 2. reda.

Izračunajmo determinantu 3. reda po definiciji:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -6 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot D_{13} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (0-4) - 2 \cdot (12-20) + 3 \cdot (-2-0) = -4 + 16 - 6 = 6.$$

Navedimo sada **svojstva determinanti**:

a) *Ravnopravnost redaka*:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Kažemo da je determinanta razvijena po elementima i-toga retka.

b) *Ravnopravnost stupaca s recima*:

$$\begin{vmatrix} \vdots & a_{1j} & \vdots \\ \vdots & a_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{nj} & \vdots \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Kažemo da je determinanta razvijena po elementima j-tog stupca.

c) *Determinanta u kojoj su svi elementi nekog retka (stupca) jednaki nuli, jednaka je nuli.*

d) *Ako u determinanti D zamijenimo dva retka (stupca) dobije se determinanta D^* takva da je $D^* = -D$, tj. vrijednost determinante promijeni predznak.*

e) Najvažnije svojstvo determinante*: Ako elemente nekog retka (stupca) pomnožimo redom istim brojem α i dodamo odgovarajućim elementima nekog drugog retka (stupca), vrijednost determinante se ne mijenja.*

Svojstvo e) važno je za brže računanje determinanti reda većeg od 3.

***Primjer*:** Izračunajmo determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ prvo bez korištenja svojstva e), a zatim pomoću njega.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \textit{razvoj determinante, npr. po 4.retku (svojstvo a))} =$$

$$= 0 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 2 \cdot A_{44} = 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot D_{42} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot D_{43} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot D_{44} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{A} + (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{B} + 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{C} =$$

Sad trebamo izračunati tri determinante 3. reda. Radi bolje preglednosti računat ćemo svaku determinantu posebno.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \textit{razvoj determinante po, npr. 2. stupcu} =$$

$$= 3 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot D_{32} =$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (2-1) - (1-4) = -3 + 3 = 0$$

$$B=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\textit{razvoj determinante po, npr. 1. retku}=$$

$$=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+2\cdot A_{13}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot D_{11}+2\cdot(-1)^{1+3}\cdot D_{13}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=(1-2)+2(4-1)=-1+6=5$$

$$C=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=\textit{razvoj determinante po, npr. 2. retku}=$$

$$=2\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}=2\cdot(-1)^{2+1}\cdot D_{21}+1\cdot(-1)^{2+2}\cdot D_{22}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}0&3\\2&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\1&1\end{vmatrix}=-2(0-6)+(1-3)=12-2=10$$

Vratimo vrijednosti determinanti A, B i C u početnu determinantu:

$$1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&3&2\\2&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}}_{A}+(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}}_{B}+2\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&3\\2&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}}_{C}=1\cdot0-1\cdot5+2\cdot10=15\,.$$

- Riješimo sada tu istu determinantu pomoću svojstva e):

$$\begin{vmatrix}1&0&3&2\\2&1&0&1\\1&2&1&1\\0&1&1&2\end{vmatrix}\cdot(-2)\cdot(-1)=\begin{vmatrix}1&0&3&2\\0&1&-6&-3\\0&2&-2&-1\\0&1&1&2\end{vmatrix}=\textit{razvoj po 1. stupcu}=1\cdot A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot D_{11}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}1&-6&-3\\2&-2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}\cdot(-2)\cdot(-1)=\begin{vmatrix}1&-6&-3\\0&10&5\\0&7&5\end{vmatrix}=\textit{razvoj po 1. stupcu}=$$

$$=1\cdot A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}10&5\\7&5\end{vmatrix}=50-35=15\,.$$

6. MATRICE

A) DEFINICIJA

Matrica je pravokutna tablica koja se sastoji od $m \cdot n$ realnih brojeva a_{ij} smještenih (zapisanih) u m redaka i n stupaca:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

redci

stupci

Tu je $m,n \in$ **N**, opći element matrice je realni broj $a_{ij} \in$ **R**, i = indeks retka = $\{1,2,...,m\}$, j = indeks stupca = $\{1,2,...,n\}$. Kaže se da je **matrica A tipa ili formata** (m,n) ili $m \times n$.

Evo nekoliko primjera matrica: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ \frac{3}{7} & -7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & 9 \\ 4 & \frac{4}{11} & 0 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ = stupčana matrica, $D = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ = retčana matrica, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = nul-matrica.

Kraća oznaka za opću matricu A je $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$. **Skup svih matrica tipa (m,n)** označavamo sa $M_{m,n}$. Dakle, $M_{m,n}$ = {A | A je matrica tipa (m,n)}.

Tako je u navedenim primjerima $A \in M_{2,3}$, $B \in M_{3,3}$, $C \in M_{4,1}$, $D \in M_{3,1}$.

Ako je $m = n$, matrica se zove **kvadratna matrica reda *n***: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Skup svih kvadratnih matrica reda *n* označava se sa M_n. Kvadratna matrica ima **glavnu dijagonalu** koja se sastoji od elemenata kojima su indeksi jednaki: $i = j$, i **sporednu dijagonalu**. Posebno je važna kvadratna matrica kojoj su svi elementi 0 osim elemenata na glavnoj dijagonali koji su 1. Zove se **jedinična matrica** i označava sa E ili I.

$$E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{jedinična matrica reda } n.$$

Tu je dakle, $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, $a_{ij} = 1$ za $i = j$.

Svakoj matrici možemo pridružiti njenu transponiranu matricu. Ako je A matrica, tada je njena **transponirana matrica** A^T matrica čiji su redci stupci matrice A.

<u>Primjer</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 10 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$.

Očito je da vrijedi: $(A^T)^T = A$.

B) ZBRAJANJE MATRICA, MNOŽENJE REALNOG BROJA I MATRICE, MNOŽENJE MATRICA

Definicija. Ako je $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}$ i $B=[b_{ij}]\in M_{m,n}$, onda je njihov **zbroj A + B matrica** $C=[c_{ij}]\in M_{m,n}$ zadana sa

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\quad \forall i=\{1,2,\dots,m\}, \forall j=\{1,2,\dots,n\}.$$

Piše se A + B = C.

Dakle, zbrajanje matrica je preslikavanje $+: M_{m,n}\times M_{m,n}\to M_{m,n}$, tj. ono je linearna operacija na skupu $M_{m,n}$.

Primjer: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Definicija. **Umnožak realnog broja** $\lambda\in\mathbf{R}$ **i matrice** $A=[a_{ij}]\in M_{m,n}$ je matrica $\lambda A=B=[b_{ij}]\in M_{m,n}$ zadana sa $b_{ij}=\lambda a_{ij}, \forall i,j.$

Dakle, množenje realnog broja i matrice je preslikavanje: $R\times M_{m,n}\to M_{m,n}$, $(\lambda, A)\mapsto \lambda A$.

Primjer: $5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & -10 & 15 \end{bmatrix}$.

Iz ove definicije slijedi: ako svi elementi matrice imaju neki zajednički faktor, taj faktor se može izvući ispred matrice.

Primjer: $\begin{bmatrix} 3 & 18 & -33 \\ 0 & -6 & 9 \end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 6 & -11 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Svojstva navedenih preslikavanja dana su u slijedećem teoremu.

Teorem. Ako su A, B i C matrice istog tipa, a λ, μ realni brojevi onda vrijedi:

1. A + B = B + A (zakon komutacije);
2. A + (B + C) = (A + B) + C (zakon asocijacije);
3. A + 0 = A (nul-matrica je neutralni element);
4. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Prije nego definiramo množenje matrica, napomenimo da je umnožak AB definiran samo onda kada matrica A ima toliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Dakle, ako je A tipa (m,n), B mora biti tipa (n,p). U tom slučaju kažemo da su matrice A i B **ulančane matrice** (u tom redoslijedu).

Definicija. **Umnožak matrice $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ tipa (m,n) i matrice $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ tipa (n,p)** je matrica AB = C = $\lfloor c_{ij} \rfloor$ tipa (m,p) zadana sa $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$;

$i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,p$.

Slijedi, $c_{ij} =$ *i*-ti redak od A × *j*-ti stupac od B.

Npr. $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$ = 1. redak matrice A × 2. stupac matrice B.

Prema tome, množenje matrica je preslikavanje: $M_{m,n} \times M_{n,p} \to M_{m,p}$.

Primjer: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 9 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 3 \\ 7\cdot 7 + 10\cdot 2 + 0\cdot 1 & 7\cdot 9 + 10\cdot(-2) + 0\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 69 & 43 \end{bmatrix}$

Teorem. Ako dolje navedeni umnošci matrica postoje, onda vrijedi:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (zakon asocijacije);
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (zakon distribucije);
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot B + B \cdot C$ (zakon distribucije);
4. $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$ (zakon kvaziasocijacije);
5. $A \cdot E = E \cdot A = A$ (jedinična matrica je neutralni element za množenje);
6. $A \cdot B \neq B \cdot A$ (ne vrijedi zakon komutacije).

7. GAUSSOVA METODA ELIMINACIJE

Promotrimo sada opći slučaj sustava linearnih jednadžbi. To je sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}(*)$$

Rješenje sustava je uređena n-torka brojeva $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koja zadovoljava svaku jednadžbu sustava, tj. uvrštena u svaku jednadžbu pretvara ju u jednakost brojeva.

Mogu nastupiti tri slučaja:

a) Sustav ima jedno jedino rješenje;
b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja. U tom slučaju kažemo da sustav ima parametarsko rješenje jer ono zavisi od jednog ili više parametara (realnih brojeva);
c) Sustav može ne imati rješenje.

U prva dva slučaja kažemo da je **sustav rješiv ili moguć**, a u trećem da je **nerješiv ili nemoguć**.

Sustav (*) može se na jednostavniji način prikazati pomoću matrica. Ako uvedemo matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \text{matrica sustava}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \text{ i } \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sustav (*) se može napisati u obliku matrične jednadžbe $A \cdot X = B$. Naime, iz definicije množenja matrica i jednakosti matrica slijedi da je ova matrična jednadžba ekvivalentna sa sustavom.

Gaussova metoda eliminacije sastoji se u tome da se formira **proširena matrica sustava** (*), a to je matrica

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Zatim se ta proširena matrica A_p **elementarnim operacijama** nad <u>recima</u>, a to su:

a) zamjena mjesta dvaju redaka,

b) množenje nekog retka brojem različitim od nule,

c) dodavanje nekog retka pomnoženog brojem različitim od nule nekom drugom retku,

svodi na ekvivalentnu matricu kojoj su svi elementi ispod elemenata $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ jednaki nuli.

Tim postupkom zadani sustav svodimo na ekvivalentni sustav za koji se lako vidi da li ima rješenje, i ako ga ima kako ono izgleda.

Primjer 1.

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 10 \end{array}\right] \cdot (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right] \cdot (-1) \cdot (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array}\right] : 7 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \cdot (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ x = -1, y = 1, z = 2 $\Rightarrow$ Rješenje sustava: (-1, 1, 2).

Ovaj sustav je Cramerov, pa smo ga prije riješili Cramerovim pravilom: $\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D} \right)$.

U ovom primjeru je $m = n = 3$, pa je matrica sustava $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ kvadratna matrica.

Njena determinanta je $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, a to znači da matrica A ima inverznu matricu A^{-1}. Stoga ovaj sustav možemo riješiti i **matričnim putem**:

$A \cdot X = B \;/\; \cdot_L A^{-1}$ *(množimo slijeva s A^{-1}, jer množenje nije komutativno)*

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$
$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -9 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2 \;\Rightarrow \text{(-1, 1, 2).}$$

Primjer 2. Riješimo zadani sustav Gaussovom metodom:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right] \cdot (-2) \cdot (-4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \cdot (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 + 3 \\ x_2 = x_3 - 1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2\alpha + 3 \\ x_2 = \alpha - 1 \\ x_3 = \alpha \end{array}$$

$\Rightarrow$ rješenje je 1-parametarsko: $(-2\alpha + 3, \alpha - 1, \alpha)$. Tu je parametar α bilo koji realan broj.

Provjera:

1. jednadžba: $-2\alpha + 3 + \alpha - 1 + \alpha = 2 \;\Rightarrow\; 2 = 2.$
2. jednadžba: $-4\alpha + 6 + 3\alpha - 3 + \alpha = 3 \;\Rightarrow\; 3 = 3.$
3. jednadžba: $-8\alpha + 12 + 5\alpha - 5 + 3\alpha = 7 \;\Rightarrow\; 7 = 7.$

Ovaj sustav ne bi mogli riješiti Cramerovim pravilom jer sustav nije Cramerov (lako se vidi da je determinanta sustava jednaka nuli), a ni matričnim putem jer matrica sustava nema inverznu matricu.

Primjer 3. Riješimo zadani sustav Gaussovom metodom:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right] \cdot(-2)\cdot(-4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \end{array}\right] \cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 0 = -7 \end{array} \Rightarrow \text{sustav nema rješenja!}$$

Zadatak 1. Riješite sustav:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -x + y - 3z = -2 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ 2x + 3y + z = 9 \end{cases}$$

(*Rješenje:* sustav nema rješenja).

Zadatak 2. Riješite sustav:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ \quad - x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 13 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 9 \end{cases}$$

(*Rješenje:* $(-1-\alpha, -1+\alpha+\beta, 4-\beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

8. MATRIČNE JEDNADŽBE

To su jednadžbe kod kojih je nepoznanica matrica X.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu $A \cdot X + B = C$ ako je
(s ispita 29.11.03.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A \cdot X = C - B \,/\cdot_L\, A^{-1}$ ako postoji (detA = 4 ≠ 0 $\Rightarrow$ $\exists$ A^{-1})

$X = A^{-1} \cdot (C - B)$

Prvo odredimo matricu A^{-1}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$C - B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sada možemo izračunati matricu X:

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2. Riješimo jednadžbu $A \cdot X^{-1} \cdot B - C = A \cdot X^{-1}$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot X^{-1} \cdot B - C = A \cdot X^{-1}$$
$$A \cdot X^{-1} \cdot B - A \cdot X^{-1} = C$$
$$A(X^{-1}B - X^{-1}) = C \,/\cdot_L\, A^{-1}$$
$$X^{-1}B - X^{-1} = A^{-1}C$$
$$X^{-1}(B - E) = A^{-1}C \,/\cdot_L\, X$$
$$B - E = XA^{-1}C \Rightarrow XA^{-1}C = B - E \,/\cdot_D\, C^{-1}$$
$$XA^{-1} = (B - E)C^{-1} \,/\cdot_D\, A$$
$$X = (B - E) \cdot C^{-1} \cdot A$$

$$\mathrm{B - E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; X = (B - E)C^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 1. Pokaži da za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vrijedi $\left(A^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$.

(*Rješenje:* $\left(A^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$).

Zadatak 2. Izračunaj matrični polinom $f(A) = 3A^2 + 8A - 4E$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(Rješenje: $f(A) = \begin{bmatrix} 25 & 46 \\ 69 & 94 \end{bmatrix}$).

III. FUNKCIJE

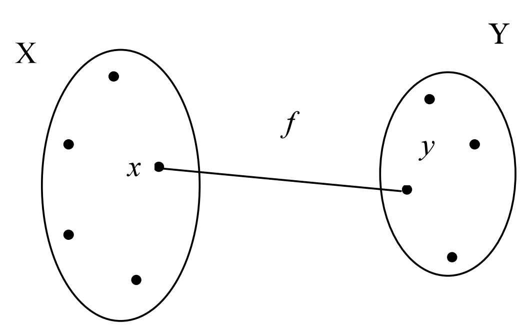
1. DEFINICIJE

Pojam funkcije ili preslikavanja je uz pojam skupa najvažniji matematički pojam. Može se pojednostavljeno reći da je matematika nauka o skupovima i preslikavanjima među njima.

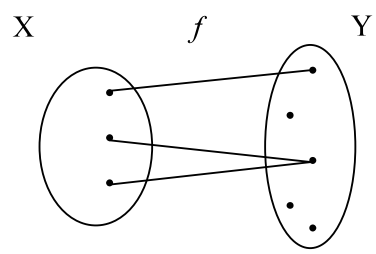
Definicija. Neka su X i Y neprazni skupovi i f zakon ili pravilo koje svakom elementu skupa X pridružuje jedan jedini element skupa Y. Tada se uređena trojka (X, Y, f) zove **funkcija ili preslikavanje iz skupa X u skup Y** i označava sa f: X $\to$ Y.

Skup X zove se **domena ili područje definicije funkcije f** i označavamo ga sa D(f), a skup Y zove se **kodomena od f** i označavamo ga sa K(f). Ako je funkcija f elementu $x \in X$ pridružila element $y \in Y$ piše se onda $y = f(x)$ ili $f : x \mapsto y$ i kaže se da je $f(x)$ vrijednost funkcije f na elementu x. Svaki element $x \in X$ zove se **original**, a element $y = f(x)$ zove se **slika od x**.

Funkcija f: X $\to$ Y često se sugestivno prikazuje na slijedeći način: skupovi X i Y prikažu se Venn-ovim dijagramima i onda se od $x \in X$ povuče strelica prema elementu $y \in Y$ koji je pridružen tom elementu x:



Primjer 1. Na slijedećoj slici prikazana je funkcija f iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ u skup $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$:



Piše se: $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$.

Primjer 2. Stanemo li pred neki izlog, onda svi predmeti u izlogu čine skup X, a njihove cijene skup Y. Svakom predmetu $x \in X$ pridružen je jedan element skupa Y, njegova cijena. Tu se dakle radi o funkciji f koja predmetu x pridružuje cijenu $f(x)$. Dakle, u izlogu "imamo" jednu funkciju. Da li u tom izlogu možemo vidjeti još koju funkciju? Možemo, npr. zemlja porijekla proizvoda, godina proizvodnje, …

Primjer 3. Neka je X skup učenika nekog razreda i Y skup stolica u tom razredu. Ako svakom učeniku pridružimo stolicu na kojoj sjedi, definirali smo jednu funkciju iz X u Y.

Definicija.

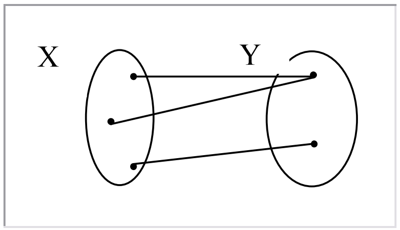
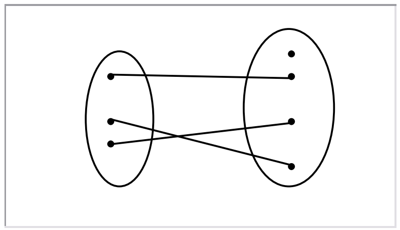
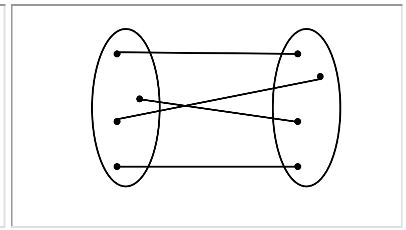
A) Funkcija $f : X \to Y$ zove se **surjekcija** ako je svaki element kodomene slika jednog ili više elemenata domene, tj.

ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.

B) Funkcija $f : X \to Y$ zove se **injekcija** ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, tj.

ako za svaki $x_1, x_2 \in X$ vrijedi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

C) Funkcija $f : X \to Y$ zove se **injekcija** ako je surjekcija i injekcija.

		
surjekcija nije injekcija	nije surjekcija injekcija	bijekcija

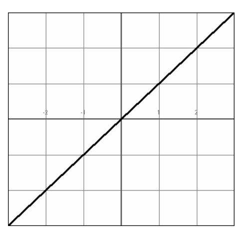
Pitanje: u kojem se slučaju može uspostaviti bijekcija između dva konačna skupa? Koliko tada ima bijekcija?

Definicija. **Identično preslikavanje** ili identiteta skupa X je funkcija $1_x : X \to X$ zadana sa

$$1_x(x) = x\,,\ \forall x \in \mathrm{X}.$$

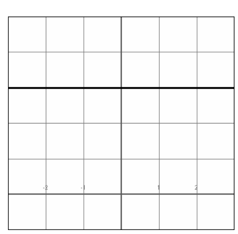
Dakle, djelovanjem ove funkcije argument se ne mijenja.

Primjer 4. Identiteta skupa realnih brojeva **R** je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana sa $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Graf te funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac koji je simetrala I. i III. kvadranta.



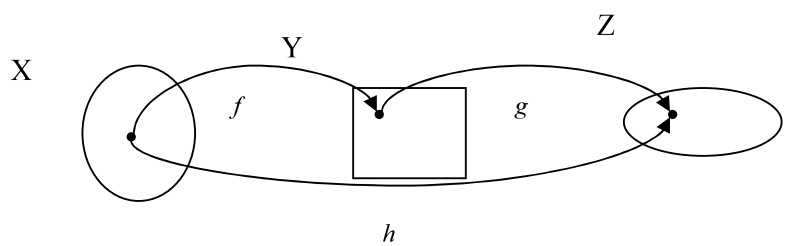
Definicija. Neka je $c \in \mathrm{Y}$ bilo koji element. Funkcija $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ zadana sa $f(x) = c$, $\forall x \in \mathrm{X}$ zove se **konstanta**.

Primjer 5. Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana sa $f(x) = 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$ je konstanta. Njen graf je pravac paralelan s osi apscisa:



Definicija. Neka su zadane funkcije $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ i $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$. **Kompozicija funkcija *f* i *g*** je funkcija $h : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ određena sa $h(x) = g\,(f\,(x))$, $x \in \mathrm{X}$. Piše se $h = g \circ f$ ili $h = gf$.

Uočimo da kompozicija $h = gf$ postoji samo onda kada je kodomena funkcije f jednaka domeni funkcije g. U tom slučaju kompozicija fg (u suprotnom redoslijedu) ne postoji.
Prikažimo kompoziciju Vennovim dijagramima:



Za kompoziciju funkcije ne vrijedi zakon komutacije: $gf \neq fg$ (ako te kompozicije postoje), a vrijedi zakon asocijacije: $f_1(f_2 f_3) = (f_1 f_2) f_3$.

Primjer 6. Zadane su funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pravilom $f\,(x) = x^2$, $g\,(x) = x + 3$.
Odredimo kompozicije gf i fg (one zaista postoje):

$$(gf\,)(x) = g\,(f\,(x)) = g\,(x^2) = x^2 + 3\ ;$$

$$(fg\,)(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9\ .$$

Definicija. Neka je zadana funkcija $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Za funkciju $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ kažemo da je **inverzna funkcija funkcije *f*** ako vrijedi $gf = 1_{\mathrm{X}}$ i $fg = 1_{\mathrm{Y}}$.

Ako inverzna funkcija postoji, ona je jedinstvena pa se označava sa f^{-1}. Funkcija $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ onda i samo onda kada je f bijekcija. Iz prethodnog slijedi:

$$(f^{-1} f\,)(x) = f^{-1}(f\,(x)) = 1_X\,(x) = x\ ,\ \forall x \in \mathrm{X}$$

$$(ff^{-1})(x) = f\,(f^{-1}(x)) = 1_Y\,(y) = y\ ,\ \forall y \in \mathrm{Y}.$$

2. ZADAVANJE FUNKCIJE

Funkcije mogu biti zadane na više načina. Najvažnija su sljedeća tri:

a) **Zadavanje tablicom**

Ako je domena funkcije konačan skup, funkcija se može zadati pomoću tablice. U prvom retku tablice nalaze se elementi domene, a u drugom retku pripadne vrijednosti funkcije:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

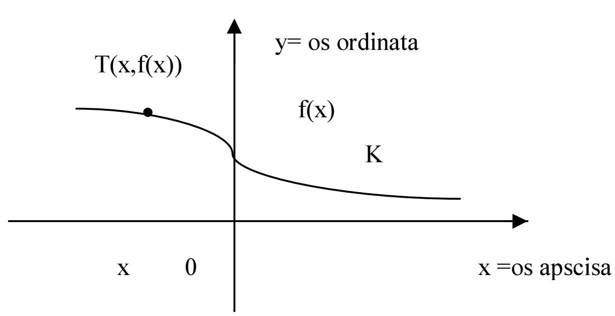
Primjer: Nakon desetodnevnog promatranja prodaje nekog proizvoda dobivena je sljedeća tablica:

Dan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prodano komada	31	45	0	18	22	20	8	28	35	6

Ovom tablicom je zadana funkcija f iz skupa $\{1, 2, \dots, 10\}$ u skup $\mathbf{N} \cup \{0\}$: $f(1) = 31, \dots, f(10) = 6$.

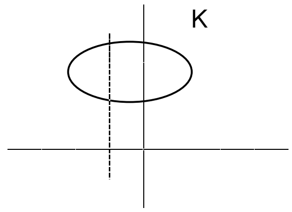
b) **Zadavanje grafom**

Poznati su razni aparati (seizmograf, tahograf, elektrokardiogram) koji crtaju krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu:

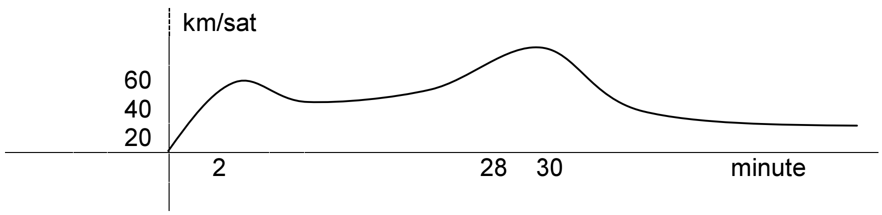


Krivuljom K potpuno je određena vrijednost funkcije $f(x)$ za vrijednost argumenta x. Budući da to vrijedi za svaku vrijednost argumenta iz domene, krivuljom K zaista je zadana neka funkcija. Pri tom krivulja K predstavlja graf ili sliku neke funkcije samo onda kada ima svojstvo da je pravci okomiti na os apscisa sijeku u najviše jednoj točki.

Krivulja K prikazana na slici nije graf funkcije:



Primjer. Na slijedećoj slici prikazana je brzina autobusa kao funkcije vremena:



c) **Zadavanje formulom**

Najvažniji način zadavanja funkcije je da se zada domena X, kodomena Y i analitički izraz ili formula $y = f(x)$ koja određuje postupak ili algoritam kojim se argumentu $x \in$ X pridružuje vrijednost funkcije $f(x) \in$ Y.

Primjer. Funkcija $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ zadana je sa $f(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbf{N}$. Iz ove formule slijedi: $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$, $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$, itd.

Ove nam formule pokazuju da broj $x \in \mathbf{N}$ treba pomnožiti s brojem 2, a zatim broju $2x$ pribrojiti broj 3.

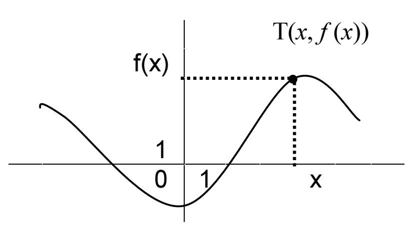
3. REALNE FUNKCIJE REALNOG ARGUMENTA

Definicija. Funkcija f : X $\to$ Y, gdje je X, Y $\subset$ **R**, zove se **realna funkcija realnog argumenta**.

Dakle, realna funkcija realnog argumenta je ona funkcija čija je domena i kodomena neki podskup skupa **R** ili čitav skup **R**. Ubuduće ćemo pod funkcijom podrazumijevati isključivo realnu funkciju realnog argumenta. Te funkcije najčešće se zadaju analitički, tj. formulom $y = f(x)$, npr. $f(x) = x^2 + x - 2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = 3\sin(2x-5)$. Ako se funkcije zadaju na taj način, tj. bez posebno istaknute domene i kodomene, onda se pod domenom funkcije podrazumijeva prirodna domena, a pod kodomenom čitav skup **R**. **Prirodna domena funkcije** $y = f(x)$ je skup svih elemenata $x \in \mathbf{R}$ za koje je $f(x)$ realan, konačan i određen broj, ili, to je skup D = $\{ x \in \mathbf{R} \mid f(x) \in \mathbf{R}\}$.

Primjer. Prirodna domena funkcija $f(x) = 3x - \frac{7}{2}$, $f(x) = x^2 + x - 2$, $f(x) = 2^x$ je skup **R**, prirodna domena funkcije $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 9}$ je skup **R**\ {-3, 3}, funkcije $f(x) = \sqrt{x+5}$ skup $\{ x \in \mathbf{R} \mid x \geq -5\}$, a funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ skup **R**\ $\{0\}$.

Posebno je važno da ove funkcije možemo prikazati njihovom slikom ili grafom. **Graf** realne funkcije realnog argumenta je skup $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, i taj skup predstavlja krivulju u ravnini u kojoj je postavljen pravokutni koordinatni sustav. Pri tom se na os apscisa nanose vrijednosti argumenta x, a na os ordinata vrijednosti funkcije $f(x)$:



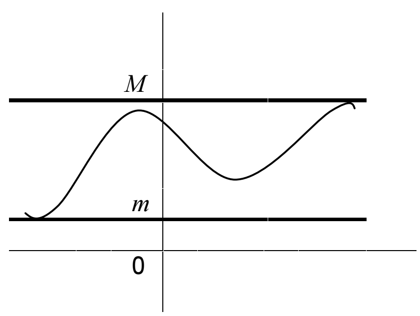
Prikazivanje funkcije pomoću grafa odnosno krivulje G_f ima veliku važnost jer se iz grafa lako uočavaju osobine funkcije. Sjetimo se, zbog definicije funkcije, krivulja G_f ima svojstvo da je okomice na os *x* sijeku najviše u jednoj točki.

Primjer. Sjetimo se nekoliko od prije poznatih realnih funkcija realnog argumenta i njihovih grafova: graf funkcije $f(x) = \frac{5}{2}$ je pravac paralelan s osi x (ova funkcija se zove konstanta), graf funkcije $f(x) = x$ je pravac koji je simetrala I. i III. kvadranta (ova funkcija je identiteta skupa R), graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ je pravac, graf funkcije $f(x) = x^2 + x - 2$ je parabola, graf funkcije $f(x) = 2\sin x$ je sinusoida, graf funkcije $f : [-2,2] \to [0,2]$ zadana sa $f(x) = +\sqrt{4 - x^2}$ je polukružnica.

Uz funkcije vezuju se slijedeće definicije, odnosno pojmovi.

Kaže se da je **funkcija f : R → R omeđena ili ograničena** ako postoje realni brojevi m i M takvi da je $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Takva funkcija ne poprima vrijednosti manje od *m*, a niti veće od *M*, pa se njen graf nalazi između pravaca $y = m$ i $y = M$:



Npr. $f(x) = \sin x$ je omeđena funkcija, a $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ to nisu.

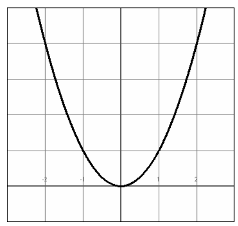
Kaže se da je **funkcija *f* : R → R rastuća ili uzlazna** ako za $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ $x_1 < x_2$ povlači da je $f(x_1) \le f(x_2)$, odnosno **padajuća ili silazna** ako za $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ $x_1 < x_2$ povlači da je $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Ako umjesto $f(x_1) \le f(x_2)$ vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$, kaže se da je **funkcija strogo rastuća**. Može se reći da strogo rastuća funkcija ima svojstvo da manjim vrijednostima argumenta odgovaraju manje vrijednosti funkcije. Analogno se definira i **strogo padajuća funkcija**.

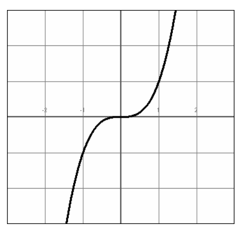
Rastuće i padajuće funkcije zovu se **monotone funkcije**. Najčešće funkcije nisu ni rastuće ni padajuće.

Primjer. $f(x)=x^3$ je rastuća funkcija, $f(x)=-2x+1$ je padajuća funkcija, a $f(x)=x^2$ nije ni rastuća ni padajuća.

Kaže se da je funkcija $\boldsymbol{f}$ **: R → R parna funkcija** ako vrijedi $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in \mathbf{R}$, odnosno **neparna funkcija** ako vrijedi $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in \mathbf{R}$.
Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na os y:



a neparne funkcije simetričan je obzirom na ishodište koordinatnog sustava:



Primjer. $f(x)=x^2$ i $f(x)=\cos x$ su parne funkcije,

$f(x)=x^3$ i $f(x)=\sin x$ su neparne funkcije,

$f(x)=2x+1$ nije ni parna ni neparna funkcija.

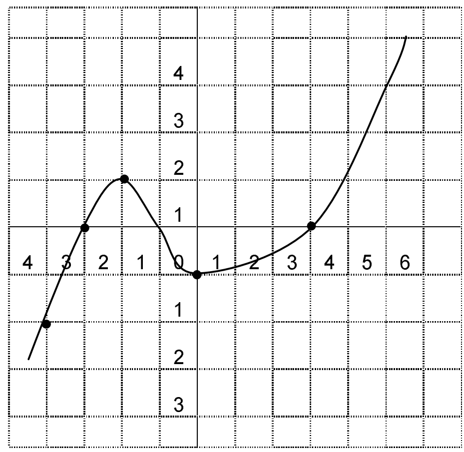
Kaže se da je $\boldsymbol{f}$ **: R → R periodična funkcija** ako postoji $p\in\mathbf{R}$ takav da je $f(x+p)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Najmanji pozitivni broj p s tim svojstvom zove se **osnovni period.**

Primjer. Funkcija $f(x)=\sin x$ je periodična funkcija. Osnovni period te funkcije je 2π.

Broj $x_0\in\mathbf{R}$ zove se **nultočka funkcije** $\boldsymbol{f}$ **: R → R** ako vrijedi $f(x_0)=0$. To je dakle broj u kojem funkcija poprima vrijednost nula, odnosno točka u kojoj graf funkcije siječe os x. Primijetimo da smo tu rekli "broj odnosno točka", tj. broj smo poistovjetili s točkom. To se smije jer znamo da između skupa **R** i skupa točaka brojevnog pravca postoji preslikavanje koje je bijekcija.

Navedeni pojmovi koriste se pri analiziranju (opisivanju) proizvoljne funkcije.

Primjer. Nacrtajmo sada graf neke proizvoljne funkcije $y = f(x)$ i opišimo svojstva te funkcije:



- Domena funkcije je skup **R**.
- Ova funkcija ima tri nultočke: $x = -3, x = -1, x = 3$.
- Funkcija ima dva lokalna ekstrema: $y_{\max} = 1$ za $x = -2$, $y_{\min} = -1$ za $x = 0$.
- Nađimo intervale rasta, odnosno pada funkcije:

  kada x raste od $-\infty$ do -2, funkcija raste od $-\infty$ do 1; kada x raste od -2 do 0, funkcija pada od 1 do -1; kada x raste od 0 do $+\infty$, funkcija raste od -1 do $+\infty$.
- Funkcija poprima pozitivne vrijednosti (ili $f(x) > 0$) na skupu $\langle -3,-1\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle$, a negativne vrijednosti (ili $f(x) < 0$) na skupu $\langle -\infty,-3\rangle \cup \langle -1,3\rangle$.
- Funkcija ima slijedeće granične vrijednosti:

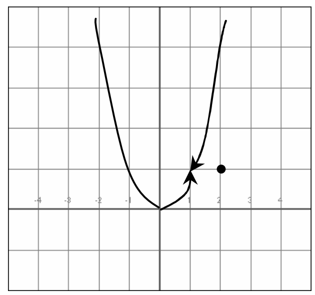
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (zaista, vidimo da kada x teži prema ∞, $f(x)$ također teži prema ∞,

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-3} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 5} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -4} f(x) = -2$, itd.

4. GRANIČNA VRIJEDNOST, NEPREKINUTOST, ASIMPTOTE

Da bi objasnili pojam granične vrijednosti ili limesa funkcije $y = f(x)$ u nekoj točki x_0, nacrtajmo graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 2 \\ 1, x = 2 \end{cases} \quad :$$



Vidimo: kada se nezavisna varijabla x na bilo koji način približava točki $x = 1$, vrijednost funkcije $f(x)$ približavaju se broju 1. Dakle, $x \to 1 \Rightarrow f(x) \to 1$, pa pišemo $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ i kažemo da ova funkcija u točki $x = 1$ ima graničnu vrijednost 1.

Analogno vrijedi:

$$x \to -1 \Rightarrow f(x) \to 1, \text{ tj. } \lim_{x \to -1} f(x) = 1,$$

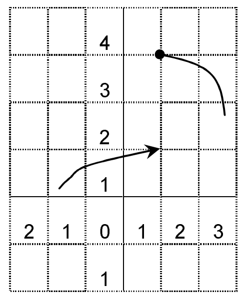
$$x \to -2 \Rightarrow f(x) \to 4, \text{ tj. } \lim_{x \to -2} f(x) = 4,$$

$$x \to 2 \Rightarrow f(x) \to 4, \text{ tj. } \lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Dakle, ako vrijedi: $(x \xrightarrow[te\ i]{} x_0) \Rightarrow (f(x) \to A)$, onda se kaže da funkcija $f(x)$ u točki $x = x_0$ ima graničnu vrijednost (ili limes) A, i piše $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

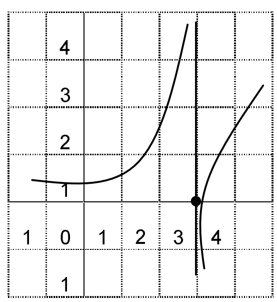
Definicija. Neka je funkcija $f(x)$ definirana u svim točkama neke okoline točke x_0 osim možda u samoj točki x_0. Reći ćemo da je $A \in \mathbf{R}$ **granična vrijednost ili limes funkcije** $f(x)$ u točki x_0 i pisati $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, ako za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ takav da vrijedi $|f(x) - A| < \varepsilon$ čim je $|x - x_0| < \delta$ i $x \neq x_0$.

Na sličan način definira se i **granična vrijednost s lijeva** (piše se $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x)$) i **s desna** (piše se $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x)$). Evo dva primjera:



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^{-0}} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^{+0}} f(x) = 3\end{array}\right\}$$

Budući da su ove dvije granične vrijednosti različite, ova funkcija nema graničnu vrijednost u točki $x = 2$.



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^{-0}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^{+0}} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$ U ovom slučaju kažemo da funkcija ima vertikalnu asimptotu u točki $x = 3$.

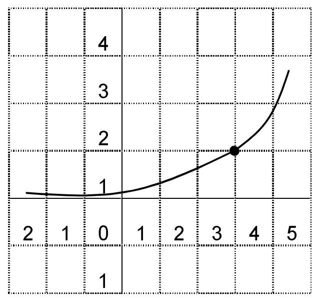
Definicija. Funkcija $f(x)$ je **neprekinuta u točki x_0** ako u toj točki ima graničnu vrijednost i ako je ta granična vrijednost jednaka $f(x_0)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Funkcija $f(x)$ je **neprekinuta** ako je neprekinuta u svakoj točki svoje domene.

Drugim riječima, funkcija $f(x)$ je neprekinuta u točki x_0 ako se ordinate $f(x)$ u dovoljno maloj okolini točke x_0 razlikuju po volji malo od $f(x_0)$, ili ako je njen graf suvisao, tj. povezan u okolini točke x_0.

Ako se vratimo na prije promatranu funkciju $f(x)=\begin{cases} x^2, x \neq 2 \\ 1, x=2 \end{cases}$, vidimo da vrijedi:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, $f(2)=1$, tj. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, pa to znači da ona nije neprekidna u točki x = 2. Ona u toj točki ima prekid, što se odmah vidi iz njenog grafa.

Primjer.



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1 \\ f(3)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3) \Rightarrow \text{ ova funkcija je neprekinuta u } x=3$$

Iz grafa se vidi da je ova funkcija neprekinuta u svakoj točki svoje domene, pa je ona neprekinuta.

Primjeri.

$\lim\limits_{x\to 5} 2x=10$, $\lim\limits_{x\to 100} 2x=200$, $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -100} 2x=-200$, $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 5} x^2=25$, $\lim\limits_{x\to -5} x^2=25$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x^2=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 5} \frac{2}{x}=\frac{2}{5}$, $\lim\limits_{x\to 100} \frac{2}{x}=\frac{2}{100}$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x}=0$,

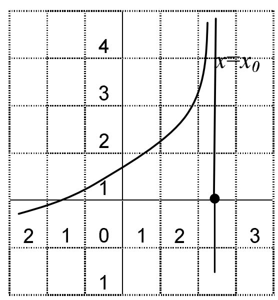
$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2+5}{3x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x}{2x^2+5}=0$, $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2+5x+7}{3x^2}=\frac{2}{3}$,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{array}\right\} \quad \text{ovo se posebno dokazuje!}$$

Definicija. Pretpostavimo da se graf neke funkcije proteže u beskonačnost, tj. da udaljenost točaka tog grafa od ishodišta raste u beskonačnost. **Asimptota** te funkcije je pravac sa svojstvom da udaljenost točaka tog pravca od točaka grafa funkcije teži k nuli kada te točke teže u beskonačnost.

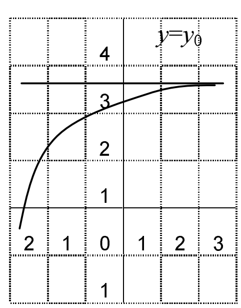
Prema položaju obzirom na koordinatni sustav asimptote dijelimo na vertikalne, horizontalne i kose.

Vertikalna asimptota paralelna je s osi y. Vrijednost funkcije $f(x)$ u točki $x = x_0$ je beskonačno velika, pa vrijedi: pravac **x = x₀** je **vertikalna asimptota** funkcije $y = f(x)$ ako je $f(x_0) = \pm\infty$ (zato $f(x)$ u x_0 nije definirana).



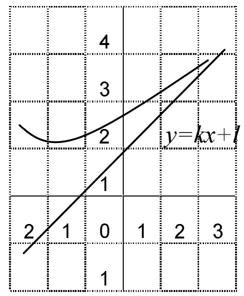
Npr. funkcija $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$ ima dvije vertikalne asimptote: $x = 2$ i $x = -2$.

Teži li funkcija $f(x)$ određenoj graničnoj vrijednosti y_0 kada $x \to \infty$, tj. ako postoji $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0 < \infty$, onda je pravac **$y = y_0$** **horizontalna asimptota** funkcije $f(x)$.



Npr. funkcija $f(x) = \dfrac{7x}{3x + 2}$ ima horizontalnu asimptotu: $y = \dfrac{7}{3}$.

Ako za neku funkciju vrijedi $f(x)$ vrijedi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, tada ona možda ima **kosu asimptotu** $y = kx + l$. Ako je ima, onda je $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $l = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$.



5. ELEMENTARNE FUNKCIJE

To su "najjednostavnije" funkcije iz kojih pomoću operacija zbrajanja, množenja, dijeljenja, potenciranja i pomoću kompozicije funkcija nastaju sve ostale funkcije. Npr. $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=2x+1$, $f_3(x)=\sin x$ su elementarne funkcije, a $g(x)=\sin(2x+1)$ i $h(x)=\sin^3(2x+1)$ nisu (vrijedi: $g(x)=(f_3 f_2)(x)$, $h(x)=(f_1 f_3 f_2)(x)$). Sada ćemo dati pregled elementarnih funkcija.

5.1. POLINOMI

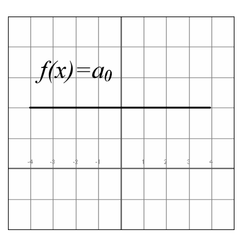
Funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definirana formulom $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$, gdje je $n\in\mathbf{N}$, $a_i\in\mathbf{R}$ (i = 0, 1, 2, …, n) i $a_n\neq 0$ zove se **polinom *n*-tog stupnja** ili **cijela racionalna funkcija**. Polinomi su najvažnije i najjednostavnije funkcije, a sve ostale funkcije mogu se aproksimirati polinomom.
Npr.

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,$$

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

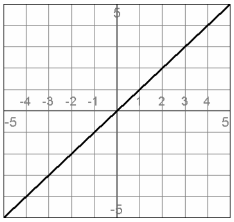
Polinomi su neprekinute funkcije.

Posebno, polinom $f(x)=0$ zove se **nulpolinom**, a polinom $f(x)=a_0\neq 0$ je konstanta i njegov graf je pravac paralelan s osi *x*:

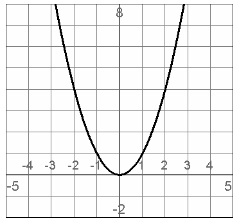


Polinom oblika $f(x)=x^n$ zove se **prirodna potencija** (tu je dakle $a_n=1$, $a_{n-1}=\ldots=a_1=a_0=0$).

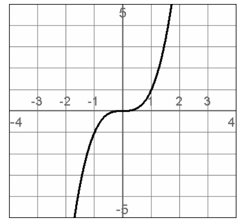
Na slijedećim slikama prikazani su grafovi nekih prirodnih potencija:



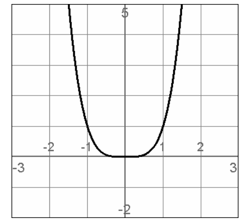
$f(x)=x$



$f(x)=x^2$



$f(x)=x^3$



$f(x)=x^4$

Vidimo da su $f(x)=x^2$ i $f(x)=x^4$ parne funkcije i da poprimaju samo nenegativne vrijednosti, a da su $f(x)=x$ i $f(x)=x^3$ neparne funkcije i rastuće funkcije.

Teorem o nultočkama polinoma.

Polinom n-tog stupnja $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ ima n nultočaka ili korijena u skupu **C**, tj. postoji n brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ takvih da je $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=0$.

Polinom $f(x)$ možemo zapisati u obliku: $f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$.

Neki od tih brojeva x_i su realni, a neki nisu realni. Ako su ti korijeni x_i realni brojevi, oni su nultočke polinoma. To znači da polinom n-tog stupnja ima najviše n nultočki.

Primjeri.

- Polinom $f(x)=2x^3+7x^2-2x-7$ ima sva tri realna korijena, tj. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-\dfrac{7}{2}$ (to su rješenja jednadžbe $2x^3+7x^2-2x-7=0$), pa je $f(x)=2(x-1)(x+1)(x+\frac{7}{2})$
- Polinom $f(x)=x^2+1$ nema niti jedan realan korijen.

Teorem o dijeljenju polinoma. Bilo koja dva polinoma $f(x)$ i $g(x)$ određuju jedinstvene polinome $s(x)$ i $r(x)$ takve da je $f(x)=s(x)\cdot g(x)+r(x)$, odnosno

$$\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

gdje je stupanj $r(x) <$ stupanj $g(x)$. Polinom $s(x)$ zove se **kvocijent**, a polinom $r(x)$ **ostatak** dijeljenja. Ako je $r(x)=0$, kažemo da $g(x)$ **dijeli** $f(x)$.

Ovaj teorem koristimo u slučaju kada je st $f(x) \geq$ st $g(x)$ i u tom slučaju je

st $s(x) =$ st $f(x)$ - st $g(x)$.

Primjer. Neka je $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 - 2x$, pa nađimo $s(x)$ i $r(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1) : (x^2 - 2x) = 2x^2 + 5x + 7 \\
\underline{2x^4 - 4x^3} \\
\qquad 5x^3 - 3x^2 + x - 1 \\
\qquad \underline{5x^3 - 10x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 7x^2 + x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{7x^2 - 14x} \\
\qquad\qquad\qquad 15x - 1
\end{array}
$$

Dakle, kvocijent je $s(x) = 2x^2 + 5x + 7$, a ostatak $r(x) = 15x - 1$.

Zaista vrijedi $f(x) = s(x) \cdot g(x) + r(x)$ i st $r(x) <$ st $g(x)$:

$$2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1 = (2x^2 + 5x + 7)(x^2 - 2x) + (15x - 1)$$

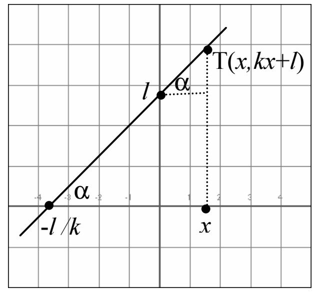
ili

$$\frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 - 2x} = 2x^2 + 5x + 7 + \frac{15x - 1}{x^2 - 2x} .$$

Primjeri:

- $f(x) = x^{12} - 3x^8 + 3x^4 - 1 = (x^4 - 1)^3 = (x^2 - 1)^3 (x^2 + 1)^3 = (x - 1)^3 (x + 1)^3 (x^2 + 1)^3$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$
- $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$

Polinom prvog stupnja je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana formulom $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$, ili $f(x) = kx + l$, $k \neq 0$. Ova funkcija zove se **linearna funkcija**. Njen graf je **pravac**:



$tg\alpha = \dfrac{kx + l - l}{x} = k \;\Rightarrow\; k = tg\alpha$, pa se k zove **koeficijent smjera pravca**.

Ako je $k > 0 \;\Rightarrow\; \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ funkcija je rastuća,

Ako je $k < 0 \;\Rightarrow\; \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow$ funkcija je padajuća.

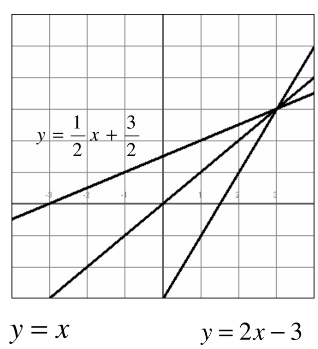
Lako se vidi da je linearna funkcija bijekcija (jer vrijedi: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ i $\forall y_0 \in \mathbf{R}$, $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x_0) = y_0$), pa ima inverznu funkciju koja je opet linearna funkcija.

<u>Primjer</u>. Nađimo inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2x - 3$.

$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad \Rightarrow \quad f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot f^{-1}(x) - 3 = x \quad \Rightarrow$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Grafovi tih funkcija su:



Vidimo da su grafovi tih funkcija simetrični obzirom na pravac $f(x) = x$. To vrijedi i općenito: **grafovi funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ simetrični su obzirom na pravac $f(x) = x$.**

Polinom drugog stupnja je funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zadana formulom $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ ili $f(x)=ax^2+bx+c$, gdje su $a,b,c\in\mathbf{R}$ i $a\neq 0$, a naziva se **kvadratna funkcija**.

Poznato nam je iz srednje škole da je njen graf parabola koja je u slučaju $a>0$ "okrenuta gore", a u slučaju $a<0$ "okrenuta dolje".
Može imati dvije nultočke, jednu nultočku i biti bez realnih nultočaka. Naime, njene nultočke su rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, a ta rješenja možemo naći tako da tu jednadžbu faktoriziramo na linearne faktore:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)=$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2)=0\,.$$

Rješenja ili korijeni kvadratne jednadžbe su $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, a ona su realna ako je broj $D=b^2-4ac\geq 0$. Taj broj ili izraz D zove se **diskriminanta kvadratne jednadžbe**.
Vrijedi:

D > 0 $\Rightarrow$ $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ kvadratna jednadžba ima dvije realne nultočke;

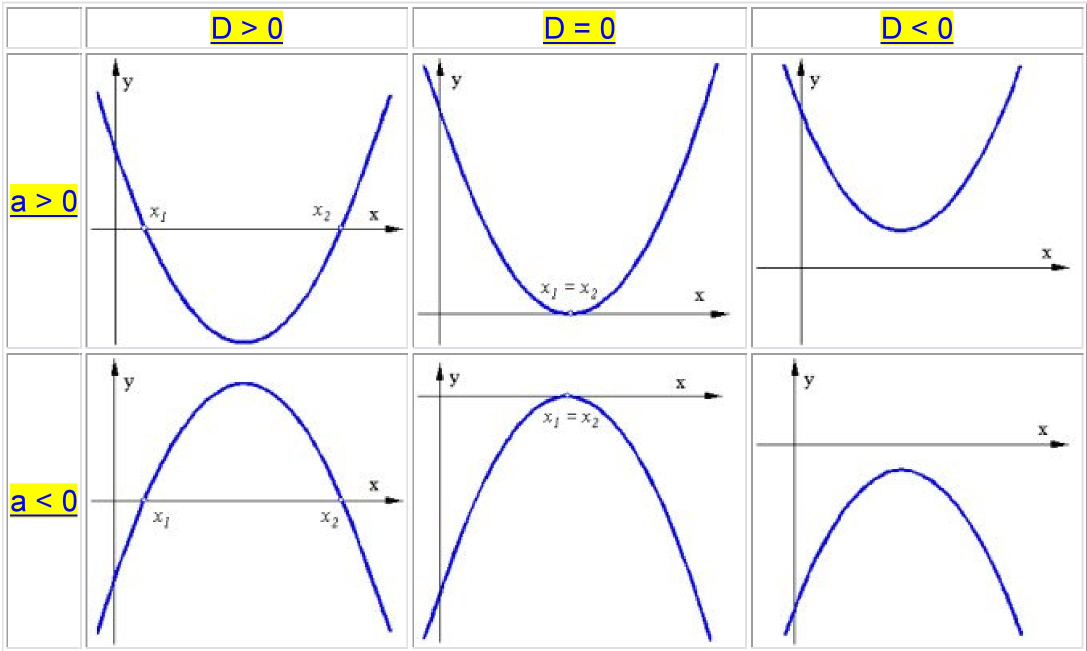
D = 0 $\Rightarrow$ $x_1=x_2\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ kvadratna jednadžba ima jednu dvostruku realnu nultočku;

D < 0 $\Rightarrow$ $x_1,x_2\notin\mathbf{R}$ $\Rightarrow$ kvadratna jednadžba nema realne nultočke.

Lako se pokaže da vrijedi:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\,,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\qquad \text{(Viete-ove formule)}$$

Graf kvadratne funkcije je jedna od **parabola**:



Iz tih grafova se vidi da kvadratna funkcija nije ni injekcija ni surjekcija. Parabola ima jednu ekstremnu (najnižu ili najvišu) vrijednost. Zove se **tjeme** ili **vrh parabole**, a njene koordinate su $T\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Polinomi stupnja većeg od dva, ne ponašaju se "pravilno" kao polinomi 1. i 2. stupnja, pa svakog od njih treba "posebno razmatrati".

Zadaci:

1. Nacrtaj grafove funkcija: $f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-1$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=x^2-x-2$, $f(x)=-x^2$, $f(x)=x^2+2x-5$.
2. U skupu funkcija Ŧ = $\{ f(x)=(4m^2-1)x^2+(2m-1)x+1 \mid m\in\mathbf{R}\}$ odredi onu funkciju koja je bijekcija.
3. Funkcija $f:(-\infty,2]\to[1,+\infty)$ zadana je sa $f(x)=2x^2-8x+9$. Pokaži da je f bijekcija, odredi f^{-1} i provjeri da je $f\circ f^{-1}=1=$identiteta.

5.2. RAZLOMLJENE RACIONALNE FUNKCIJE

Razlomljena racionalna funkcija je kvocijent dvaju polinoma, dakle funkcija oblika $f(x)=\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{a_m x^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+\cdots+b_1x+b_0}$. Ako je polinom u brojniku manjeg stupnja nego polinom u nazivniku, odnosno $m<n$, $f(x)$ se zove **prava razlomljena racionalna funkcija**. U protivnom, ona se zove **neprava razlomljena racionalna funkcija**.
Neprava razlomljena racionalna funkcija može se dijeljenjem brojnika sa nazivnikom prikazati u obliku zbroja polinoma i prave razlomljene racionalne funkcije.

Primjer.

$$\frac{P_4(x)}{P_2(x)}=\frac{2x^4+x^3-3x^2+x-1}{x^2-2x}=2x^2+5x+7+\frac{15x-1}{x^2-2x}$$

Domena razlomljene racionalne funkcije je čitav skup **R** osim nultočaka polinoma u nazivniku.

Prava razlomljena racionalna funkcija može se prikazati u obliku zbroja **parcijalnih razlomaka**, odnosno u obliku zbroja razlomaka čiji su nazivnici faktori polinoma $P_n(x)$. Taj rastav ovisi o tome da li su nultočke nazivnika realni ili nisu realni brojevi.

- Ako polinom u nazivniku ima realnu nultočku x_i višestrukosti k, tada imamo niz parcijalnih razlomaka:

  $$\frac{A_1}{x-x_i},\ \frac{A_2}{(x-x_i)^2},\ \ldots,\ \frac{A_k}{(x-x_i)^k},$$

  gdje su A_i konstante koje treba izračunati. I tako redom za sve ostale realne nultočke polinoma $P_n(x)$.

- Ako polinom $P_n(x)$ ima kompleksnu nultočku x_i višestrukosti k, onda je i $\overline{x_i}$ nultočka polinoma $P_n(x)$, pa za taj par nultočki imamo niz parcijalnih razlomaka:

  $$\frac{B_1x+C_1}{x^2+ax+b},\ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+ax+b)^2},\ \ldots,\ \frac{B_kx+C_k}{(x^2+ax+b)^k}\ .$$

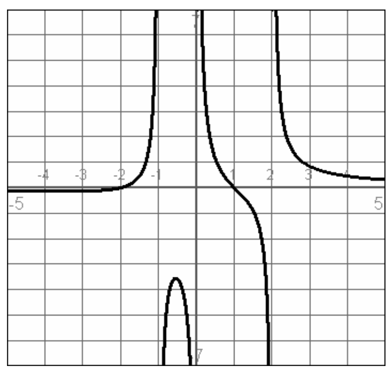
Tu je $x^2 + ax + b = (x - x_i)(x - \overline{x_i})$, a B_i i C_i su realne konstante koje treba izračunati.

Primjeri

1. $$\frac{1}{2x^4 + x^3 + x} = \frac{1}{x(x+1)(2x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{2x^2 - x + 1} = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}}{2x^2 - x + 1}$$

2. $$\frac{x^2 + x + 7}{(x-1)(x-2)^3(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} + \frac{Ex + F}{x^2 + 4}$$

3. Može se pokazati da je graf funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$:

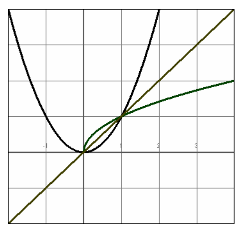


5.3. IRACIONALNE FUNKCIJE

Kada se uz operacije koje vode do racionalne funkcije dopusti još i korjenovanje, dobivamo **iracionalne funkcije**. Npr. $f(x) = 3x - \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{x-1}$,…

Problem određivanja domene iracionalnih funkcija svodi se uglavnom na rješavanje algebarskih jednadžbi i nejednadžbi. Ako je korijen iz neke funkcije f parni broj tada treba voditi računa da veličina ispod korijena ne bude negativna, jer paran korijen iz negativnog broja je kompleksan broj.

Primjer. Domena funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je očito skup svih realnih nenegativnih brojeva, tj. $D_f = [0,+\infty)$, a budući da je $f(x)$ inverzna funkcija funkciji $g(x) = x^2$, gdje je g definirana samo za nenegativne brojeve. Njihovi grafovi su simetrični obzirom na pravac $f(x) = x$.



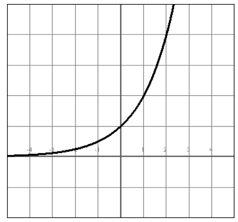
5.4. EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Neka je $a > 0, a \neq 1$ neki realan broj. Tada se funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana sa $f(x) = a^x$ zove **eksponencijalna funkcija s bazom *a*** (ili po bazi a).

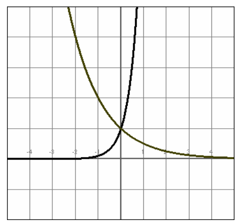
Promotrimo eksponencijalnu funkciju s bazom $a = 2$: $f(x) = 2^x$. Iz tablice

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

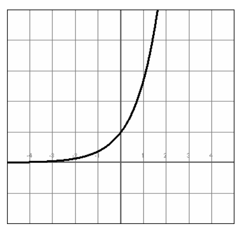
zaključujemo da je graf funkcije:



Na isti način dolazimo do grafova funkcija $f(x) = 10^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:



Najvažnija eksponencijalna funkcija je funkcija s bazom $a = e = 2.7182...$, zbog njenih "lijepih" svojstava i mnogobrojnih primjena u prirodnim znanostima.



Eksponencijalna funkcija ima slijedeća **svojstva**:

1. $f(x) = a^x > 0$ za $\forall x \in \mathbf{R}$, tj. eksponencijalna funkcija poprima samo pozitivne vrijednosti,
2. $f(0) = a^0 = 1$, tj. eksponencijalna funkcija bilo koje baze prolazi točkom (0,1),
3. Ako je $a > 1$ eksponencijalna funkcija je strogo rastuća, a ako je $0 < a < 1$ tada je ona strogo padajuća.
4. Ako je $a > 1$, onda $f(x) = a^x$ teži u nulu kada x teži u -∞, a ako je $0 < a < 1$, onda $f(x) = a^x$ teži u nulu kada x teži u ∞, a to znači da je os apscisa horizontalna asimptota eksponencijalne funkcije.

Iz svojstva 3. slijedi da je eksponencijalna funkcija $a^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ bijekcija. Stoga ona ima inverznu funkciju $f^{-1} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ koja se zove **logaritamska funkcija s bazom *a*** (ili po bazi *a*) i označava sa $y = \log_a x$.

Iz toga slijedi: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, pa kažemo: logaritam po bazi *a* broja *x* je eksponent kojim treba potencirati bazu *a* da se dobije broj *x*.

Primjeri.

$\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$ (dakle vrijedi: $\log_2 8 = 3$ jer je $2^3 = 8$);

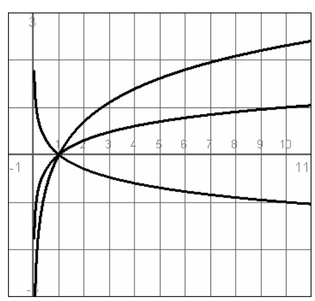
$\log_2 x = -3 \Rightarrow 2^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{8}$ ($\log_2 \frac{1}{8} = -3$);

$\log_x 125 = 3 \Rightarrow x^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 5$ ($\log_5 125 = 3$);

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = -2$ (jer je $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$).

Posebno su važne slijedeće dvije logaritamske funkcije. Ako je baza $a = 10$, funkciju bilježimo sa $y = \log x$ i zovemo **dekadski logaritam**, ako je baza $a = e = 2.7182...$, funkciju bilježimo sa $y = \ln x$ i zovemo **prirodni logaritam**. Dakle, $\log_{10} x = \log x$, $\log_e x = \ln x$. Funkcija $y = \log x$ inverzna je funkciji $y = 10^x$, a funkcija $y = \ln x$ inverzna je funkciji $y = e^x$.

Grafovi su:



Logaritamske funkcije po bilo kojoj bazi prolaze kroz točku (1,0) i imaju vertikalnu asimptotu (os ordinata). Ako je $a > 1$, funkcija je strogo rastuća i pozitivna za $x > 1$, a ako je $0 < a < 1$, funkcija je strogo padajuća i pozitivna za $0 < x < 1$.

Vrijedi:

$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$,

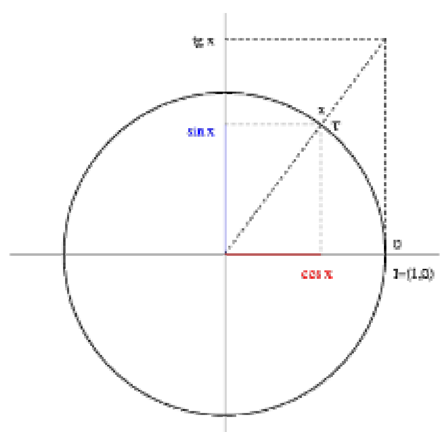
$\log_a (x_1)^{x_2} = x_2 \cdot \log_a x_1$ (tu su $x_1, x_2 > 0$), a to znači da se logaritmiranjem složenije računske operacije (množenje, dijeljenje, potenciranje i korjenovanje) svode na jednostavnije (zbrajanje i oduzimanje).

Veza između logaritamskih funkcija različitih baza dana je formulom: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Logaritmi su se razvili na prijelazu iz 16. u 17. stoljeće kada se zbog dugih morskih putovanja i astronomskih opažanja javila potreba za brzim i preciznim računanjem s višeznamenkastim brojevima.

5.5. TRIGONOMETRIJSKE I ARKUS FUNKCIJE

Neka je u ravnini zadan koordinatni sustav, kružnica K polumjera jedan sa središtem u ishodištu (tzv. trigonometrijska kružnica) i brojevni pravac p smješten tako da bude tangenta na kružnicu u točki (1,0). Zamislimo da pravac p namatamo na kružnicu K. pri tome se sve točke pravca p preslikavaju u točke kružnice K.



Realni broj $t \in \mathbf{R}$ pri tom se preslikava u točku $E(t) \in$ K. Dakle, $E(t)$ je točka u kojoj drugi krak kuta t (s lukom t) siječe trigonometrijsku kružnicu. Tim namatanjem zaista je zadano preslikavanje $E : p \to K$, odnosno $E : R \to K$. Vrijedi: $E(0) = (1,0)$, $E(\pi) = (-1,0)$,

$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, $E(2\pi) = (1,0)$ (pri tom smo koristili činjenicu da je opseg kružnice K jednak $2\pi \cdot 1 = 2\pi$).

To preslikavanje je surjekcija, a nije injekcija jer vrijedi $E(t + k \cdot 2\pi) = E(t)$, $k \in \mathbf{Z}$, tj. beskonačno mnogo točaka pravca "padne" na istu točku kružnice.

Ako ordinatu točke $E(t)$ označimo sa **sin*t***, a apscisu sa **cos*t***, tim postupkom smo svakom realnom broju $t \in \mathbf{R}$ pridružili realni broj sin *t*, odnosno cos*t.*

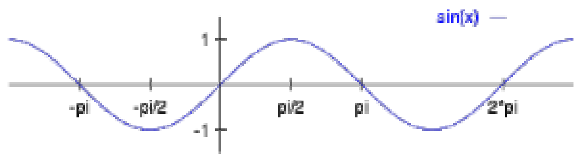
Drugim riječima definirali smo funkcije: $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (sinus funkcija) i $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (kosinus funkcija). Pomoću sinusa u kosinusa definiraju se funkcije:

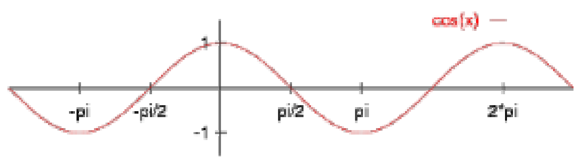
$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{(tangens funkcija),}$$

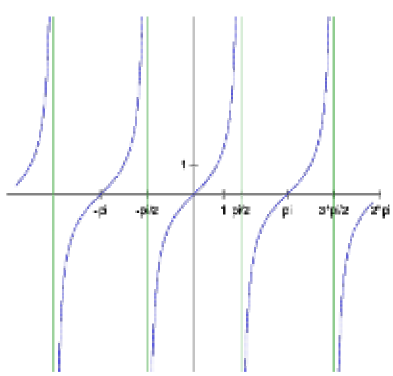
$$ctgt = \frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{(kotangens funkcija).}$$

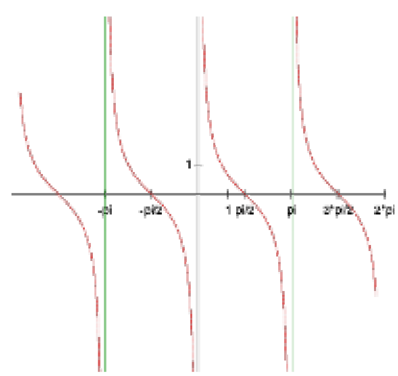
Ove četiri funkcije zovu se **trigonometrijske funkcije**. One su periodične funkcije s osnovnim periodom 2π (sinus i kosinus), odnosno π (tangens i kotangens).

Njihovi grafovi su:





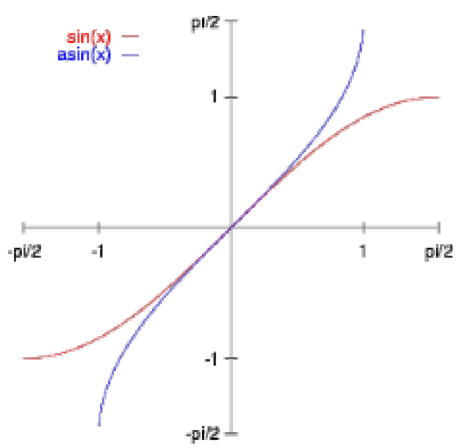


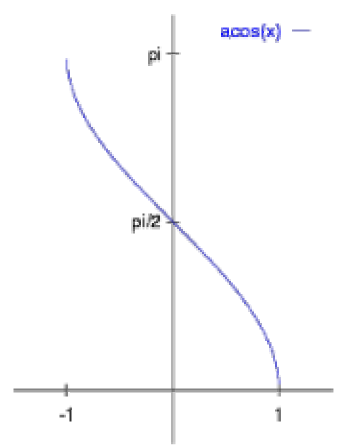


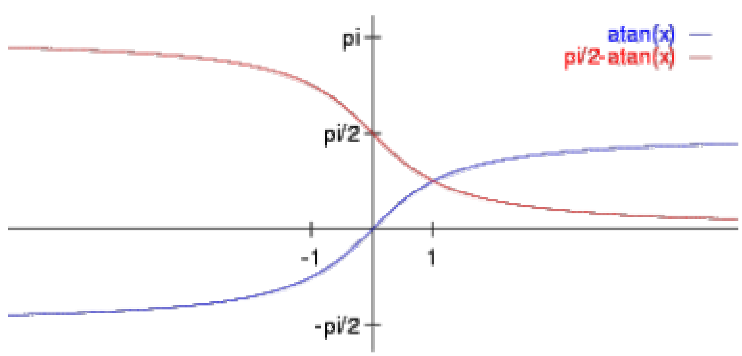
Iz ovih definicija i grafova zaključujemo da funkcije $\sin x$ i $\cos x$ poprimaju vrijednosti samo iz segmenta $[-1,1]$, tj. one su ograničene funkcije, a funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ su neograničene funkcije i imaju vertikalne asimptote. Funkcija kosinus je parna funkcija, a sinus, tangens i kotangens su neparne funkcije.

Trigonometrijske funkcije povezane su raznim relacijama, npr. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, $tg^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, itd.

Trigonometrijske funkcije nisu bijekcije, ali njihove restrikcije na segment $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ za funkcije sinus i tangens, odnosno $[0,\pi]$ za funkcije kosinus i kotangens, jesu bijekcije. Stoga one imaju inverzne funkcije koje se zovu **arkus ili ciklometrijske funkcije**. Grafovi tih funkcija su:





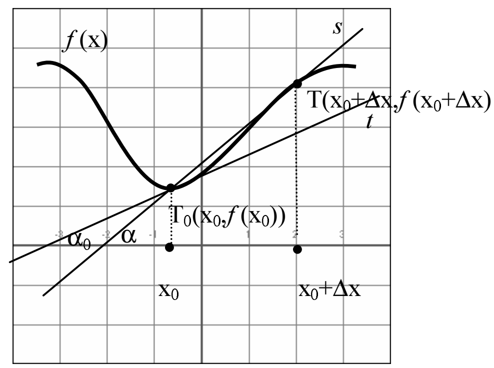


Vidimo da je domena funkcija $\arcsin x$ i $\arccos x$ segment $[-1,1]$, a domena funkcija $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ cijeli skup **R**.

IV. DIFERENCIJALNI RAČUN

1. DERIVACIJA

Neka je na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ definirana funkcija $y = f(x)$ i neka je $x_0 \in I$ neka točka tog intervala. Ako varijabla x_0 dobije prirast Δx, tj. ako $x_0 \to x_0 + \Delta x$, vrijednost funkcije će se promijeniti za $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Kaže se da je funkcija $f(x)$ derivabilna u točki x_0 ako funkcija $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ima graničnu vrijednost u točki x_0. Realni broj $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ zove se **derivacija funkcije *f* u točki** x_0 i označava sa $f'(x_0)$ ili $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Dakle,

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Izraz $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ zove se kvocijent diferencija, jer je u brojniku diferencija ili prirast funkcije, a u nazivniku diferencija ili prirast argumenta.

Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju u svakoj točki svoje domene, tj. ako postoji

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad \forall x \in \mathrm{D}(f),$$

tada se kaže da je *f* **derivabilna funkcija**, a funkcija $y = f'(x)$ zove se **derivacija funkcije *f***.

Pojam derivacije funkcije uveli su Newton i Leibniz u drugoj polovini 17. stoljeća dok su rješavali problem brzine, odnosno problem tangente. Od tada je derivacija jedan od najvažnijih i najviše primjenjivanih matematičkih pojmova.

Nađimo jednadžbu **tangente** u točki x_0 na graf funkcije $f(x)$. Pravac kroz točke T_0 i T zove se sekanta, a granični položaj tog pravca kad $T \xrightarrow{te\ i} T_0$ zove se tangenta (vidi sliku). Ako krivulja $f(x)$ ima tangentu $y - y_0 = k(x - x_0)$ u točki x_0, onda vrijedi:

$k = tg\alpha_0 = \lim tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$, pa je tražena **jednadžba tangente**: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Iz toga slijedi **geometrijsko značenje derivacije**: derivacija u točki x_0 funkcije $f(x)$ je koeficijent smjera tangente u točki x_0 na krivulju $y = f(x)$.

Analogno do derivacije dolazimo kod određivanja **brzine gibanja** nekog tijela. Neka je $s = s(t)$ prijeđeni put izražen kao funkcija vremena.

Tada je prosječna brzina $v = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$, a brzina u trenutku t_0: $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$.

Slično se definira i akceleracija: $a(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$.

Primjer 1. Nađimo jednadžbu tangente na krivulju $f(x) = x^2 - 1$ u točki $x_0 = 1$.

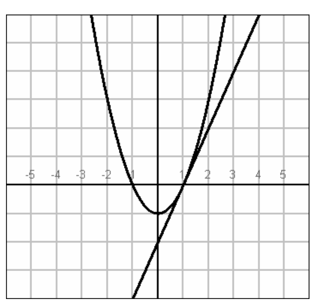
$t\ldots\ y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f(x) = x^2 - 1 \ \Rightarrow\ f'(x) = 2x$ (vidi primjer 2.)

$x_0 = 1 \ \Rightarrow\ f(x_0) = 1 - 1 = 0,\ \ f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$

$\Rightarrow\ t\ldots\ y - 0 = 2 \cdot (x - 1)$

$y = 2x - 2$



Primjer 2. Nađimo derivaciju funkcije $f(x) = x^2 - 1$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-1-x^2+1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Primjer 3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Na sličan način dolazi se do slijedeće **tablice derivacija elementarnih funkcija** i **osnovnih pravila deriviranja**:

1. $y = C =$konstanta $\Rightarrow$ $y' = 0$
2. $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (posebno: $y = x \Rightarrow y' = 1$)
3. $y = a^x$ $\Rightarrow$ $y' = a^x \cdot \ln a$ (posebno: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$)
4. $y = \log_a x$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$ (posebno: $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$)
5. $y = \sin x$ $\Rightarrow$ $y' = \cos x$
6. $y = \cos x$ $\Rightarrow$ $y' = -\sin x$
7. $y = tgx$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $y = ctgx$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
9. $y = \arcsin x$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $y = \arccos x$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = arctgx$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $y = arcctgx$ $\Rightarrow$ $y' = \frac{-1}{1+x^2}$

Pravila:

1. $y = f(x) \pm g(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = f'(x) \pm g'(x)$

2. $y = f(x) \cdot g(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

   (posebno: $y = C \cdot f(x) \;\Rightarrow\; y' = C \cdot f'(x)$)

3. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

4. $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \Rightarrow \qquad y' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{dg}{df} \cdot \dfrac{df}{dx}$

__Primjeri__.

$y = 3x^5 \Rightarrow y' = 15x^4$

$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

$y = 3x^7 - 13x^2 + 7x + 11 \Rightarrow y' = 21x^6 - 26x + 7$

$y = x^2 \cdot \ln x \Rightarrow y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

$y = \dfrac{x+5}{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{1 \cdot x^2 - (x+5) \cdot 2x}{x^4}$

$y = (3x^2 + x + 1)^4 \Rightarrow y' = 4(3x^2 + x + 1)^3 \cdot (6x + 1)$

$y = \cos(3x^2 + 1) \Rightarrow y' = -\sin(3x^2 + 1) \cdot 6x$

$y = \cos(5x^2 + x)^4 \Rightarrow y' = -\sin(5x^2 + x)^4 \cdot 4(5x^2 + x)^3 \cdot (10x + 1)$

$y = \sin^7(11x + 5) \Rightarrow y' = 7\sin^6(11x + 5) \cdot \cos(11x + 5) \cdot 11$

$y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \cdot \ln 10$

$y = 7 \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{7}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = arctg \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$

2. VIŠE DERIVACIJE I EKSTREMI

Ako funkcija $f(x)$ ima derivaciju, onda je njena derivacija $f'(x)$ nova funkcija. Ako i funkcija $f'(x)$ ima svoju derivaciju, onda se kaže da je ta derivacija **druga derivacija** polazne funkcije $f(x)$. Dakle, $f''(x) = (f'(x))'$, odnosno $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$.

Analogno se definira **treća derivacija**: $f'''(x) = (f''(x))'$, itd.

Primjeri.

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 \Rightarrow f'''(x) = 60x^2$, itd.

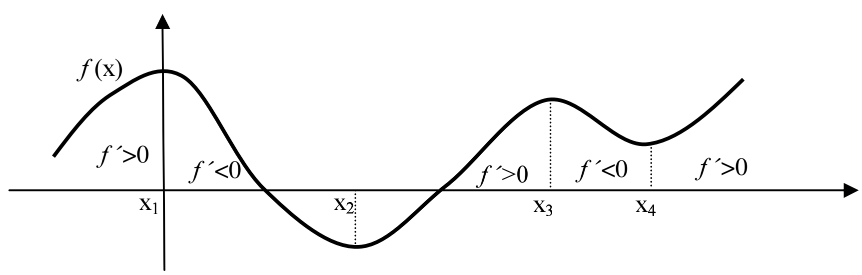
$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f^{IV}(x) = \sin x$

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$, itd.

Teorem (uvjet monotonosti). Ako za derivaciju funkcije *f* za svaki *x* iz nekog intervala I vrijedi $f'(x) > 0$, onda je funkcija *f* strogo rastuća na I, a ako vrijedi $f'(x) < 0$, onda je funkcija *f* strogo padajuća na I.

Dokaz:

Slijedi iz definicije derivacije (ili iz geometrijskog značenja derivacije).



$\Rightarrow$ $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = f'(x_4) = 0$ (jer u tim točkama rast funkcije prelazi u pad ili obratno, odnosno u tim točkama funkcija ima maksimum ili minimum, tj. ekstrem).

Funkcija f ima u točki x_0 **maksimum** ako postoji okolina točke x_0 takva da vrijedi $f(x) < f(x_0)$ za svaki $x \neq x_0$ iz te okoline, odnosno **minimum** ako postoji okolina točke x_0 takva da vrijedi $f(x) > f(x_0)$ za svaki $x \neq x_0$ iz te okoline.

Vrijednost funkcije f u točki x_0, tj. $f(x_0)$, tada se zove maksimum odnosno minimum funkcije ili kratko **ekstrem funkcije**.
Slijedeći teorem govori o tome kako se pronalaze ekstremi.

Teorem o ekstremima funkcije. Ako funkcija f ima u točki ekstrem, onda je $f'(x_0)=0$.
Ako je $f''(x_0)<0$ onda je taj ekstrem maksimum, a ako je $f''(x_0)>0$ onda je minimum.
Ako je pak $f''(x_0)=0$, onda treba tražiti više derivacije dok se ne dođe do derivacije koja je u x_0 različita od nule. Ako je ona parnog reda, u toj točki je ekstrem (i to maksimum ako je ona manja od nule, a minimum ako je veća od nule), a ako je ona neparnog reda, u toj točki nije ekstrem.
Iz ovog teorema slijedi da je nužan uvjet za ekstrem $f'(x)=0$, tj. u točki ekstrema prva derivacija mora biti jednaka nuli (to je jasno i zbog geometrijskog značenja derivacije: u točki ekstrema tangenta na krivulju paralelna je s osi x). Prema tome, mogući ekstremi su u točkama koja su rješenja jednadžbe $f'(x)=0$. Rješenja te jednadžbe zovu se stacionarne točke, a da li je u njima zaista ekstrem treba ispitati pomoću druge derivacije ili pomoću još viših derivacija.

Primjer 1. Odredi ekstreme funkcije $f(x)=2x^3-15x^2-36x$

$f'(x)=6x^2-30x-36=0 \Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow x_1=6, x_2=-1$ (stacionarne točke)

$f''(x)=12x-30$

$\Rightarrow$ $f''(6)=12\cdot 6-30=42>0$ $\Rightarrow$ u $x_1=6$ je minimum, i vrijednost tog minimuma je $f(6)=2\cdot 6^3-15\cdot 6^2-36\cdot 6=-324$

$\Rightarrow$ $f''(-1)=12\cdot(-1)-30=-42<0$ $\Rightarrow$ u $x_2=-1$ je maksimum, i vrijednost tog maksimuma je $f(-1)=2\cdot(-1)^3-15\cdot(-1)^2-36\cdot(-1)=19$

$\Rightarrow$ Funkcija ima maksimum u točki A(-1, 19), a minimum u točki B(6,-324).

Primjer 2. Odredi ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-3}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(2x-3)-(x+1)\cdot 2}{(2x-3)^2}=\frac{2x-3-2x-2}{(2x-3)^2}=\frac{-5}{(2x-3)^2}=0$$

Ova jednadžba nema rješenja, pa funkcija nema stacionarnu točku, dakle ni ekstrema.

3. ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJE

Značajna primjena derivacija (odnosno diferencijalnog računa) je ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa funkcije. Ako je zadana funkcija $y = f(x)$, to ispitivanje sastoji se u određivanju: domene funkcije, nultočaka funkcije, asimptote i ekstrema. Osim toga, ispituje se da li je funkcija periodična, da li je parna ili neparna, za koje vrijednosti argumenta je pozitivna odnosno negativna, za koje vrijednosti argumenta je rastuća odnosno padajuća, itd. Na temelju dobivenih vrijednosti moguće je nacrtati graf odnosno sliku funkcije u koordinatnom sustavu.

<u>Primjer 1</u>. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + \dfrac{4}{3}}$

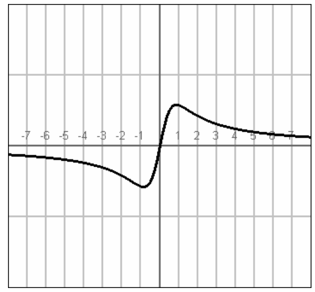
- Domena funkcije je skup **R** (jer je nazivnik uvijek pozitivan, tj. nije nigdje jednak 0)
- Nultočka funkcije je $x = 0$
- Funkcija je neparna jer vrijedi $f(-x) = -f(x)$, pa je njen graf simetričan obzirom na ishodište
- Vertikalnu asimptotu nema, a zbog $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2 + \dfrac{3}{4}} = 0$ je $y = 0$

  horizontalna asimptota. Kosu asimptotu stoga nema.
- Ekstremi: $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2 + \dfrac{3}{4}) - x\cdot 2x}{(x^2 + \dfrac{3}{4})^2} = \dfrac{x^2 + \dfrac{3}{4} - 2x^2}{(x^2 + \dfrac{3}{4})^2} = \dfrac{-x^2 + \dfrac{3}{4}}{(x^2 + \dfrac{3}{4})^2} = 0$

  $\Rightarrow\ x^2 - \dfrac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ su stacionarne točke

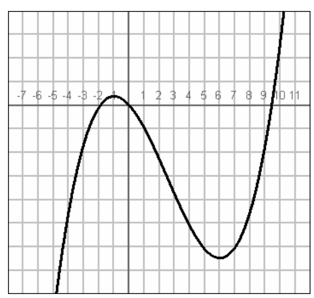
  $\Rightarrow\ f''(x) = 2\dfrac{x^3 - 4x}{(x^2 + \dfrac{4}{3})^3}\ \Rightarrow\ f''(\dfrac{2}{\sqrt{3}}) < 0$ i $f''(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}) > 0\ \Rightarrow$ funkcija ima maksimum

  u $x_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, a minimum u $x_2 = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$
- $f(x) > 0 \Rightarrow x > 0,\ \ f(x) < 0 \Rightarrow x < 0$

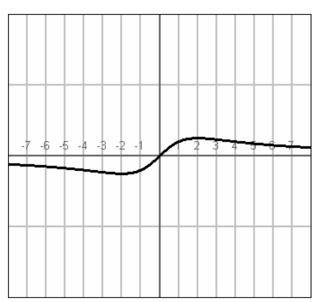


Primjer 2. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$

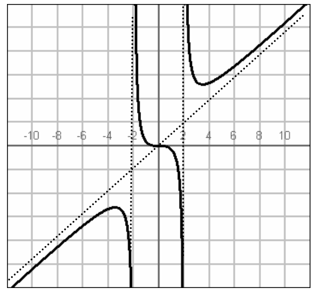
- Domena je skup **R**
- Nultočke: $x(2x^2 - 15x - 36) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,,\, x_{2,3} = \dfrac{15 \pm \sqrt{225 + 288}}{4} \approx \dfrac{15 \pm 22.6}{4} = \begin{cases} 9.4 \\ -1.9 \end{cases}$
- Asimptote nema
- Ekstremi: vidi primjer 1 u prethodnoj točki: maksimum je A (-1,19), minimum je B(6,-324)



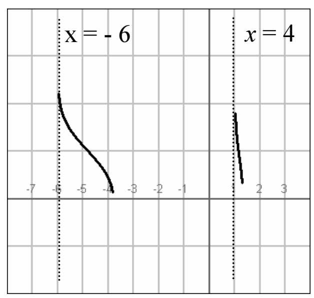
Primjer 3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4} \quad \Rightarrow$



Primjer 4. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$



Primjer 5. $f(x)=+\sqrt{\ln\dfrac{4-x^2}{x^2+5x-6}}$



V. INTEGRALNI RAČUN

1. NEODREĐENI INTEGRAL

Čim se definira određena računska operacija, prirodno se javlja misao njenog obrata ili inverzije (npr. zbrajanje-oduzimanje, množenje-dijeljenje, potenciranje-logaritmiranje, itd.). Tako se još u vrijeme izgradnje diferencijalnog računa razmatrao "obrnuti" problem tangente, odnosno problem da se iz zadane tangente u svakoj točki neke krivulje, nađe sama ta krivulja. Taj problem vodi do diferencijalnih jednadžbi. Najjednostavniji slučaj tog problema je nalaženje funkcije čija nam je derivacija poznata.

Definicija. Kaže se da je funkcija $F(x)$ **primitivna funkcija** ili **antiderivacija** funkcije $f(x)$ ako vrijedi $F'(x) = f(x)$, odnosno $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, odnosno $dF(x) = f(x)dx$.

Primjeri.

- Primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x$ je $F(x) = \sin x$ (jer je $(\sin x)' = \cos x$)
- Primitivna funkcija funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je $F(x) = \ln x$ (jer je $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$)
- Primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^2$ je $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ (jer je $(\dfrac{1}{3}x^3)' = x^2$)

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$, tada je i $F(x) + C$, gdje je $C \in \mathbf{R}$ neka konstanta, primitivna funkcija od $f(x)$, jer vrijedi: $\big(F(x) + C\big)' = F'(x) + 0 = f(x)$. Obratno, ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ dvije primitivne funkcije od $f(x)$, tada je njihova razlika neki $C \in \mathbf{R}$, tj. $F_2(x) = F_1(x) + C$. *Dokaz:* $\big(F_2(x) - F_1(x)\big)' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\Rightarrow$ $F_2(x) - F_1(x) = C$ $\Rightarrow$ $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Tako smo dokazali **teorem:** Primitivna funkcija $F(x)$ funkcije $f(x)$ nije jednoznačno određena. Ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$, tada bilo koja druga primitivna funkcija funkcije $f(x)$ ima jednadžbu $F(x) + C$, gdje je C neka konstanta.

Definicija. Ako je $F(x)$ primitivna funkcija od $f(x)$, tada se skup svih primitivnih funkcija $\{F(x)+C \mid C\in \mathbf{R}\}$ funkcije $f(x)$ zove **neodređeni integral funkcije** $f(x)$ i označava sa $\int f(x)dx$.

Dakle, $\int f(x)dx = \{F(x)+C \mid C\in \mathbf{R}\}$. Funkcija $f(x)$ zove se **podintegralna funkcija**, a C **konstanta integracije**. Računanje neodređenih integrala zove se **integriranje**. Po dogovoru, ubuduće ćemo kratkoće radi pisati samo $\int f(x)dx = F(x)+C$, ili čak samo $\int f(x)dx = F(x)$, tj. izjednačiti ćemo neodređeni integral i primitivnu funkciju.

Istaknimo još jednom: $\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$ ili $dF(x)=f(x)dx$.

Primjeri.

- $\int xdx = \frac{x^2}{2}+C$ (Zašto? Zato jer je $\left(\frac{x^2}{2}+C\right)' = x = f(x)$)
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$ (jer je $(arctgx+C)' = \frac{1}{1+x^2}$)

Teorem.

a) Ako je $k\in \mathbf{R}$ neka konstanta, onda vrijedi: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$,

b) $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Iz definicije neodređenog integrala i iz formula za deriviranje elementarnih funkcija, dobivamo slijedeće **osnovne** ili **tablične neodređene integrale:**

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n\neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+1}\right\|$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|$

Ostali neodređeni integrali računaju se tako da ih raznim metodama svodimo na navedene tablične integrale. Ako se u tome uspije integral se zove **elementarni**, a ako se u tome ne uspije integral se zove **neelementarni**. Neelementarni integrali ne mogu se svesti na tablične, a primjer takvih integrala su: $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int e^{x^2} dx$.

U toj činjenici je bitna razlika između diferencijalnog i integralnog računa: derivacija elementarne funkcije uvijek je elementarna funkcija, dok neodređeni integral elementarne funkcije ne mora biti elementarna funkcija.

Metode kojima se zadani integral svodi na neki tablični integral su metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije.

Metoda supstitucije ili **zamjene varijable** sastoji se u tom da se u zadani integral $\int f(x)dx$ uvede nova varijabla t relacijom $x = g(t)$ ili $t = g(x)$, nakon čega $\int f(x)dx$ prelazi u tablični integral $\int f_1(t)dt$.

Primjeri.

1. $$\int (2x+1)^5 dx = \begin{bmatrix} 2x+1=t \\ (2x+1)'dx = t'dt \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int t^5 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6} = \frac{1}{12}(2x+1)^6$$

Provjera: $\left[\frac{1}{12}(2x+1)^6\right]' = \frac{1}{12}\cdot 6(2x+1)^5 \cdot 2 = (2x+1)^5$, a to je zaista podintegralna funkcija.

2. $\int x^2 \sin x^3 dx = \left[\begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array}\right] = \int \sin t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\cos t = \frac{1}{3}\cos x^3$

3. $\int \frac{dx}{x^2+4x+7} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3} = \left[\begin{array}{l} x+2=\sqrt{3}t \\ dx = \sqrt{3}t \end{array}\right] = \int \frac{\sqrt{3}dt}{3t^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} arctgt = \frac{\sqrt{3}}{3} arctg \frac{x+2}{\sqrt{3}}$$

Provjera: $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} arctg \frac{x+2}{\sqrt{3}}\right]' = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{x^2+4x+7}$

4. $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left[\begin{array}{l} 1+e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{1+e^x}$

5. $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \left[\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctgt = \frac{1}{2} arctgx^2$

6. $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \end{array}\right] = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$

Metoda parcijalne integracije zadana je formulom $\int u(x)dv = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du$, odnosno $\int udv = u\cdot v - \int vdu$. Ova metoda ne rješava integral potpuno (po tome je i dobila ime). Ona integral na lijevoj strani svodi na integral na desnoj strani, a to znači da ona ima smisla jedino onda kada integral na desnoj strani nije složeniji od integrala na lijevoj strani. Pri tome se za funkciju $u = u(x)$ obično bira funkcija koja se deriviranjem pojednostavnjuje.

Primjeri.

1. $$\int xe^x dx = \int \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{xdx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = e^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

   Odavde vidimo da ovaj izbor za *u* i *dv* nije dobar jer je $\int x^2 e^x dx$ složeniji od polaznog integrala. Pokušajmo s drugim izborom za *u* i *dv*.

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

2. $$\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{bmatrix} = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = (\ln x) \cdot x - x$$

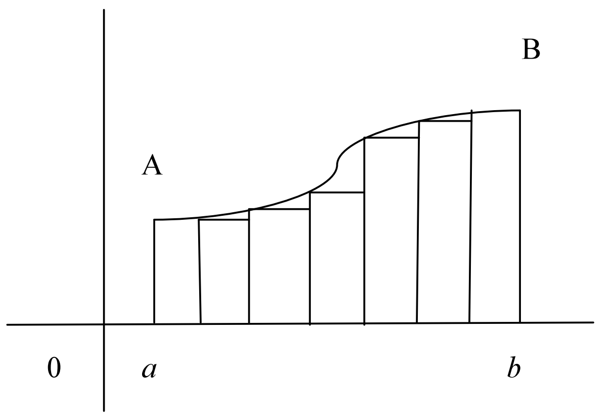
   Provjera: $(x \ln x - x)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

3. $$\int x^2 \cos xdx = x^2 \sin x - 2\int x \sin xdx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

2. ODREĐENI INTEGRAL I POVRŠINA

Znamo da je površina nekog lika u ravnini funkcija koja tom podskupu ravnine pridružuje neki pozitivan realan broj. Osim toga znamo kako se određuju vrijednosti te funkcije na podskupovima koji su pravokutnici, trokuti, poligoni, krugovi (zašto je površina kruga $P = r^2\pi$?), … Sada ćemo tu funkciju definirati i za općenitije skupove.

Neka je na segmentu $[a,b]$ zadana nenegativna funkcija $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, pa izračunajmo **površinu P lika** omeđenog lukom AB i dužinama $\overline{ab}$, $\overline{aA}$, $\overline{bB}$.



Tražena površina P aproksimira se zbrojem površina pravokutnika koji su upisani i opisani luku AB, a ta je aproksimacija to bolja što je broj tih pravokutnika veći. Stoga je površina P jednaka graničnoj vrijednosti zbroja površina tih pravokutnika kada broj pravokutnika teži u beskonačnost pri čemu "širina" svakog pravokutnika teži u nulu. Ta granična vrijednost zove se **određeni integral funkcije** $f(x)$ **na segmentu** $[a,b]$ i označava sa $\int_a^b f(x)dx$ (a se zove donja, a b gornja granica). Dakle: $P = \int_a^b f(x)dx$.

Tu smo dijelom koristili oznaku neodređenog integrala jer se može pokazati da postoji "jaka" veza između određenog i neodređenog integrala (tj. primitivne funkcije). Tu vezu daje **Newton-Leibnizova formula**, odnosno teorem:

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, tj. $F'(x)=f(x)$, onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Dakle, vrijednost određenog integrala jednaka je razlici vrijednosti što ih prima bilo koja primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na gornjoj i donjoj granici. To znači da je računanje određenih integrala jednostavno ukoliko znamo primitivnu funkciju odnosno neodređeni integral.

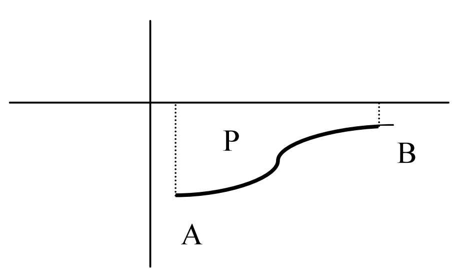
Primjeri.

1. $\int_{-1}^{4}(2x+3)dx = (x^2+3x)\Big|_{-1}^{4} = (16+12)-(1-3)=30$

2. $\int_0^{\pi}\sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1=2$

Pri računanju određenih integrala koriste se također metode supstitucije i parcijalne integracije, samo se tada moraju mijenjati i granice.

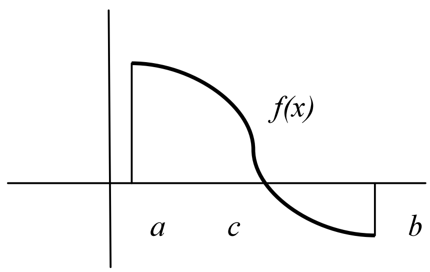
Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ geometrijski predstavlja površinu P lika omeđenog lukom AB krivulje $y=f(x)$ i dužinama $\overline{ab}$, $\overline{aA}$, $\overline{bB}$ samo u slučaju kada je funkcija $y=f(x)$ nenegativna na segmentu $[a,b]$, odnosno kada je $f(x)\geq 0$ za svaki $x\in[a,b]$, a što smo i pretpostavljali u uvodnom razmatranju. Ako je pak $f(x)\leq 0$ za svaki $x\in[a,b]$, tada će biti $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, pa je $P=-\int_a^b f(x)dx$ (jer površina lika ne može biti negativna).



Općenito, **geometrijsko značenje** određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ je: broj $\int_a^b f(x)dx$ je algebarski zbroj površina iznad i ispod osi x (a koje omeđuje krivulja $f(x)$), s tim da površina iznad osi x ima pozitivan predznak, a ispod osi negativan predznak.

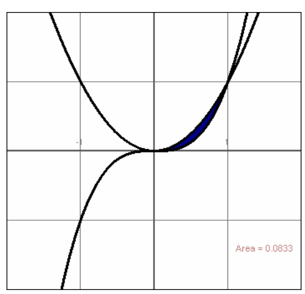
Primjeri.

1.



$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

2.



$$P = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

VI. NIZOVI I REDOVI

1. NIZOVI

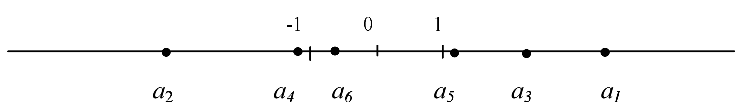
Definicija. Funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ zove se **niz** ili **niz realnih brojeva**.
Dakle, niz realnih brojeva je funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva, a kodomena skup realnih brojeva.

Funkcijska vrijednost $f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, obično se označava sa a_n i zove **opći** ili **n-ti član niza**, tj.

$$f(n) = a_n.$$

Posebno, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3, \ldots,$ pa se niz često piše u obliku: $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$. Kraća oznaka za niz je (a_n).

Iz ove definicije slijedi da niz ima beskonačno mnogo članova, a kako su oni realni brojevi, mogu se prikazati na brojevnom pravcu:



Niz je potpuno zadan ako je zadan njegov opći član a_n.

Primjeri.

1. Niz $a_n = 3n - 2$ je: 1, 4, 7, 10, 13, …, $3n - 2$, $3n + 1$, …
2. Niz $b_n = 2^{n-1}$ je: 1, 2, 4, 8, …, 2^{n-1}, …
3. Niz $c_n = \dfrac{1}{n}$ je: 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$, …, $\dfrac{1}{100}$, …
4. Niz $d_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+2}$ je: $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{4}$, $-\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{4}{6}$, $-\dfrac{5}{7}$, …, $\dfrac{40}{42}$, $-\dfrac{41}{43}$, …
5. Niz $e_n = 2^{(-1)^n n}$ je: 2^{-1}, 2^2, 2^{-3}, 2^4, 2^{-5}, 2^6, …

Ako se navedeni nizovi prikažu na brojevnom pravcu, vidi se da se oni različito "ponašaju": nekom nizu članovi stalno rastu, nekom nizu članovi teže k nekom broju, nekom nizu članovi se "gomilaju" oko dva broja, itd. Da bi se to opisalo, uvode se sljedeće definicije.

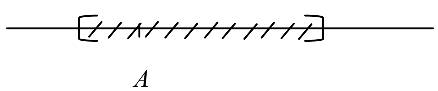
Niz je **monotono rastući** ako za njegove članove vrijedi $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, a niz je **monotono padajući** ako za njegove članove vrijedi $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Niz je **ograđen odozgo** ako postoji broj $M \in \mathbf{R}$ takav da je $a_n < M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, a niz je **ograđen odozdo** ako postoji broj $m \in \mathbf{R}$ takav da je $a_n > m$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

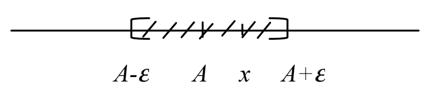
Niz je **ograđen** ako je ograđen odozgo i odozdo.

Primjer. Nizovi 1. i 2. u prethodnim primjerima su monotono rastući i ograđeni odozdo, niz u primjeru 3 je monotono padajući i ograđen odozgo, niz u primjeru 4 je ograđen, a niz u primjeru 5 je ograđen odozdo.

Okolina broja A je svaki (otvoreni) interval realnih brojeva koji sadrži broj A. Ako je ε maleni pozitivni realni broj onda je **ε okolina broja** A otvoreni interval širine 2ε u čijoj se sredini nalazi broj A:



okolina broja A



ε okolina broja A

Za realni broj x koji se nalazi u ε okolini broja A vrijedi: $A - \varepsilon < x < A + \varepsilon$ ili $|x - A| < \varepsilon$.

Definicija. Broj A u čijoj se svakoj, ma kako malenoj, ε okolini nalazi **beskonačno mnogo** članova niza, zove se **gomilište** tog niza.

Definicija. Broj A u čijoj se svakoj ε okolini nalaze **gotovo svi** članovi niza zove se **granična vrijednost** ili **granica** ili **limes** tog niza i piše se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$.

Primijetimo da "gotovo svi članovi niza" znači "svi članovi osim njih konačno mnogo".

Iz ovih definicija slijedi: granica niza uvijek je i gomilište niza, a gomilište niza može ali ne mora biti granica niza.

Granica niza može se definirati na još jedan ekvivalentan način:
Broj A zove se **granica** ili **limes niza** (a_n) ako za svaki ε >0, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za $n > n_0$ vrijedi $|a_n - A| < \varepsilon$.

Naime, zahtjev $|a_n - A| < \varepsilon$ za $n > n_0$, znači da se svi članovi niza iza člana a_{n_0} nalaze u ε okolini broja A, dakle, u toj okolini nalaze se gotovo svi članovi niza.

Definicija. Niz je **konvergentan** ako ima granicu, a niz je **divergentan** ako nije konvergentan.

Primjeri.

1. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ je konvergentan jer ima granicu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (lako se provjeri da se u svakoj ε okolini broja 0, ma kako ona malena bila, nalaze gotovo svi članovi niza).
2. Niz $a_n = \frac{3n}{n+1}$ je konvergentan jer ima granicu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$ (naime vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3}{1+0} = 3$).
3. Niz $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+2}$ nema granicu pa je divergentan (ima dva gomilišta: brojeve -1 i 1).
4. Niz $a_n = 2^{(-1)^n n}$ je divergentan (ima jedno gomilište: broj 0).
5. Nizovi $a_n = 3n - 2$ i $b_n = 2^{n-1}$ su divergentni. To su monotono rastući nizovi čiji članovi premašuju svaki ma kako velik broj, pa se piše $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-2) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1} = +\infty$ i kaže se da **divergiraju u užem smislu** (isto se kaže i ako vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$). Niz je **divergentan u širem smislu** ako je divergentan, a nije divergentan u užem smislu. Npr. nizovi iz prethodnih primjera 3 i 4 divergentni su u širem smislu.

Definicija. **Aritmetički niz** je niz (a_n) kojemu članovi imaju svojstvo $a_{n+1} - a_n = d$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Konstanta d zove se **diferencija aritmetičkog niza**.

Za $n>1$ vrijedi $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, odnosno $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, tj. svaki član (osim prvog) aritmetičkog niza je aritmetička sredina susjednih članova.

Iz ove definicije slijedi: $a_1, a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \ldots, a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$ pa aritmetički niz možemo zapisati u obliku: $a_1, a_1 + d,\ a_1 + 2d, \ldots,\ a_1 + (n-1)d, \ldots$. Iz toga dalje slijedi da je aritmetički niz divergentan u užem smislu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (ako je $d > 0$), $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (ako je $d < 0$).

Može se pokazati da je zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ ili } s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right].$$

Primjeri.

1. -4, -1, 2, 5, 8, … (tu je $a_1 = -4, d = 3$);
2. 0, -6, -12, -18, … (tu je $a_1 = 0, d = -6$).

Definicija. **Geometrijski niz** je niz (a_n) kojemu članovi imaju svojstvo $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall n \in \mathbf{N}$. Konstanta q zove se **kvocijent geometrijskog niza**.

Za $n > 1$ vrijedi $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, odnosno $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, tj. svaki član geometrijskog niza je geometrijska sredina susjednih članova.

Iz ove definicije slijedi: $a_1, a_2 = a_1 \cdot q,\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2, \ldots, a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$ pa geometrijski niz možemo pisati u obliku: $a_1, a_1 q,\ a_1 \cdot q^2, \ldots,\ a_1 \cdot q^{n-1}, \ldots$

Može se pokazati da je zbroj prvih n članova geometrijskog niza jednak $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ i da je geometrijski niz konvergentan za $|q| < 1$ i $q = 1$, a u ostalim slučajevima je divergentan.

__Primjeri.__

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (tu je $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$, pa je ovaj niz konvergentan);
2. $2, 3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, \ldots$ (tu je $a_1 = 2, q = \frac{3}{2}$, pa je ovaj niz divergentan).

Na kraju navedimo niz koji je najvažniji za matematiku i njene primjene u tehnici, ekonomiji, statistici i dr. To je niz $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, odnosno niz:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

Može se pokazati da je taj niz monotono rastući i da je ograđen (dakle vrijedi $a_n < a_{n+1}$ i $2 \le a_n < 3$ za $\forall n \in \mathbf{N}$), pa iz te dvije činjenice slijedi da je konvergentan, odnosno da ima granicu. Njegova granica je poznati iracionalni broj $e = 2.7182\ldots$, a to znači da vrijedi **teorem**: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

2. REDOVI

Definicija. Ako je (a_n) niz realnih brojeva, onda se izraz oblika

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

zove **beskonačan red** ili **red**.

Redu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ može se pridružiti njegov niz parcijalnih suma (s_n) čiji su članovi definirani na sljedeći način: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, tj. $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, itd.

Definicija. Kaže se da je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergentan** ako je konvergentan njegov niz parcijalnih suma (s_n). Granica tog niza zove se **suma reda** i označava sa *S*.

Dakle, $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ i u tom slučaju se piše $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

Red je **divergentan** ako nije konvergentan.

Primjeri.

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$;
2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$;
3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$;
4. $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$;
5. $1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^{n+1} n + \cdots$.

Kod razmatranja redova osnovni problem je odrediti da li je red konvergentan ili divergentan i u slučaju da je konvergentan izračunati mu sumu *S*.

Važan primjer reda je **geometrijski red**. To je red oblika

$$a_1 + a_1 q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \cdots$$

Iz poznatog izraza za zbroj prvih n članova geometrijskog niza $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$, može se zaključiti da je geometrijski red konvergentan samo u slučaju kada je $|q| < 1$ i tada mu je suma $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Primjer. Promotrimo red $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$. Odmah se vidi da je to geometrijski red kod kojega je $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$. Zbog $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, taj red je konvergentan i njegova suma je

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 .$$

Dakle, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$.

Pri ispitivanju redova veliku pomoć daju nam dalje navedeni teoremi, odnosno "kriteriji" pomoću kojih često možemo ispitati ponašanje reda.

Teorem (nužan uvjet konvergencije). Da bi red konvergirao, nužno je (ali i ne dovoljno) da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Primjeri.

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Vrijedi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pa ovaj red zadovoljava nužan uvjet konvergencije, a to znači da može biti konvergentan, ali i ne mora. Može se pokazati da je ovaj red divergentan, tj. da vrijedi $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$. Ovaj red zove se **harmonijski red**.

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

Vrijedi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, pa ovaj red zadovoljava nužan uvjet konvergencije, a to znači da može biti konvergentan, a može biti i divergentan. Nešto ranije smo pokazali da je ovaj red konvergentan. To je geometrijski red i suma mu je $S=2$.

c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$

Vrijedi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$, a to znači da ovaj red ne zadovoljava nužan uvjet konvergencije, odnosno, ovaj red je divergentan.

<u>Teorem (o uspoređivanju redova)</u>. Neka su $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka je $a_n \le b_n$, $\forall n\in \mathbf{N}$. Tada vrijedi:

a) ako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan red, onda je i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red;

b) ako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan red, onda je i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan red.

Pomoću ovog teorema dokazuju se sljedeća dva teorema, odnosno kriterija za ispitivanje redova.

<u>Teorem (D'Alembertov kriterij)</u>. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima i neka vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A$. Ako je:

- $A<1$ red je konvergentan
- $A>1$ red je divergentan
- $A=1$ nema odluke.

Teorem (Cauchyjev kriterij). Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima i neka vrijedi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$. Ako je:

- $A < 1$ red je konvergentan
- $A > 1$ red je divergentan
- $A = 1$ nema odluke.

Primjeri.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

   Da bi ispitali konvergenciju ovog reda primijenimo D'Alembertov kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 < 1\text{, pa je ovaj red konvergentan;}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}\left[2(n+1)+1\right]}}{\frac{3^n}{2^n(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{3}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{2} > 1\text{, pa je ovaj red divergentan;}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$

   Budući da su članovi ovog reda potencije s eksponentom n, ovdje ćemo primijeniti Cauchyjev kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 < 1\text{, pa je ovaj red konvergentan;}$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \cdot \sqrt[n]{n!} = ?$ jer ne znamo koliko je $\sqrt[n]{n!}$. Pokušajmo ovo riješiti D'Alembertovim kriterijem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e}$$

$\Rightarrow \ A = \frac{3}{e} > 1$, pa je ovaj red divergentan.