Matematika 3

Matematika 3

kolokviji i pismeni ispiti

Sadržaj

MATEMATIKA 3, 3A, 3B

ZADAĆE IZ MATEMATIKE 3

MATEMATIKA 3

(vjerojatnost - zadaća)

Vjerojatnost

1. Kolika je vjerojatnost da bacanjem dviju kockica dobijemo zbroj veći od 6?

2. Strijelac A i strijelac B gađaju metu 3 puta. Vjerojatnost pogotka strijelca A je 50%, strijelca B 75%. Što je vjerojatnije - da strijelac A pogodi metu barem jednom ili da strijelac B pogodi metu barem dvaput?

3. U kutiji je 30 kuglica: 10 crvenih, 10 plavih i 10 bijelih. Izvlačimo nasumce tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo imati po jednu od svake boje?

4. Strijelac A ima vjerojatnost pogotka 0.5 i gađa metu jedanput. Strijelac B ima vjerojatnost pogotka 0.25 i gađa dvaput. Za kojeg je strijelca vjerojatnije da će pogoditi metu?

5. Ante i Boris gađaju metu. Svaki ima dva pokušaja. Vjerojatnost pogotka za Antu je 0.6, za Borisa 0.5. Koja je vjerojatnost da će Ante pogoditi (strogo) više puta nego Boris?

Uvjetna vjerojatnost

6. Tri stroja proizvode vijke. Polovina svih vijaka proizvedena je na I. stroju, petina na II., a ostatak na III. Postotak defektnih proizvoda na I. je 2% , na II. 4% , a na III. 3% . Kolika je vjerojatnost da je vijak za kojeg je kontrola utvrdila da je neispravan proizveden na III. stroju?

7. Izvlačimo 4 karte iz špila od 32.

a) Koja je vjerojatnost da niti jedna od njih nije srce?

b) Koja je vjerojatnost da su izvučena 4 asa?

8. Ante i Boris gađaju metu. Svaki ima dva pokušaja. Vjerojatnost pogotka za Antu je 0.6, za Borisa 0.5. Koja je vjerojatnost da će Ante pogoditi (strogo) više puta nego Boris ako znamo da je Ante u prvom gađanju pogodio metu?

9. Ptica slijeće na slučajno izabrano gnijezdo, od tri moguća u blizini. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: dva dobra su u prvom, jedno dobro i jedan mućak u drugom, i dva su mućka u trećem. Ptica sjedi na samo jednom jajetu u gnijezdu. Naći vjerojatnost da sjedi na mućku! Ako je sjela na mućak, koja je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

10. U sljedećoj tablici prikazana je podjela radnih mjesta u tvrtki ABC po spolu i po odjelima.

	Muškaraca	Žena
Uprava	7	3
Prodaja	10	11
Proizvodnja	25	40

Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba

a) član uprave;
b) član uprave ako znamo da je žena;
c) radnik u proizvodnji;
d) radnik u proizvodnji ako znamo da je žena;
e) radnik u proizvodnji ili žena.

11. U dvije kutije stavili smo bijele i crne kuglice. U prvoj kutiji nalazi se 6 bijelih i 5 crnih kuglica, u drugoj 4 bijele i 4 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da se izvuče bijela kuglica iz druge kutije nakon što smo prenijeli dvije kuglice iz prve u drugu kutiju.

12. U svakoj od dvije kutije nalaze se po tri bijele kuglice. U prvoj kutiji se nalaze tri crne kuglice, u drugoj dvije. Prenesemo dvije kuglice iz prve u drugu kutiju. Zatim prenesemo dvije kuglice iz druge u prvu kutiju. Nakon toga izvucemo dvije kuglice iz druge kutije.

a) Kolika je vjerojatnost su kuglice bijele?

b) Kolika je vjerojatnost da je u prvoj kutiji samo jedna bijela kuglica ako smo izvukli dvije bijele kuglice?

13.* Pouzdanost testa na bolest B je 90%. Učestalost bolesti u općoj populaciji je 1%.

a) Koja je vjerojatnost da osoba koja je pozitivna na test zaista boluje od bolesti B?
b) Koliko je puta porasla vjerojatnost da osoba boluje od bolesti B nakon što je njen test pozitivan?

14. Jedna serija od 100 proizvoda ima 4, a druga serija od 81 proizvoda ima 9 neispravnih proizvoda. Iz prve serije slučajno se bira 3, a iz druge 5 proizvoda: oni se izmiješani stavljaju u jednu kutiju. Zatim se iz te kutije slučajno bira jedan proizvod. Kolika je vjerojatnost da je odabrani proizvod ispravan?

Slučajne varijable i distribucije

15. Četiri novčića bacaju se istovremeno. Naći funkciju vjerojatnosti (zakon razdiobe vjerojatnosti) za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj grbova. Kolike su vjerojatnosti da se pojavi jedan grb, najmanje jedan grb, ne više od tri grba?

16. Strijelac gađa cilj s vjerojatnošću 0.7. Naći funkciju vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj pogodaka u 5 gađanja.

17. 10% proizvoda su neispravni. Naći vjerojatnost da su u uzorku od 10 proizvoda bar 2 neispravna.

18. Bacaju se dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da se dobije suma brojeva veća od 10 ili djeljiva sa 6?

19. Bacaju se dvije kocke. Slučajna varijabla X računa zbroj vrijednosti na kockama. Odredite razdiobu od X te izračunajte očekivanje EX i varijancu $\operatorname{Var} X$.

20. Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću $p = 0.8$. Ima dva metka. Kada ih potroši dobije još onoliko metaka koliko je imao pogodaka u prvoj seriji i također ih ispaljuje u metu. Kolika je vjerojatnost da je cilj pogođen? Naći razdiobu broja pogodaka X, očekivanje i varijancu od X.

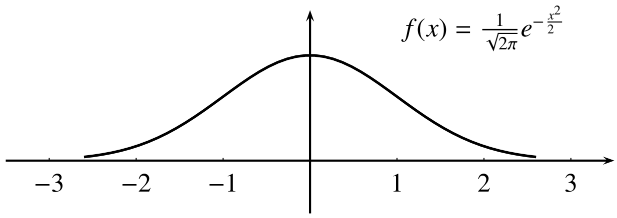
Kontinuirane distribucije

21. Neka je $f(x)$ gustoća slučajne varijable X zadana s $f(x) = ax^2$ na segmentu $[-1, 2]$ (0 inače). Odredite a i izračunajte $\operatorname{Var} X$ i $p(0 \leq X \leq 3)$.

22. Slučajna varijabla ima gustoću razdiobe $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Odrediti k, naći očekivanje i varijancu.

23. Neka je $f(x)$ funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X, zadana s $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a, izračunati μ, σ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.

Normalna razdioba



24. Pomoću tablica za Φ_0 (vidi str. 9) izračunajte:

a) $\Phi(1)$; b) $\Phi(0.5)$;

c) $\Phi(0.25)$; d) $\Phi(-0.1)$;

e) $\Phi(-0.25)$; f) $\Phi(-0.75)$.

25. X_1 i X_2 su slučajne varijable s normalnim razdiobama sa sredinom $\mu = 10$ i pripadnim standardnim devijacijama $\sigma_1 = 2$ i $\sigma_2 = 3$. Skicirajte grafove njihovih funkcija vjerojatnosti i izračunajte $p(X_1 \leq 9)$ i $p(9 \leq X_2 \leq 11)$. Skicirajte površine koje odgovaraju ovim vjerojatnostima.

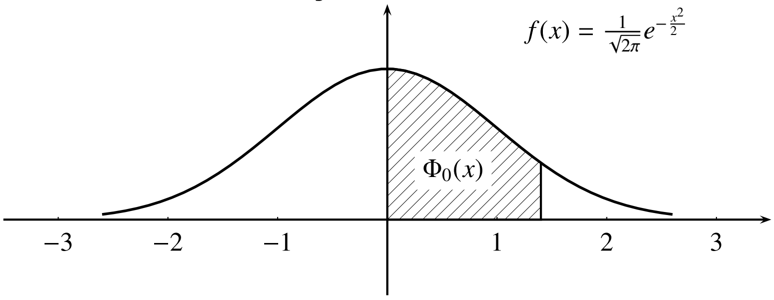
26. Stroj proizvodi matice čija je idealna širina $2cm$. Tolerira se odstupanje od ± 2mm. Pretpostavljamo da slučajna varijabla X koja mjeri širinu matice ima normalnu razdiobu. Kolika treba biti standardna devijacija σ tako da stroj proizvodi ispravne matice s vjerojatnošću od barem 96% (uz pretpostavku $\mu = 2$cm)?

FiXme P
do
zad
norm
distrib

MATEMATIKA 3

(tablica normalne razdiobe Φ_0)

Površine ispod normalne krivulje



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15909	16275	16640	17003	17364	17724	18082	18438	18793
0.5	19146	19497	19846	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22574	22906	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25174	25490
0.7	25803	26114	26423	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28523
0.8	28814	29103	29389	29673	29954	30233	30510	30785	31057	31326
0.9	31594	31858	32121	32381	32639	32894	33147	33397	33645	33891
1.	34134	34375	34613	34849	35083	35314	35542	35769	35992	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37285	37492	37697	37900	38100	38297
1.2	38493	38686	38876	39065	39251	39435	39616	39795	39972	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40987	41149	41308	41465	41620	41773
1.4	41924	42073	42219	42364	42506	42647	42785	42921	43056	43188
1.5	43319	43447	43574	43699	43822	43942	44062	44179	44294	44408
1.6	44520	44630	44738	44844	44949	45052	45154	45254	45352	45448
1.7	45543	45636	45728	45818	45907	45994	46079	46163	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46637	46711	46784	46855	46925	46994	47062
1.9	47128	47193	47257	47319	47381	47441	47500	47558	47614	47670
2.	47725	47778	47830	47882	47932	47981	48030	48077	48123	48169
2.1	48213	48257	48299	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48573
2.2	48609	48644	48679	48712	48745	48777	48808	48839	48869	48898
2.3	48927	48955	48983	49009	49035	49061	49086	49110	49134	49157
2.4	49180	49202	49224	49245	49265	49285	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49429	49445	49461	49476	49491	49506	49520
2.6	49533	49547	49560	49573	49585	49597	49609	49620	49631	49642
2.7	49653	49663	49673	49683	49692	49702	49711	49719	49728	49736
2.8	49744	49752	49759	49767	49774	49781	49788	49794	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49830	49835	49841	49846	49851	49855	49860
3.	49865	49869	49873	49877	49881	49885	49889	49893	49896	49899
3.1	49903	49906	49909	49912	49915	49918	49921	49923	49926	49928
3.2	49931	49933	49935	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49949
3.3	49951	49953	49955	49956	49958	49959	49961	49962	49963	49965
3.4	49966	49967	49968	49969	49970	49972	49973	49974	49974	49975
3.5	49976	49977	49978	49979	49980	49980	49981	49982	49982	49983
4.	49996	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997
4.5	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999

Vrijednostima u tablici prethodi decimalni zarez, pa je tako npr. $\Phi_0(1.71) = 0.45543$.

Uzorci – oznake

X	slučajna varijabla koja mjeri populaciju
$\overline{X}$	slučajna varijabla na uzorcima, računa ar. sredinu uzorka
N	veličina uzorka
$x = (x_1, \dots, x_N)$	uzorak veličine N
s^2	varijanca (pojedinog) uzorka
μ	sredina cijele populacije (EX)
σ^2, σ_X^2	varijanca sl. varijable X na populaciji (Var X)
$\mu_{\overline{X}}$	sredina populacije uzoraka ($E\overline{X}$)
$\sigma_{\overline{X}}$	varijanca cijele populacije uzoraka (Var $\overline{X}$)
c	pouzdanost
z_c	koeficijent pouzdanosti

Intervali pouzdanosti

c	99.73%	99%	96%	95%	90%	68.27%	50%
z_c	3	2.58	2.05	1.96	1.65	1	0.67

$$\Phi_0(z_c) = \frac{c}{2}$$

MATEMATIKA 3

(statistika - zadaća)

Normalna razdioba

1. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu sa parametrima $\mu = 15$, i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Nađi interval $\mu \pm c$ takav da je

$$p(\mu - c \leq X \leq \mu + c) \approx 50\%.$$

2. Slučajna varijabla X sa normalnom razdiobom ima sredinu $\mu = 0$ i nepoznatu standardnu devijaciju σ. Kolika je standardna devijacija σ ako znamo da je vjerojatnost da X budu u intervalu $[-10, 10]$

$$p(-10 \leq X \leq 10) = 0.91 \ ?$$

3. Trudnoća kod ljudi traje u prosjeku 266 dana sa standardnom devijacijom od 14 dana. Trajanje trudnoće može se dobro aproksimirati normalnim modelom.

a) Odredite koliki postotak trudnoća traje između 270 i 280 dana.
b) Odredite minimalno trajanje 25% najduljih trudnoća.

Statistika

4. Izračunajte EX i $\operatorname{Var} X$ za

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
X &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
X - EX &\sim \begin{pmatrix} 1 - \frac{11}{6} & 2 - \frac{11}{6} & 3 - \frac{11}{6} & 5 - \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{19}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
(X - EX)^2 &\sim \begin{pmatrix} \frac{25}{36} & \frac{1}{36} & \frac{49}{36} & \frac{361}{36} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ E(X - EX)^2 &= \frac{47}{6} \approx 1.3
\end{aligned}$$

□

5. Za uzorak populacije studenata sa težinama 72, 77, 81, 83 kg izračunajte sredinu i varijancu.

6. Proučavanjem visina muške populacije pomoću uzoraka od po 1000 muškaraca došlo se do sljedećih podataka: standardna devijacija uzoraka je 0.3cm, prosječna visina uzoraka je 178cm. Procijenite koliki dio populacije je niži od 170cm i koliki je dio populacije viši od 2m, uz pretpostavku da visina muške populacije ima normalnu razdiobu.

7. Slučajna varijabla X ima parametre $\mu = 100$, $\sigma = 3$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 36$ u granicama $[99.25, 100.2]$?

8. Koja je vjerojatnost da pri 100 bacanja (pravednog) novčića dobijemo više od 60 glava?

9. Parametri populacije su $\mu = 1500$, $\sigma = 20$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 30$ u intervalu $\mu \pm 3$?

10. Na raspolaganju nam je 6 danskih doga, od toga 4 imaju kupirane uši, a 2 nemaju. Napravite sve moguće uzorke od po tri psa (bez vraćanja!), i izračunajte očekivanje i disperziju za proporciju uzorka P (vjerojatnost kupiranog psa u uzorku). Usporedite te podatke sa sredinom i disperzijom za broj pasa s kupiranim ušima na nivou uzorka.

11. Lhasa apso ima njušku duljine $\mu = 4$cm, a očekivano je odstupanje $\sigma = 0.5$cm. Promatramo uzgajivačnice sa po 30 jedinki. S kojom će vjerojatnošću srednja vrijednost duljine njuške takvog uzorka biti između 3.7cm i 4.3cm, što su za tu vrstu dozvoljene veličine na natjecanjima?

12. Pretpostavimo da prosječan 70-godišnjak neke populacije ima $\mu = 25$ vlastitih zubiju, i neka je varijanca $\sigma = 1.39$. Iz populacije od 1500 70-godišnjaka radimo uzorke od po 100, bez vraćanja. Koliko je vjerojatnost da će sredina broja zubiju u slučajnom uzorku biti veća ili jednaka 25.2? U kolikom broju uzoraka pretpostavljamo da će se to dogoditi?

13. Predsjednički kandidat A pobijedio je na izborima sa 60% glasova. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 200 glasača kandidat George dobije manje od 50% glasova?

14. Kolika je vjerojatnost da u 50 bacanja novčića padne između 20 i 30 glava (uključivo)[1]?

FiXme P

pojav
fu
zadacima
nesto st

Intervali pouzdanosti

15. Azori su jedino mjesto u Europi gdje raste ananas. Od ananasa plasiranog na tržište 95% je prvoklasno. Rade se pošiljke od po 3000 ananasa. U kojim će se granicama nalaziti proporcija prvoklasnog ananasa u pošiljci s koeficijentom pouzdanosti $z_c = 2.40$?

16. Mjerenje dijametara slučajnog uzorka od 200 kugličnih ležajeva dalo je sredinu od 2.09cm i standardnu grešku od 0.11cm. Naći očekivani dijametar ležajeva s pouzdanošću: a) 90%; b) 99.73%

17. U 40 bacanja novčića dobivene su 24 glave. Naći interval u kojem se nalazi proporcija broja glavi dobivena za beskonačni broj bacanja novčića s pouzdanošću:

a) 95%

b) 98%

18. Veliki uzorak muške studentske populacije ima prosječnu visinu 180cm. Standardna devijacija ovog uzorka je 5cm. Procijenite srednju visinu muške studentske populacije uz pouzdanost 90%. Možete li uz ovu procjenu odrediti vjerojatnost da sljedeći slučajni uzorak od 50 studenata ima prosječnu visinu manju od 179cm?

MATEMATIKA 3

(vektorska analiza)

Koordinatizacije krivulja

1. Za pravocrtno gibanje parametrizirana s $\vec{r}(t) = (1, 2, -1) + f(t)(-3, 0, 1)$, gdje je

a) $f(t) = t + 2$,
b) $f(t) = 3t$,
c) $f(t) = at^2 + bt + c$,

odredite $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $|\vec{v}(2)|$, $|\vec{a}(2)|$.

2. Nađite vektorsku jednadžbu opisa jednolikog gibanja po kružnici $y^2 + z^2 = 4$, $x = 2$. Pokažite da su u svakom trenutku vektori $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ ortogonalni.

3.* Tijelo je ispaljeno iz točke $(0, 0, 0)$ brzinom $\vec{v_0} = (1, \sqrt{2}, 1)$ (m/s) u gravitacijskom polju s akceleracijom $\vec{g} = (0, 0, -9.8)$ (u m/s^2). Koordinatizirajte putanju tog tijela od ispaljivanja do trenutka pada na tlo (ravnina $z = 0$). Vrijeme mjerimo (u sekundama) od trenutka ispaljivanja ($t = 0$).

4. Nađite $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ za ovako opisano gibanje po helikoidu: $\vec{r}(t) = (R\cos kt, R\sin kt, t)$ (R i k su konstante).

5. Koordinatizirajte krivulju koja nastaje presjecanjem ploha

a) plohe $xy = 1$ i ravnine $z = 2x$,
b) cilindra $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ i sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

6. Koordinatizirajte krivulju koja nastaje presjecanjem cilindra $x^2 + y^2 = 1$ i ravnine $x + 2y + z = 2$.

Parametrizacije ploha

7. Parametrizirajte površinu jedinične kugle u sfernim koordinatama pomoću zemljopisne širine i visine, odnosno tako da koordinate točke u toj parametrizaciji odgovaraju njezinoj geometrijskoj širini i visini.

8. Napravite koordinatizaciju oplošja cilindra $x = z^2$.

9. Nađite vektor normale na plohu $z = 2x^2 - y + 3$ u točki $T(1, 2, 3)$.

10. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na 1-sferu u točkama

a) $T(1, 0, 0)$,
b) $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

11. Naći vektor normale tangencijalne ravnine u proizvoljnoj točki cilindra $x^2 + y^2 = 1$. Naći jednadžbu tangencijalne ravnine u $T(1, 0, 2)$.

Parametrizacije tijela

12. Parametrizirajte paralelepiped razapet vektorima $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, 5)$.

13. Parametrizirajte osminu kugle radijusa 2 sa središtem u ishodištu koja se nalazi u prvom oktantu.

14. Parametrizirajte kuglu radijusa 2 sa središtem u točki $A(2, 2, 2)$.

Skalarna i vektorska polja

15. Odredite gravitacijsko polje točke $A(2, 0, 1)$ ako za svaku točku P vrijedi da je

- $\overrightarrow{F}(P)$ kolinearno s $\overrightarrow{PA}$
- $\left|\overrightarrow{F}(P)\right|$ je obrnuto proporcinalno kvadratu udaljenosti P i A
- Vrijedi da je $\overrightarrow{F}(0, 0, 1) = (4, 0, 2)$.

16. Naći derivaciju skalarnog polja $U(\vec{r}) = x^3 + y + 2z^3$ duž parabole $\vec{r}(t) = (t, 1, t^2)$.

Integrali

17. Naći integral skalarnog polja $U(\vec{r}) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ po paraboli $y = x^2$, od $A(0, 0, 0)$ do $B(1, 1, 0)$.

18. Naći integral vektorskog polja $\vec{F}(\vec{r}) = (-2x^3, 2y^3)$ po dijelu centrirane jedinične kružnice u četvrtom kvadrantu od točke $A(1, 0)$ do $B(0, -1)$.

FiXme P
dovrsiti za

19. Pokažite da su vektorska polja

$\vec{F}(\vec{r}) = (3x^2 + y^2, 2xy, -\frac{1}{z})$;

$\vec{G}(\vec{r}) = (z \sin x, ze^y, \sin^2 x + e^y)$

konzervativna i izračunajte $\int_A^B \vec{F}d\vec{r}$, $\int_A^B \vec{G}d\vec{r}$ gdje su

a) $A(1, 0, 1)$, $B(0, -1, e)$;

b) $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$.

20. Pokazati da je polje $\vec{F} = (3x^2 + 3y, 3x + \frac{z}{y}, \ln y)$ konzervativno i izračunati rad (integral) tog polja od točke $A(0, 0, 1)$ do točke $B(1, 1, 1)$.

21. Neka je U skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(0, 1, 2)$.

22. Izračunati masu paralelepipeda razapetog iz ishodišta vektorima $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(-1, -1, 5)$ čija je gustoća zadana sa $\rho(x, y, z) = y + z$.

23. Izračunati masu sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ čija je gustoća zadana sa $\rho = z^2$.

24. Izračunati $\int \vec{F}d\vec{P}$ ako je $\vec{F}(\vec{r}) = (x^2, 0, 3y^2)$ brzina protoka kroz ravninu $x + y + z = 1$ u prvom oktantu.

25. Pokažite da je polje $\overrightarrow{F} = (6xy + z \sin x, 3x^2 + z^2, 2zy - \cos x)$ konzervativno i izračunajte integral (rad) tog polja od točke $A(0, 0, 0)$ do točke $B(0, 1, 2)$.

26. Izračunajte masu plohe paraboloida $z = 2x^2 + 2y^2$ od $z = 0$ do $z = 1$ ako je (površinska) gustoća plohe zadana s $\rho(x, y, z) = xyz + 1$.

Stokesova formula

27. Pomoću Stokesove formule izračunajte integral

$$\oint_C \overrightarrow{F} d\vec{r}$$

gdje je $\overrightarrow{F} = (-z, y, x)$ i C je kružnica dobivena presjecanjem sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Uzmite da je ploha po kojoj integrirate (čiji je rub kružnica C)

a) krug,

b) dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,

c) dio stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Gauss-Green

28. Izračunajte tok polja $\overrightarrow{F} = (x, y, xy)$ kroz oplošje kvadra omeđenog ravninama $z = 0$, $z = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ i $y = 3$.

29. Izračunati tok polja $\vec{F} = (xy, y^2, zy)$ kroz plohu omeđenu ravninama $z = -1$, $z = 1$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ i $y = 2$.

KOLOKVIJI IZ MATEMATIKE 3

A1

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\mathrm{Re}\left(i(e^{i}+e^{i\frac{\pi}{3}})\right).$$

(10 bodova)

2. Skiciraj područje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

$$\mathrm{Im}(iz) < \mathrm{Re}(iz).$$

(10 bodova)

3. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$z^2 + iz + \frac{i-1}{4} = 0.$$

(15 bodova)

4. Odredi kako funkcija e^z preslikava područje $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$.

(20 bodova)

5. Riješi jednadžbu

$$\sin 2z = \sqrt{3}.$$

(20 bodova)

6. Ispitaj gdje je funkcija $e^z(\overline{z}+z)$ analitička.

(10 bodova)

7. Odredite sliku skupa $|z-1| < \frac{1}{2}$ preslikavanjem

$$\frac{2z}{z-1}.$$

(15 bodova)

B1

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{81}+(i^{99}+i^{55}+i^{11}+i)\right\}.$$

(10 bodova)

2. Skiciraj područje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

$$\arg\frac{z}{i-1}=\frac{\pi}{6}.$$

(10 bodova)

3. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$z^2+i\sqrt{3}z+1=0.$$

(15 bodova)

4. Odredi kako funkcija z^2 preslikava područje za koje vrijedi $0<|z|<2$ i $\arg z<\frac{3}{4}\pi$.

(15 bodova)

5. Riješi jednadžbu

$$\cos z=i\sqrt{2}.$$

(20 bodova)

6. Ispitaj gdje je funkcija

$$e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z)+i\sin(\operatorname{Im} z))$$

analitička.

(10 bodova)

7. Odredite sliku skupa $|z+2i|>4$ preslikavanjem

$$\frac{3z}{z+1}.$$

(20 bodova)

A2

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\Big(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\Big)^{24}.$$

(10 bodova)

2. Skicirati u ravnini područje omeđeno s:

$$2 \leq |\, z+2 \,| \leq 3, \quad \pi/3 \leq \operatorname{Arg} z \leq 2\pi/3.$$

(10 bodova)

3. Naći sva rješenja jednadžbe:

$$z^2 - 4iz + \frac{9}{4} = 0.$$

(15 bodova)

4. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = e^{\pi i/4} z - 1$$

preslikava pravac $z + \overline{z} = 6$.

(20 bodova)

5. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = e^z$$

preslikava područje $\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$.

(15 bodova)

6. Naći sva rješenja jednadžbe

$$\operatorname{ch}(2z) = 4.$$

(20 bodova)

7. Ispitati gdje je funkcija

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+2)}$$

analitička i ako je moguće odrediti njenu derivaciju.

(10 bodova)

B2 **MATEMATIKA 3**

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Odrediti z ako vrijedi:

$$\mathrm{Arg}(2z+i) = \frac{\pi}{4}, \quad |2z+i| = 4.$$

(10 bodova)

2. Skicirati u ravnini područje omedjeno s:

$$|\, z - 2 + i \,| \geq 3, \; \frac{3\pi}{2} \leq \mathrm{Arg}\, z \leq 2\pi.$$

(10 bodova)

3. Naći sva rješenja jednadžbe:

$$z^2 - 3iz + 4 = 0.$$

(15 bodova)

4. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

preslikava krivulju $|z| = 1$.

(20 bodova)

5. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = \mathrm{Ln}\, z$$

preslikava područje $2 \leq |z| \leq 3$.

(15 bodova)

6. Naći sva rješenja jednadžbe

$$\sin(iz) = i.$$

(20 bodova)

7. Ispitati gdje je funkcija

$$f(z) = \frac{\sin z}{z+i+1}$$

analitička i ako je moguće odrediti
njenu derivaciju.

(10 bodova)

A1

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte: (15)

$$\int_C \ln z \; dz,$$

gdje je krivulja C gornja polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke -1 i 1.

2. Izračunajte: (20)

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-i)(z-1)} dz,$$

$C \equiv |z-1| = 1$.

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$: (15)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3} \; .$$

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip: (15)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \; .$$

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = 2$: (15)

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-1)} \; .$$

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 2i$: (20)

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} \; .$$

B1

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte: (15)

$$\int_C \ln z \; dz,$$

gdje je krivulja C lijeva polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke i i $-i$.

2. Izračunajte: (20)

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z+1)(z-i)} dz,$$

$C \equiv |z+1| = 1$.

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$: (15)

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \ .$$

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip: (15)

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} \ .$$

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = -1$: (15)

$$f(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2(z+2)} \ .$$

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 3 + \frac{\pi}{2} i$: (20)

$$f(z) = \frac{1}{\cos iz} \ .$$

A2

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte:

$$\int_C \frac{1}{z-2}\,dz,$$

gdje je C polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke $-i$ i i.

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C z e^{z^2}\,dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

(15 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 2$:

$$f(z) = z e^{z^2}\ .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = z \sin\frac{1}{z}\ .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red na području $0 < |z-2| < \frac{3}{2}$:

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)(2z+1)}\ .$$

(20 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{z^2}{\ln(2+z)}\ .$$

(15 bodova)

B2

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte:

$$\int_C \cos z + i \sin z \;\; dz,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 1 i $2i$.

(15 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z+1)^3} dz,$$

$C \equiv |z+1| = 1$.

(20 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$:

$$f(z) = \ln(z^2 + 5z + 6) \; .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = z e^{\frac{1}{z+2}} \; .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red na području $0 < |z-3| < 6$:

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-3)} \; .$$

(20 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{1}{3z+2} e^{\frac{1}{z}} \; .$$

(15 bodova)

A

MATEMATIKA 3

(treći kolokvij, 02. 02. 2004.)

1. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{z-1}{(z^2+2z+2)^2} dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $0, -2, -2-2i, -2i$.

(25 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\ d\varphi}{3+\cos\varphi}.$$

(20 bodova)

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

(25 bodova)

5. Zadan je kompleksni potencijal $F(z) = 3z^2 - 2i$. Odrediti jednadžbe ekvipotencijalnih krivulja, strujnica te ih skicirati u kompleksnoj ravnini. Također, odrediti brzinu $v(z)$.

(10 bodova)

B **MATEMATIKA 3**

(treći kolokvij, 02. 02. 2004.)

1. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^3}.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{2-z}{(z^2+2z+2)^2}dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $0, -2, -2+2i, 2i$.

(25 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\ d\varphi}{3-\cos\varphi}.$$

(20 bodova)

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx.$$

(25 bodova)

5. Odrediti jednadžbu strujanja topline za područje određeno zrakama $\phi = \frac{\pi}{3}$ i $\phi = -\frac{\pi}{3}$ gdje se krak $\phi = \frac{\pi}{3}$ grije na 30°C, a $\phi = -\frac{\pi}{3}$ na 60°C.

(10 bodova)

MATEMATIKA 3

(drugi ponovljeni kolokvij, 06.02.2004.)

1. Izračunajte:

$$\int_C (\ln z + z)\ dz,$$

gdje je krivulja C gornja polukružnica radijusa $r = 3$, sa središtem u ishodištu koja spaja točke -3 i 3.

(15 bodova)

2. Izračunajte:

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{(z-2i)(z-1)}\ dz,$$

gdje je C kružnica radijusa $r = 1$ oko $z_0 = 1$.

(20 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2+3z}\ .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3}\ .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = 2$:

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^7(z-3)}\ .$$

(15 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 1 + 4i$:

$$f(z) = \frac{1}{\cos(z+1)}\ .$$

(20 bodova)

A

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.)

1. Bacamo dvije kockice - jedna ima redom brojeve $1, 2, 2, 3, 3, 3$ na svojim stranicama, druga na stranicama ima ispisane brojeve $2, 2, 4, 4, 4, 4$. Odredite prostor elementarnih događaja i izračunajte vjerojatnost da je zbroj na kockicama 5.

(15 bodova)

2. Pouzdanost testa na bolest B je 90%. Učestalost bolesti u općoj populaciji je 1%. Koja je vjerojatnost da osoba koja je pozitivna na test zaista boluje od bolesti B?

(15 bodova)

3. Ante i Boris gađaju metu. Ante pogađa sa vjerojatnošću 0.5, Boris sa vjerojatnošću 0.2. Ante gađa dvaput, Boris samo jednom. Nađi funkciju razdiobe i očekivanje za slučajnu varijablu X koja broji ukupan broj pogodaka za obojicu.

(15 bodova)

4. Neka je $f(x)$ gustoća slučajne varijable X, zadana s ax^2 na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a, izračunati EX, $\operatorname{Var} X$ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.

(15 bodova)

5. Kontrola provjerava aparate. Aparat ima defekt s vjerojatnošću 0.04. Radimo uzorke od po 100 proizvoda. Kolika je vjerojatnost da u uzorku imamo između 2 i 6 defektnih proizvoda? (tj. da je proporcija između 0.02 i 0.06)

(20 bodova)

6. Na uzorku od 30 kolokvija iz matematike dobivena je srednja prolaznost $\overline{X} = 0.63$. Uz pretpostavljenu standardnu devijaciju od 0.08 odredite granice za očekivanu prolaznost na kolokvijima s pouzdanošću od 99%.

(20 bodova)

B

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.)

1. Bacaju se istovremeno novčić i 2 kocke. Odredite prostor elementarnih događaja i izračunajte vjerojatnost da je dobivena glava i bar jedna šestica.

(15 bodova)

2. Od djece neke osnovne škole 3/7 ih se upisalo u gimnaziju, 2/7 u neku tehničku školu i 2/7 u preostale škole. Među gimnazijalcima ih je 35% odlikaša, dok ih je u tehničkim školama i preostalim školama po 21%. Kolika je vjerojatnost da je odabrani odlikaš učenik tehničke škole?

(15 bodova)

3. Kutija sadrži 2 bijele i 3 plave kuglice. Izvlačimo jednu po jednu dok ne izvučemo i drugu bijelu. Neka je slučajna varijabla X broj takvih izvlačenja. Naći funkciju razdiobe za X.

(15 bodova)

4. Slučajna varijabla X ima gustoću $f(x) = \frac{a}{x}$ na intervalu $(1, e)$, inače $f(x) = 0$. Odrediti a i izračunati očekivanje i varijancu za varijablu X. Izračunajte $p(X > \frac{e}{2})$.

(15 bodova)

5. Prosječna masa odraslog muškarca iznosi 80kg uz standardnu devijaciju od 10kg. Kolika je vjerojatnost da uzorak od 50 ljudi ima prosječnu masu ispod 79kg?

(20 bodova)

6. U uzorku od 100 studenata druge godine FSB-a njih 63 je položilo matematiku III preko kolokvija. Odrediti očekivanu proporciju svih studenata druge godine koji će ispit položiti preko kolokvija s pouzdanošću od 90%?

(20 bodova)

A # MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 30.01.2006.)

1. Ante i Boris gađaju metu. Svaki ima dva pokušaja. Vjerojatnost pogotka za Antu je 0.6, za Borisa 0.5. Koja je vjerojatnost da će Ante pogoditi (strogo) više puta nego Boris? Koja je vjerojatnost da će Ante pogoditi (strogo) više puta nego Boris ako je Ante pogodio u prvom pokušaju?

(20 bodova)

2. U kutiji se nalaze 3 plave i 2 žute kuglice. Opišite prostor događaja za eksperiment u kojem izvlačimo 3 kuglice iz kutije. Izračunajte vjerojatnost da su izvučene kuglice iste boje.

(20 bodova)

3. Dvije igraće kockice na svojim stranicama imaju brojeve 1,1,1,2,2,3. Odredite razdiobu za slučajnu varijablu X koja računa umnožak brojeva koje dobijemo pri bacanju kockica. Izračunajte EX.

(20 bodova)

4. Za slučajnu varijablu X koja prati normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 15, \sigma = 3)$ izračunati $P(X < 13)$.

(20 bodova)

5. Slučajna varijabla X ima parametre $\mu = 100$, $\sigma = 3$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 36$ u granicama $[99.25, 100.2]$?

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

B

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 30.01.2006.)

1. U šeširu su 2 srećke, jedna dobitna i jedna prazna. Izvlačimo jednu. Nakon toga u šešir dodamo još dvije srećke, jednu dobitnu i jednu praznu, pa još jednom izvlačimo. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli dvije dobitne srećke? Kolika je vjerojatnost da smo prvi put izvukli praznu ako smo na kraju izvukli dvije dobitne?

(20 bodova)

2. Pero i Popaj kuglaju. Istovremeno, svaki u svojoj traci kuglom gađa 10 postavljenih čunjeva (i pogađaju ih s nama nepoznatim vjerojatnostima). Opisati prostor elementarnih događaja (promatramo broj pogođenih čunjeva u pojedinoj traci).

(20 bodova)

3. Na kladionici uplatimo dvije kombinacije od 10kn. Vjerojatnost dobitka po kombinaciji od 10kn je 0.49, dobitka od 200kn je 0.01, a inače nema dobitka. Naći funkciju vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja ostvarenu dobit. Izračunati očekivanu dobit EX.

(20 bodova)

4. Za slučajnu varijablu X koja prati normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 4, \sigma = 1)$ izračunati $P(X > 5.01)$.

(20 bodova)

5. Pretpostavimo da X, varijabla koja predstavlja broj dobivenih bodova na ovom kolokviju ima $\mu = 60$ uz $\sigma = 30$. U kojim će se granicama oko sredine $(\mu_{\overline{X}} \pm c)$ kretati $\overline{X}$ za proizvoljnu grupu od 60 studenata uz pouzdanost od 95%?

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

C

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 30.01.2006.)

1. Anselmo i Beda gađaju metu. Prvo Anselmo gađa 2 puta, svaki put s vjerojatnošću pogotka 0.7. Nakon toga gađa Beda jedanput, s vjerojatnošću pogotka 0.5. Kolika je vjerojatnost da je meta pogođena 2 puta?

Kolika je vjerojatnost da Anselmo nije nijedanput pogodio, ako je ukupno pogođena 2 puta?

(20 bodova)

2. Kad ubacimo 5kn u automat, on nam s vjerojatnošću $1/2$ izbaci kolu, s vjerojatnošću $1/3$ sok od naranče, s vjerojatnošću $1/6$ kavu. Opisati prostor događaja ako smo ubacili dva puta po 5kn. Izračunati vjerojatnost da smo pritom dobili sok od naranče i kavu.

(20 bodova)

3. Zadana je sljedeća funkcija vjerojatnosti za slučajnu varijablu X:

x_i	$P(X = x_i)$
0	α
100	$\frac{1}{10} + \alpha$
200	$\frac{1}{2}$
300	$\frac{1}{5}$

Izračunati α, očekivanje $\mathrm{E}X$ i varijancu $\mathrm{Var}X$ za slučajnu varijablu X.

(20 bodova)

4. Za slučajnu varijablu X koja prati normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 1)$ izračunati $P(X < 4.01)$.

(20 bodova)

5. Neka je vjerojatnost prolaza studenta na ovom kolokviju $p = 0.7$. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 30 studenata proporcija P bude veća od 0.8?

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

D

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 30.01.2006.)

1. Ispit iz matematike polaže se preko 3 kolokvija. Vjerojatnost prolaza na prvom kolokviju je 0.5, na drugom je 0.4, a na trećem je 0.3. Smatra se da student nije položio ispit ako nije ostvario prolaz na 2 ili više kolokvija. Koja je vjerojatnost da student ne položi matematiku ako je poznato da na prvom kolokvij ostvario prolaz?

(20 bodova)

2. U kutiji se nalaze 4 plave i 2 žute kuglice. Opišite prostor događaja za eksperiment u kojem izvlačimo kuglice iz kutije sve dok ne izvučemo plavu. Izračunajte vjerojatnost da je plava izvučena iz drugog pokušaja.

(20 bodova)

3. Zadana je sljedeća funkcija vjerojatnosti za slučajnu varijablu X:

x_i	$P(X = x_i)$
0	α
10	$\frac{1}{7}$
20	$\frac{1}{3} + \alpha$
50	$\frac{1}{5}$

Izračunati α, očekivanje $\mathrm{E}X$ i varijancu $\mathrm{Var}X$ za slučajnu varijablu X.

(20 bodova)

4. Slučajna varijabla X prati normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 3, \sigma)$. Odredite σ ako vrijedi

$$P(X < 4.2) = 80\% \ .$$

(20 bodova)

5. Slučajna varijabla X ima parametre $\mu = 100$, $\sigma = 3$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 36$ u granicama $[99.25, 100.2]$?

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

A

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.)

1. Za gibanje opisano parametrizacijom $\vec{r}(t) = (t^2, t - \sin t, \cos t)$ odredite $\vec{v}$ i $\vec{a}$.

(15 bodova)

2. Odredite vektor normale na plohu $z = 1 - y^2$ u točki $P(1, 0, 1)$.

(15 bodova)

3. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^2 - yz$. Izračunajte

$$\int_A^B U|d\vec{r}|$$

duž pravca koji spaja točke $A(1, 0, 0)$ i $B(0, 2, 2)$.

(15 bodova)

4. Odredite funkciju $\varphi(z)$ tako da za skalarno polje $U = xy + \varphi(z)$ i vektorsko polje $\overrightarrow{F} = (y, x, 3z^2)$ vrijedi

$$\nabla U = \overrightarrow{F}.$$

(15 bodova)

5. Neka je ploha P parametrizirana s $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^4)$, $u, v \in [0, 1]$. Izračunajte

$$\iint_P \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{P}$$

gdje je $\overrightarrow{F}$ vektorsko polje zadano s $\overrightarrow{F} = (0, xy, 2x + 2y)$.

(20 bodova)

6. Izračunajte volumen cilindra radijusa $r = 2$ i visine $h = 5$ parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (u \cos v, w, u \sin v).$$

(20 bodova)

B

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.)

1. Neka je krivulja zadana parametrizacijom $\vec{r}(t) = (\cos t, t - \sin t, t \cos t)$. Odredite $\frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ u točki sa koordinatom $t = 2$.

(15 bodova)

2. Ploha P parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v) = (u, 1 + \cos u, uv).$$

Odredite tangencijalne krivulje plohe $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ na plohi P koje prolaze točkom s koordinatama

$$u = \frac{\pi}{2},\ v = 1.$$

(15 bodova)

3. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^3y^2z$. Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(1, 2, 3)$.

(15 bodova)

4. Izračunajte

$$\oint_K \overrightarrow{F} d\vec{r},$$

gdje je K jedinična kružnica u xy ravnini, a polje $\overrightarrow{F} = (x, -y, z)$.

Da li $\vec{F}$ može biti potencijalno polje?

(15 bodova)

5. Neka je P dio plohe $z = x^4$ za koji je $x \in [0, 1]$ i $y \in [0, 2]$. Izračunajte

$$\iint_P \overrightarrow{F} d\overrightarrow{P}$$

gdje je $\overrightarrow{F}$ vektorsko polje zadano s $\overrightarrow{F} = (0, xy, 2x + 2y)$.

(20 bodova)

6. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (1 + w, 2 + u \cos v, 3 + u \sin v),$$

gdje je $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, 1]$.

(20 bodova)

MATEMATIKA 3

(ponovljeni kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 04.02.2005.)

1. Strijelac gađa metu s vjerojatnošću 0.7. Vrši 5 uzastopnih gađanja. Opisati prostor događaja i odrediti vjerojatnost da je pogodio cilj barem 4 puta.

(15 bodova)

2. Matematiku 3 (statistika, numerika, vektorska) sluša 25% studenata, matematiku 3A (numerika, statistika) 40%, matematiku 3B (statistika, vektorska) 35%. Koja je vjerojatnost da odabrani student koji sluša vektorsku analizu ima upisanu matematiku 3B?

(15 bodova)

3. U kutiji su 3 plave i 2 zelene kuglice. Izvlačimo kuglice dok ne izvučemo zelenu, pri tom ako smo izvukli plavu vraćamo je u kutiju. Opisati zakon vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj izvlačenja.

(15 bodova)

4. Neka je $f(x) = ce^x$ funkcija gustoće slučajne varijable X na intervalu $(0, \ln 2)$, drugdje je ona 0. Odrediti c, EX, $\operatorname{Var} X$.

(15 bodova)

5. Vjerojatnost gripe u nekom razdoblju je $p = 0.03$. Naći vjerojatnost da je u uzorku od 200 ljudi najmanje 5 i najviše 8 razboljelih.

(20 bodova)

6. U 30 gradova je dobiveno da politički kandidat ima udio od $\overline{X} = 0.61$ glasača. Uz standardnu devijaciju od 0.07 odrediti granice za očekivani udio glasača u nekom gradu s pouzdanošću od 95%.

(20 bodova)

A

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vektorske analize, 04.11.2005.)

1. Parametrizirajte osminu kugle radijusa 2 sa središtem u ishodištu koja se nalazi u prvom oktantu.

(15 bodova)

2. Nađite vektorsku jednadžbu za gibanje po pravcu iz početne točke $A(1,0,0)$ u smjeru $(1,1,1)$, a da je pritom $\vec{v}(0) = (3,3,3)$ i $\vec{a}(0) = (2,2,2)$.

(15 bodova)

3. Nađite vektor normale na plohu $z = 3 - x^2 - 2y^2$ u točki $T(1,1,0)$.

(15 bodova)

4. Pokažite da je polje $\overrightarrow{F} = (6xy + z\sin x, 3x^2 + z^2, 2zy - \cos x)$ konzervativno i izračunajte integral (rad) tog polja od točke $A(0,0,0)$ do točke $B(0,1,2)$.

(20 bodova)

5. Izračunajte masu plohe paraboloida $z = 2x^2 + 2y^2$ od $z = 0$ do $z = 1$ ako je (površinska) gustoća plohe zadana s $\rho(x,y,z) = xyz + 1$.

(15 bodova)

6. Izračunajte tok polja $\overrightarrow{F} = (x, y, xy)$ kroz oplošje kvadra omeđenog ravninama $z = 0$, $z = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ i $y = 3$.

(20 bodova)

B # MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vektorske analize, 04.11.2005.)

1. Parametrizirajte polovinu kugle radijusa 2 sa središtem u ishodištu koja se nalazi ispod xy-ravnine.

(15 bodova)

2. Koordinatizirajte krivulju koja opisuje gibanje od točke $A(1,2,0)$ do $B(5,0,1)$ tako da je

$$\vec{v}(0) = (4,-2,1) \qquad \text{i} \qquad \vec{a} = \vec{0}.$$

(15 bodova)

3. Nađite vektor normale na plohu $z = 2x^2 - y + 3$ u točki $T(1,2,3)$.

(15 bodova)

4. Pokažite da je polje $\overrightarrow{F} = (2y+\sin z, 2x+2y, x\cos z)$ konzervativno i izračunajte integral (rad) tog polja od točke $A(1,2,3)$ do točke $B(3,2,1)$.

(20 bodova)

5. Izračunajte masu valjka $y^2 + z^2 = 4$, $0 \leq x \leq 3$ kojemu je gustoća s $\rho(x,y,z) = 1 + \sqrt{y^2+z^2}$.

(15 bodova)

6. Izračunajte

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

za polje $\overrightarrow{F} = (y^2, zy, xy)$. Krivulja C je pozitivno orijentirani rub kvadrata $[-1,1] \times [-1,1]$ u xy-ravnini.

(20 bodova)

PISMENI ISPITI IZ MATEMATIKE 3

MATEMATIKA 3

(01. Listopad, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^5 + 2z^3 + z = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2\overline{z} + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} \quad .$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - 1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(07. Studeni, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^2 + (1+i)z + \frac{i}{4} = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\overline{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po trokutu s vrhovima $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = i$.

MATEMATIKA 3

(16. Siječanj, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1 + i)z.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\overline{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz \,,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z-1)(z-7)} \,,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \sin z^2 + \sin \frac{1}{z^2} \,.$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} \,.$$

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(10. Veljače, 2004.)

1. Izračunati:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

2. Izračunaj:

$$\int_C (2+i)\sin iz\, dz\,,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

3. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^8(z-8)}\,,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

4. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = \pi + 2i$:

$$f(z) = \tan z\,.$$

5. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(z-1)(z-2)^3}.$$

6. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}\quad.$$

MATEMATIKA 3

(19. Studeni, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$(z+i)^2 + 2i(z+i) - 1 = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \frac{1}{z} + \cos\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Korištenjem Cauchy-Riemannovih uvjeta provjerite je li funkcija $f(z) = z(\overline{z})^2 + z^2(\overline{z})$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po rubu trokuta s vrhovima $z_0 = -10 - i$, $z_1 = 10 - i$ i $z_2 = 20i$ u pozitivnom smjeru.

MATEMATIKA 3

(01. Listopad 2003.)

1. Izračunati:

$$z^5 + 2z^3 + z = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2\overline{z} + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} \quad .$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - 1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(07. Studeni, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^2 + (1+i)z + \frac{i}{4} = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\overline{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po trokutu s vrhovima $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = i$.

MATEMATIKA 3

(16. Siječanj, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1+i)z.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\overline{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz \,,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z-1)(z-7)} \,,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \sin z^2 + \sin \frac{1}{z^2} \,.$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \,.$$

MATEMATIKA 3

(10. Veljače, 2004.)

1. Izračunati:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

2. Izračunaj:

$$\int_C (2+i)\sin iz\, dz\,,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

3. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^8(z-8)}\,,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

4. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = \pi + 2i$:

$$f(z) = \tan z\,.$$

5. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(z-1)(z-2)^3}.$$

6. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}\quad.$$

MATEMATIKA 3

(19. Studeni, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$(z+i)^2 + 2i(z+i) - 1 = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \frac{1}{z} + \cos\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Korištenjem Cauchy-Riemannovih uvjeta provjerite je li funkcija $f(z) = z(\overline{z})^2 + z^2(\overline{z})$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} \; .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po rubu trokuta s vrhovima $z_0 = -10 - i$, $z_1 = 10 - i$ i $z_2 = 20i$ u pozitivnom smjeru.

MATEMATIKA 3

(01. Veljače 2005.)

Napomena.* Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.

1. Riješi jednadžbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1+i)z.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\overline{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}\ .$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(01. Veljače, 2005.)

Napomena.* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Poznata je LR faktorizacija (s parcijalnim pivotiranjem) matrice $PA = LR$, gdje su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem te faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovoj formi, koji interpolira funkciju

$$f(x) = \log_{10} x$$

u točkama s x-koordinatama 0.1, 1 i 10. Nađite vrijednost tog polinoma u točki 5.

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parabolu koja prolazi točkom $A = (0, 2)$ i u točki A ima derivaciju jednaku 4, a aproksimira skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

4. Iz kutije s 5 plavih, 3 zelene i 4 žute loptice izvlacimo 3 loptice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli po jednu od svake boje? Opišite prostor elementarnih događaja.

5. Strijelac gađa metu. Pogodak u središnji krug iznosi 10 bodova, pogodak u vanjski krug 5 bodova, a sve ostalo je promašaj (0 bodova). Strijelac gađa središnji krug s vjerojatnoscu 0.4, vanjski s vjerojatnošću 0.5, te promašuje s vjerojatnošću 0.1. Strijelac gađa 2 puta. Napravite zakon razdiobe (funkciju vjerojatnosti) za slučajnu varijablu X koja predstavlja ukupan broj bodova strijelca nakon dva gađanja. Izračunajte očekivanje EX.

6. Kolika je vjerojatnost da u 200 bacanja (pravednog) novčića padne barem 105 glava?

7. Odredite vektor normale na plohu $z = 1 - y^2$ u točki $P(1, 0, 1)$.

8. Odredite funkciju $\varphi(z)$ tako da za skalarno polje $U = xy + \varphi(z)$ i vektorsko polje $\overrightarrow{F} = (y, x, 3z^2)$ vrijedi

$$\nabla U = \overrightarrow{F}.$$

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (1 + w, 2 + u \cos v, 3 + u \sin v),$$

gdje je $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, 1]$.

MATEMATIKA 3

(15. Veljače, 2005.)

Napomena.[*] Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

koja se nalazi na intervalu $[0.5, 1.5]$, tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-2}.

2. Nađite LR faktorizaciju matrice A s parcijalnim pivotiranjem, preciznije, nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Zadana je diferencijalna jednadžba trećeg reda

$$y''' + 2y'' - y' + y = 2x^2$$

uz početne uvjete $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$. Diferencijalnu jednadžbu napišite kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

4. Na strane kockice napisali smo redom brojeve 1, 2, 2, 3, 3, 3. Bacimo kocicku dva puta. Koja je vjerojatnost da smo dobili iste brojeve? Odredite razdiobu za slučajnu varijablu X koja računa zbroj u dva bacanja.

5. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s parametrima $\mu = 75$, $\sigma = 5$. Odredite interval $[\mu - c, \mu + c]$ u kojem je 90% vrijednosti varijable X.

6. Mirko će pobijediti Slavka na predsjedničkim izborima sa omjerom glasova 55:45. Izračunajte vjerojatnost da slučajni uzorak od 200 glasača predvidi krivi rezultat izbora (Slavkovu pobjedu).

7. Odredite vektor normale na plohu koja je paramerizirana s $\vec{r}(u, v) = (u + \cos v, v + \sin u, uv)$ u točki s koordinatama $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{6}$.

8. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^3 + y^2 + z$. Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(1, 2, 3)$.

9. Tijelo V je parametrizirano s

$$\vec{r}(u, v, w) = (u, u + v, u + w), \qquad u, v, w \in [0, 1].$$

Izračunajte

$$\iiint_V dV\,.$$

MATEMATIKA 3

(01. Travanj, 2005.)

Napomena.[*] Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.

1. Riješite jednadžbu:

$$z^2 + (-1 + 2i)z - 2i = 0.$$

(15 bodova)

2. Odredite bilinearnu funkciju $f(z)$ za koju vrijedi:

$$f(0) = \infty,\ f(i) = 2,\ f(-i) = 0$$

Što dobivamo preslikavanjem imaginarne osi pomoću te funkcije?

(20 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_C (\overline{z})^2 dz$$

gdje je C donja polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke -1 i 1.

(15 bodova)

4. Razvijte u Laurentov red oko $z_0 = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

na području $|z-1| < 2$.

(20 bodova)

5. Nađite sve singularitete funkcije

$$f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$$

i odredite njihov tip.

(15 bodova)

6. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

(15 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(01. Travanj, 2005.)

Napomena.[*] Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Broj e^{-10} računamo računalom u aritmetici pomičnog zareza na dva načina.

(1) e^{-x} izračunamo razvojem funkcije e^{-x} u Taylorov red oko 0.

(2) Znamo da je $e^{-x} = 1/e^x$. Vrijednost e^x računamo razvojem u Taylorov red oko 0, a zatim 1 podijelimo s dobivenom aproksimacijom za e^x.

Ima li razlike u točnosti dobivenih rezultata? Imaju li relativno veliku ili relativno malu grešku? Ako je jedan od načina bolji, koji je to i zašto.

(12 bodova)

2. Gaussovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem nađite rješenje linearnog sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(12 bodova)

3. Zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$y'' - 2y' + y = x$$

uz početne uvjete $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Diferencijalnu jednadžbu napišite kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda i nađite aproksimaciju njenog rješenja u $x = 1.1$, korištenjem RK–1 metode s korakom $h = 0.1$.

(12 bodova)

4. Iz špila od 32 karte izvlačimo 3. Kolika je vjerojatnost da a) izvučemo bar jednog pika; b) izvučemo karte različitih boja? Pritom u špilu imamo po 8 karata svake boje: pik, tref, herc, karo. Opisati prostor elementarnih događaja.

(12 bodova)

5. Pouzdanost testa na neku bolest je 95%. U populaciji je 1% oboljelih. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 200 ljudi bude vise od 2% oboljelih? Kolikom ce broju od njih biti dijagnosticirana bolest?

(12 bodova)

6. Prosječna visina studenta u populaciji je 182cm, standardnu devijaciju 8cm. Naći interval oko te vrijednosti (182cm) u koji ce uz 95%-tnu pouzdanost spadati studenti iz uzorka veličine 200.

(12 bodova)

7. Ploha P parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v)(u, u - \cos v, uv^2).$$

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu P koja prolazi točkom $T(1, 2, \pi^2)$.

(12 bodova)

8. Neka je U skalarno polje zadano s

$$U = xy + xz^2.$$

Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(-1, 0, 1)$ i $B(0, 1, 1)$.

(12 bodova)

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r} = (2 + uw, v + e^w, uv)$$

gdje su $u, v, w \in [0, 1]$.

(12 bodova)

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(06. Svibanj, 2005.)

Napomena:[*] Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi točkom $(0, 1)$ i aproksimira sljedeći skup podataka $(-1, 0.5)$, $(0, 1.1)$, $(1, 1.4)$, $(2, 2.1)$.

(12 bodova)

2. Newtonovom metodom nađite nultočku funkcije

$$xe^x - 2 = 0$$

koja se nalazi u intervalu $[0, 1]$, tako da greška bude manja ili jednaka od 10^{-4}.

(12 bodova)

3. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\begin{aligned} x + y' + xyt &= 1 \\ x' + yt &= 1 \end{aligned}$$

uz početne uvjete $x(1) = 2$, $y(1) = -1$. Nađite aproksimaciju rješenja tog sustava u $t = 1.1$ korištenjem RK–1 metode s korakom $h = 0.1$.

(12 bodova)

4.

Iz kutije s 7 plavih, 2 zelene i 54 žute loptice izvlačimo 3 loptice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli dvije žute? Opišite prostor elementarnih događaja.

(12 bodova)

5. Neka je $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ funkcija gustoće slučajne varijable X na intervalu $(-1, 1)$, drugdje je ona 0. Odrediti c, EX.

(12 bodova)

6. Prosječna širina struka studentica u populaciji je 65cm, standardnu devijaciju 10 cm. Naći interval oko te vrijednosti (65cm) u koji ce uz 90%-tnu pouzdanost spadati studentice iz uzorka veličine 100.

(12 bodova)

7. Koordinatizirajte ravninu koja prolazi točkom $T(3, 0, 2)$ i ima vektor normale $\vec{n} = (-1, 1, 2)$.

(12 bodova)

8. Odredite duljinu krivulje od točke $A(1, 2, 3)$ do točke $B(2, 4, 6)$ koorinatizirane s

$$\vec{r} = (\ln x, \ \ln(x^2), \ \ln(x^3)).$$

(12 bodova)

9. Odredite skalarno polje U tako da za vektorsko polje

$$\vec{F} = (y + z^2, x, 2xz + \frac{1}{2}z)$$

vrijedi

$$\nabla U = \vec{F}.$$

(12 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(23. Lipanj, 2005.)

Napomena.* Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.

1. Pomoću funkcije

$$f(z) = z \cdot e^{\frac{\pi}{2} i} + i$$

preslikajte kružnicu $|z - i| = 1$.

(20 bodova)

2. Riješite jednadžbu

$$\sin(2z) = i.$$

(20 bodova)

3. Pronađite sve singularitete funkcije

$$f(z) = z^3 \; e^{\frac{1}{z}}$$

i odredite njihov tip. Koliko iznosi $Res(f, 0)$?

(20 bodova)

4. Izračunajte

$$\int_\Gamma Re(z^2) dz$$

gdje je Γ dužina koja spaja $z_0 = 0$ i $z_1 = \sqrt{3} + i$.

(20 bodova)

5. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$$

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(23. Lipanj, 2005.)

Napomena.* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovom obliku, koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

u točkama s x–koordinatama 1, 9, 27. Izračunajte vrijednost interpolacijskog polinoma u točki $x = 6$ i nađite pripadnu pogrešku.

(16 bodova)

2. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se trapeznom metodom izračunala približna vrijednost integrala

$$\int_0^2 \left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} + x^2 + x + 1 \right) dx$$

tako da greška bude manja od 10^{-6}.

(16 bodova)

3. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - x_2 - t \\ x_2' &= x_1 - tx_2 \end{aligned}$$

uz početne uvjete $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$. Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za $t = 0.2$ uz korak $h = 0.2$.

(16 bodova)

4. U kutiji se nalaze po 2 kuglice crvene, bijele i plave boje. Opišite prostor elementarnih događaja za

a) izvlačenja dvije kuglice iz kutije bez vraćanja;

b) izvlačenja dvije kuglice iz kutije s vraćanjem.

Sve su kuglice različite samo po boji. Kuglice se izvlače bez gledanja. Što je vjerojatnije - da se u eksperimentu iz a) izvuku dvije kuglice iste boje ili u b) dvije različite boje?

(16 bodova)

5. Strijelac pogađa cilj s vjerojatnošću 0.7. Naći funkciju vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj pogodaka u 4 gađanja.

(16 bodova)

6. Prosječna visina učenika u populaciji je 160cm. Uz koliku standardnu devijaciju učenici visine 170cm, 155cm i 172cm pripadaju među središnjih 90% populacije?

(16 bodova)

7. Radij vektor točke koja se giba po krivulji dan je formulom

$$\vec{r}(t) = (t^2 e^t, t^2 + t + 1, et).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije, te njihove apsolutne vrijednosti u točki $T(0, 1, 0)$.

(16 bodova)

8. Koordinatizirajte površinu beskonačnog cilindra paralelnog s x-osi koji prolazi kroz točke $T_1(0, 2, 0)$, $T_2(0, -2, 0)$ i $T_3(0, 0, 2)$.

(16 bodova)

9. Pronađite volumen tijela koordinatiziranog s

$$\vec{r} = (u, w\cos v, w\sin v),$$

gdje su $u, v, w \in [0, 1]$.

(16 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(07. srpnja, 2005.)

Napomena.* Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.

1. Izračunati:

$$\left| \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{81} + i^{11} \right|.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte

$$\int_{\Gamma} \Big(\mathrm{Im}(z^2 - i) \Big)\, dz$$

gdje je Γ dužina od $z_0 = 0$ do $z_1 = i$.

(20 bodova)

3. Pomoću funkcije

$$f(z) = z^2 + 1 + i$$

preslikajte kružnicu $|z| = \sqrt{2}$.

(20 bodova)

4. Pronađite sve singularitete funkcije

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

i odredite njihov tip.

(20 bodova)

5. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+1)}$$

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(07. srpnja, 2005.)

Napomena.* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \ln(x + 5) + 2x + 9$$

koja se nalazi u intervalu $[-4.5, -4]$, tako da greška bude manja ili jednaka od 10^{-3}.

(16 bodova)

2. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovoj formi, koji interpolira funkciju

$$f(x) = 10^x$$

u točkama s x-koordinatama 1, 2 i 4. Nađite vrijednost tog polinoma u točki 3 i ocijenite grešku u toj točki (ne stvarnu grešku!).

(16 bodova)

3. Produljenom Simpsonovom metodom približno izračunajte integral

$$\int_4^5 \sqrt{x} \ln x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 10^{-6}$.

Uputa: $f^{(4)}(x) = x^{-7/2}\left(1 - \dfrac{15}{16}\ln x\right)$.

(16 bodova)

4. Strijelac A pogađa metu s vjerojatnošću 0.6, a strijelac B s vjerojatnošću 0.5. Svaki od strijelaca gađa svoju metu 3 puta. Ako je meta pogođena 2 puta, kolika je vjerojatnost da je oba puta pogodio A?

(16 bodova)

5. Prosječna visina učenika u populaciji je 160cm, uz standardnu devijaciju 6cm. Izračunajte koja je vjerojatnost da je srednja visina učenika u uzorku veličine 100 između 155 i 159cm. Koja je vjerojatnost da imamo više od 3 uzorka od 5 slučajno odabranih uzoraka veličine 100?

(16 bodova)

6. 3% pakiranog mlijeka koje stiže u trgovinu je pokvareno. Pošiljke su od po 100 komada. U kojim će se granicama kretati postotak pokvarenog mlijeka u pošiljci s pouzdanošću od 95%?

(16 bodova)

7. Položaj čestice u trenutku t koja se giba u prostoru dan je s

$$\vec{r}(t) = (2\cos t^2, t\sin t^2, t).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije. Kolika je udaljenost čestice u trenutku $t = 1$ od točke u kojoj se nalazila u trenutku $t = 0$?

(16 bodova)

8. Parametrizirajte plohu $z = xy + \sin(x^2 + y^2)$ za $x, y \in [0, 1]$. Parametrizirajte koordinatne krivulje ove plohe koje prolaze kroz kroz točku $(0, 0, 0)$.

(16 bodova)

9. Izračunajte

$$\oint_K \overrightarrow{F} d\vec{r},$$

gdje je K jedinična kružnica u xy ravnini parametrizirana s $\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$). Polje $\overrightarrow{F}$ zadano je s $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, xyz)$.

(16 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(27. rujan, 2005.)

Napomena.* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Poznata je LR faktorizacija (s parcijalnim pivotiranjem) matrice $PA = LR$, gdje su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem te faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(12 bodova)

2. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \operatorname{sh} x + x - 1$$

koja se nalazi na intervalu $[0, 1]$, tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-2}.

(12 bodova)

3. Nađite Newtonov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

u točkama s x-koordinatama 1, 16, 81 i 256. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za $\sqrt[4]{100}$, ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

(12 bodova)

4. Iz špila od 52 karte izvlačimo 3 karte. Kolika je vjerojatnost da a) izvučemo bar jednog pika; b) izvu?čemo karte razli?itih boja? Pritom u špilu imamo po 13 karata svake boje: pik, tref, herc, karo. Opišite prostor elementarnih doga?aja.

(12 bodova)

5. Pouzdanost testa na neku bolest je 95%. U populaciji je 1% oboljelih. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 300 ljudi bude vise od 2% oboljelih? Kolikom će broju od njih biti dijagnosticirana bolest?

(12 bodova)

6. Prosječna visina studenta u populaciji je 180cm, standardnu devijaciju 8cm. Kolika je vjerojatnost da je za uzorak te populacije veličine $N = 250$ prosjek visine

$$\overline{X} \geq 181cm\ ?$$

(12 bodova)

7. Ploha P parametrizirana je s

$$\vec{r}(u,v)(u, u+v, u-v^2).$$

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu P koja prolazi točkom $T(0,1,-1)$.

(12 bodova)

8. Neka je U skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0,0,1)$ i $B(0,1,2)$.

(12 bodova)

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r} = (ue^w, v - e^w, v)$$

gdje su $u, v, w \in [0,1]$.

(12 bodova)

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(01. listopad, 2005.)

1. Riješi jednadžbu:

$$z^3 + \frac{z}{2} = iz.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\overline{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz \, ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z-1)(z-7)} \, ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^{\frac{1}{z}} \, .$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \, .$$

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(01. listopad, 2005.)

Napomena:* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

u točkama s x-koordinatama 1, 8, 27 i 64. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za $\sqrt[3]{50}$, ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

(16 bodova)

2. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se Simpsonovom metodom izračunala približna vrijednost integrala

$$\int_0^4 \left(\frac{x^5}{10} - x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1\right) dx$$

tako da greška bude manja od 10^{-6}.

(16 bodova)

3. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - t \\ x_2' &= x_1 + t x_2 \end{aligned}$$

uz početne uvjete $x_1(2) = 1, x_2(2) = -1$. Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za $t = 2.1$ uz korak $h = 0.1$.

(16 bodova)

4. Košarkaš Marko ima prosjek šuta s linije slobodnih bacanja 95%. Kolika je vjerojatnost da će od 4 slobodna bacanja pogoditi a) točno 2 puta; b) barem 2 puta?

(16 bodova)

5. Predsjednički kandidat George je pobijedio na izborima sa 51% glasova. Kolika je vjerojatnost da je u slučajnom uzorku od 300 glasača kandidat George dobio manje od 50% glasova?

(16 bodova)

6. Iz tvornice 5% proizvoda izađe neispravno. Pošiljke su od po 500 komada. U kojim će se granicama kretati postotak neispravnih proizvoda u pošiljci s pouzdanošću od 95%?

(16 bodova)

7. Položaj čestice koja se giba u prostoru u trenutku t dan je s

$$\vec{r}(t) = (e^{t+1}, t, t^2).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije. Kolika je udaljenost čestice u trenutku $t = 2$ od točke u kojoj se nalazila u trenutku $t = 0$?

(16 bodova)

8. Parametrizirajte plohu $z = x^2 + y^2$ za $x, y \in [0, 1]$. Odredite parametrizacije koordinatnih krivulja koje obrubljuju ovu plohu ($x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$).

(16 bodova)

9. Izračunajte

$$\oint_K \overrightarrow{F} d\vec{r},$$

gdje je K jedinična kružnica u xy ravnini parametrizirana s $\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$). Polje $\overrightarrow{F}$ zadano je s $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, xyz)$.

(16 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(03. veljače, 2006.)

Napomena.* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Funkciju $f(x) = xe^x - x - x^2$ aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo e^x korištenjem početnog komada Taylorovog reda za e^x oko 0, zatim red pomnožimo s x i oduzmemo što piše. Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = -10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je LR faktorizacija matrice (s pivotiranjem), $PA = LR$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem zadane faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$.

3. U Newtonovom obliku nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

u točkama s x-koordinatama 0, 1 i 3. Ima li takav interpolacijski polinom smisla?

4. Neki tenisač prolazi prvo kolo s vjerojatnošću 0.6, drugo kolo s vjerojatnošću 0.45. Kolika je vjerojatnost da je stigao do trećeg kola? Ako nije došao do trećeg kola, kolika je vjerojatnost da je ispao odmah u prvom?

5. Janica skija na stazi s 50 vratiju. Na svakima je vjerojatnost da će ih promašiti 0.01. Kolika je vjerojatnost da će izletiti na trećim vratima? Opisati prostor događaja za tu utrku.

6. Pretpostavimo da je prolaznost na ponovljenom kolokviju $p = 0.8$. U kojim će se granicama oko te vrijednosti kretati P za proizvoljnu grupu od 36 studenata uz pouzdanost od 90%?

7. Parametrizirajte valjak radijusa 4 iz kojeg je izduben valjak radijusa 2. Os mu je na z-osi, a nalazi se iznad xy-ravnine.

8. Naći vektor normale paraboloida $z = 3 - x^2 - y^2$ u točki $T(1, 1, 1)$.

9. Pokazati da je polje $\vec{F} = (3x^2 + 3y, 3x + \frac{z}{y}, \ln y)$ konzervativno i izračunati rad (integral) tog polja od točke $A(0, 0, 1)$ do točke $B(1, 1, 1)$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(17. veljače 2006.)

Napomena:* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \tanh x + x - 2$$

koja se nalazi na intervalu $[1, 2]$, tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-2}.

2. Nađite linearni sustav koji treba riješiti (ne morate ga riješiti) da biste linearnom metodom najmanjih kvadrata našli funkciju oblika

$$\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)^3$$

koja aproksimira skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$. Uputa: linearizirajte funkciju.

3. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi

$$y(x) = c_1 e^{-10x} + 1.$$

Zadan je početni uvjet $y(0) = 1$. Je li ta diferencijalna jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite!

4. Strijelac A pogađa metu s vjerojatnošću 0.6, a strijelac B s vjerojatnošću 0.5. Svaki od strijelaca gađa svoju metu 3 puta. Ako je meta pogođena 2 puta, kolika je vjerojatnost da je oba puta pogodio A?

5. Prosječna visina učenika u populaciji je 160cm. Pretpostavljama da visina učenika ima normalnu razdiobu. Kolika je standardna devijacija te razdiobe ako učenici visine 155cm i 165cm pripadaju u središnjih 90% populacije?

6. Iz tvornice 4% proizvoda izađe neispravno. Pošiljke su od po 400 komada. U kojim će se granicama kretati postotak neispravnih proizvoda u pošiljci s pouzdanošću od 95%?

7. Nađite vektorsku jednadžbu opisa jednolikog gibanja po kružnici $y^2 + z^2 = 4$, $x = 2$. Odredite $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ za to gibanje. Da li su vektori $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ ortogonalni.

8. Nađite vektor normale na plohu $z = 2x^2 - y + 3$ u točki $T(1, 2, 3)$.

9. Izračunajte tok polja $\vec{F} = (x, y, xy)$ kroz oplošje kvadra omeđenog ravninama $z = 0$, $z = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ i $y = 3$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(07. travnja 2006.)

Napomena.[*] Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{1}{ax + b}$$

koja prolazi točkom $(0, 1)$ i aproksimira skup podataka podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$. Uputa: linearizirajte funkciju.

2. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 - t \\ x_2' &= x_1 + x_2 + t \end{aligned}$$

uz početne uvjete $x_1(3) = 1, x_2(3) = -1$. Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za $t = 3.1$ uz korak $h = 0.1$.

3. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A (bez pivotiranja), tj. nađite rastav $A = LR$.

4. Tri igrača igraju poker. Nakon djeljenja svaki ili ulaže 1000kn s vjerojatnošću 0.6, ili može odustati s vjerojatnošću 0.4.

(a) Sastavite tablicu /funkciju vjerojatnosti za varijablu X, ukupni uloženi novac. Izračunati očekivanu svotu uloženog novca EX.

(b) Sastaviti funkciju vjerojatnosti za Y, dobit pojedinog igrača. Pobjeđuje onaj koji ima bolje među igračima koji su uložili. Pritom su im šanse podjednake.

5. Za slučajnu varijablu X koja prati normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 1)$ izračunati $P(2.5 < X < 3.99)$

6. Vjerojatnost da će let na nekom aerodromu biti otkazan u aprilu je $p = 0.05$. U kojim će se granicama oko te vrijednosti kretati P za proizvoljnih 25 letova uz pouzdanost od 95%?

7. Tijelo se giba po kubnoj paraboli $y = x^3$, $x \geq 0$. Napišite jednu moguću vektorsku jednadžbu toga gibanja, odredite vektor brzine i akceleracije u proizvoljnom trenutku, te iznos brzine i akceleracije u trenutku $t = 3$.

8. Provjeriti da li je polje $\vec{F} = (1, x, 0)$ konzervativno i izračunati rad (integral) tog polja po pravcu od točke $A(0, 0, 0)$ do točke $B(1, 0, 0)$

9. Izračunati rad polja $\vec{F} = (x, xz, zy)$ po kružnici $x^2 + y^2 = 2$, $z = 4$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(12. svibnja 2006.)

Napomena.[*] Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

koja prolazi točkama $(0, 1)$, $(1, 1)$ i aproksimira skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

2. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

u točkama s x-koordinatama 0, $\frac{1}{16}$, 1 i 16. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

3. Ako je zadana LR faktorizacija neke matrice $A = LR$ i vektor b,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

nađite korištenjem LR faktorizacije, rješenje sustava $Ax = b$.

4. Ivica skija na stazi s 50 vratiju. Na svakima je vjerojatnost da će ih promašiti 0.02. Kolika je vjerojatnost da će izletiti na trećim vratima? Kolika je vjerojatnost da neé promašiti nijedna vrata? Opišite prostor događaja za tu utrku.

5. Za slučajnu varijablu X koja ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 10, \sigma = 2)$ izračunajte

$$P(9 < X < 12)\,.$$

6. Predsjednički kandidat A pobijedio je na izborima sa 60% glasova. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 200 glasača kandidat George dobije manje od 50% glasova?

7. Položaj čestice koja se giba u prostoru u trenutku t dan je s

$$\vec{r}(t) = (e^{t+1}, t, t^2).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije. Kolika je udaljenost čestice u trenutku $t = 2$ od točke u kojoj se nalazila u trenutku $t = 0$?

8. Neka je U skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(0, 1, 2)$.

9. Izračunajte

$$\oint_K \vec{F}\, d\vec{r},$$

gdje je K jedinična kružnica u xy ravnini parametrizirana s $\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ $(\varphi \in [0, 2\pi])$. Polje $\vec{F}$ zadano je s $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, xyz)$.

Rezultati ispita*: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(21. lipnja 2006.)

Napomena:* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{x}$$

koja se nalazi na intervalu $[2.0, 2.5]$, tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-2}.

2. Nađite LR faktorizaciju matrice A s parcijalnim pivotiranjem, preciznije, nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Zadana je diferencijalna jednadžba trećeg reda

$$y''' - y'' + 2y' - xy = 3x^2$$

uz početne uvjete $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = -2$. Diferencijalnu jednadžbu napišite kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

4. Bacamo dvije igraće kocke. Dobiveni zbroj na njima je 8. Koja je vjerojatnost da je na jednoj od njih (svejedno kojoj) pala 2-ojka?

5. Za slučajnu varijablu X koja ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma)$ odredite standardnu devijaciju σ tako da vrijedi

$$P(99 < X < 101) = 0.5.$$

6. Predsjednički kandidat A pobijediti će kandidata B na predsjedničkim izborima sa 55% glasova.

a) Kolika je vjerojatnost da slučajni uzorak veličine $N = 200$ glasača predvidi krivi ishod izbora – odnosno da u tom uzorku A dobije manje od 50% glasova?
b) Kolika mora biti veličina uzorka da vjerojatnost krive prognoze izbora bude manja od 5%?

7. Položaji dviju čestica koje se gibaju u prostoru dani su parametrizacijama

$$\vec{r}_1(t) = (2t^3, 1 - t, t^2), \qquad \vec{r}_2 = (1 + t, t^2 + 2, t^3)\ .$$

a) Kolika je međusobna udaljenost čestica u trenutku $t = 0$?
b) Koja čestica ima veće ubrzanje u trenutku $t = 1$?

8. Neka je U skalarno polje zadano s $U = xyz + yz + z - 1$. Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(3, 0, 1)$ i $B(3, 1, 2)$.

9. Izračunajte

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

za polje $\overrightarrow{F} = (y^2, zy, xy)$. Krivulja C je pozitivno orijentirani rub kvadrata s vrhovima $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ u xy-ravnini.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(06. srpnja 2006.)

Napomena:* Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Funkciju $\sin x + \operatorname{sh} x$ aproksimiramo u računalu, korištenjem početnih komada Taylorovih redova oko 0 za te funkcije. Članove svakog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti ε, $0 < \varepsilon \ll 1$. Hoće li za $x = 10$ takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Profesor Senilković našao se u problemima, jer je zaboravio je li LR faktorizaciju matrice radio s parcijalnim pivotiranjem ili bez njega. Dobivena matrica L bila je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomozite prof. Senilkoviću i objasnite mu zbog čega je odmah vidljivo je li koristio pivotiranje ili ne.

3. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške), a zatim produljenom Simpsonovom metodom izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_1^2 \left(\frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{4} + 2x^2 - x \right) dx$$

tako da greška bude manja od 10^{-4}.

4. Bacamo dvije igraće kocke. Dobiveni zbroj na njima je 8. Koja je vjerojatnost da je na jednoj od njih (svejedno kojoj) pala 2-ojka?

5. Za slučajnu varijablu X koja ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma)$ odredite standardnu devijaciju σ tako da vrijedi

$$P(99 < X < 101) = 0.5.$$

6. Predsjednički kandidat A pobijediti će kandidata B na predsjedničkim izborima sa 55% glasova.

a) Kolika je vjerojatnost da slučajni uzorak veličine $N = 200$ glasača predvidi krivi ishod izbora – odnosno da u tom uzorku A dobije manje od 50% glasova?

b) Kolika mora biti veličina uzorka da vjerojatnost krive prognoze izbora bude manja od 5%?

7. Položaji dviju čestica koje se gibaju u prostoru dani su parametrizacijama

$$\vec{r}_1(t) = (2t^3, 1 - t, t^2), \qquad \vec{r}_2 = (1 + t, t^2 + 2, t^3)\ .$$

a) Kolika je međusobna udaljenost čestica u trenutku $t = 0$?

b) Koja čestica ima veće ubrzanje u trenutku $t = 1$?

8. Neka je U skalarno polje zadano s $U = xyz + yz + z - 1$. Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(3, 0, 1)$ i $B(3, 1, 2)$.

9. Izračunajte

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

za polje $\overrightarrow{F} = (y^2, zy, xy)$. Krivulja C je pozitivno orijentirani rub kvadrata s vrhovima $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ u xy-ravnini.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(11. rujna 2006.)

Napomena.[*] Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Pomoću LR faktorizacije bez pivotiranja riješite sustav:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 \\ -5 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

2. Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Newtonovom metodom tražimo nultočku na intervalu $[a, b]$.
Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija f i interval $[a, b]$ da bi Newtonova metoda sigurno konvergirala?
Da li su ti uvjeti ispunjeni za funkciju $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ i interval $[-2, 1]$? A za interval $[-\frac{1}{2}, 1]$?
Obrazložite svoje odgovore!

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata pronađite funkciju oblika

$$y = A \ln x + \ln^2 x$$

koja najbolje aproksimira skup točaka: $T_1(e, 1)$, $T_2(e^2, 4)$, i $T_3(e^3, 6)$.

4. U sljedećoj tablici prikazana je podjela radnih mjesta u tvrtki ABC po spolu i po odjelima.

	Muškaraca	Žena
Uprava	7	3
Prodaja	10	11
Proizvodnja	25	40

Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba

a) član uprave;
b) član uprave ako znamo da je žena;
c) radnik u proizvodnji;
d) radnik u proizvodnji ako znamo da je žena;
e) radnik u proizvodnji ili žena.

5. Trudnoća kod ljudi traje u prosjeku 266 dana sa standardnom devijacijom od 14 dana. Uz pretpostavku da se trajanje trudnoće može dobro aproksimirati normalnim modelom odredite koliki postotak trudnoća traje između 270 i 280 dana.

6. Veliki uzorak muške studentske populacije ima prosječnu visinu 180cm. Standardna devijacija ovog uzorka je 5cm. Procijenite srednju visinu muške studentske populacije uz pouzdanost 90%.

7. Ploha P parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v)(u, u + v, u - v^2).$$

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu P koja prolazi točkom $T(0, 1, -1)$.

8. Neka je U skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(0, 1, 2)$.

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r} = (ue^w, v - e^w, v)$$

gdje su $u, v, w \in [0, 1]$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*